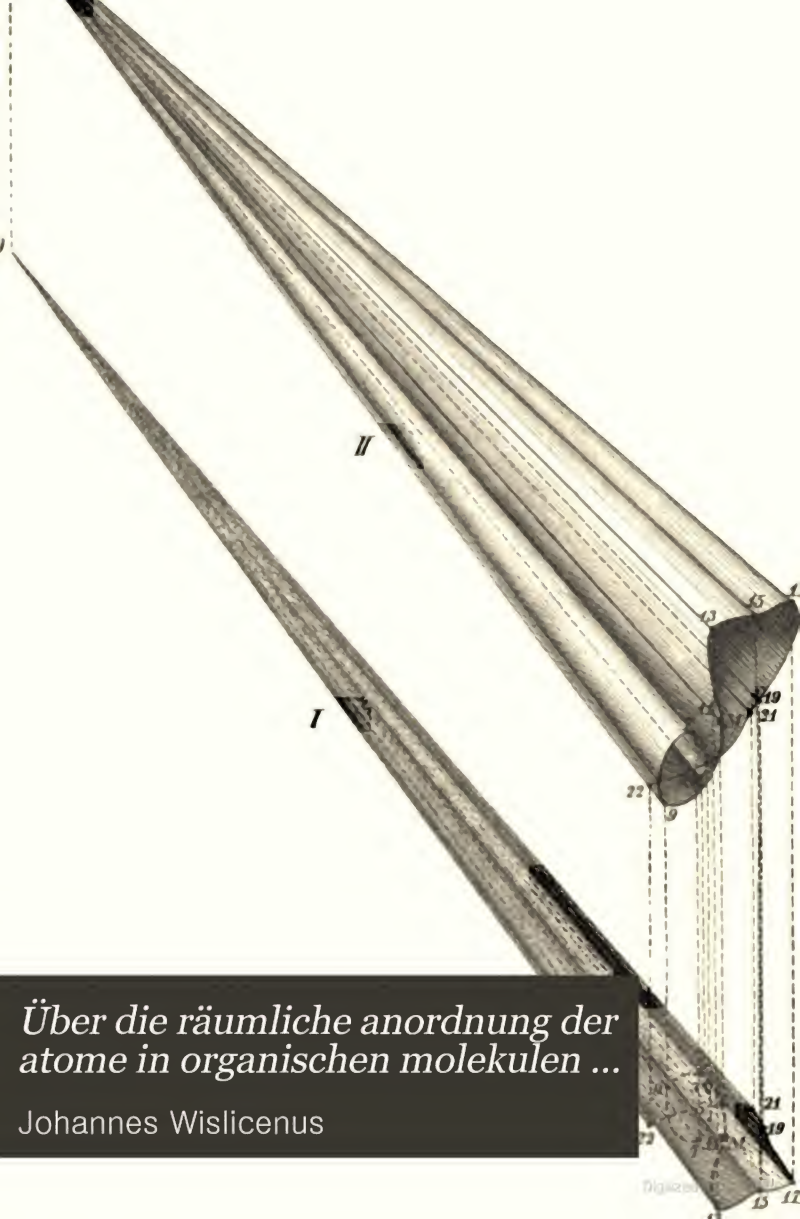


Über die räumliche anordnung der atome in organischen molekulen ...

Johannes Wislicenus





ABHANDLUNGEN

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 54 TAFELN, 1 GEOLOG. KARTE UND 280 FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1888.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



VIERZEHNTER BAND.

MIT 54 TAFELN, 1 GEOLOG. KARTE UND 280 FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1888.

INHALT.

J. Wislicenus, Ueber die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekulen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Figuren . . . . S. 1

W. Braune und O. Fischer, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. 1. Theil: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Theil: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschnitten und 15 Tafeln . . . . - 79

J. P. Mall, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Tafeln . . . . - 151

W. Braune und O. Fischer, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschnitten . . . . - 201

O. Drasch, Untersuchungen über die papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen. Mit 8 Tafeln . . . . - 229

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. Achtzehnte Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrystalle. Mit 3 Tafeln . . . . - 269

W. His, Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen beim menschlichen Embryo. Mit 3 Tafeln und 27 Holzschnitten . . . . - 339

W. Braune und O. Fischer, Ueber den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Tafeln . . . . - 393

G. Heinricius und H. Kronecker, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Mit 5 Tafeln . . . . - 411

J. Walther, Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Tafeln, 1 Lichtdrucktafel und 34 Zinkotypen . . . . S. 437
W. Spalteholz, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Tafeln . . . . - 507
S. Lie, Zur Theorie der Berührungstransformationen . . . . - 535
C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschnitten . . . . - 563

ÜBER DIE
RÄUMLICHE ANORDNUNG DER ATOME
IN ORGANISCHEN MOLEKULEN
UND
IHRE BESTIMMUNG IN GEOMETRISCH-ISOMEREN UNGESÄTTIGTEN VERBINDUNGEN

VON

JOHANNES WISLICENUS,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

MIT 186 FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Vom Verfasser vorgetragen in den Sitzungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 14. November 1886 und 7. Februar 1887; im Manuskript übergeben am 23. März 1887.
Der Abdruck vollendet den 31. Mai 1887.

ÜBER DIE
RÄUMLICHE ANORDNUNG DER ATOME
IN ORGANISCHEN MOLEKULEN
UND
IHRE BESTIMMUNG IN GEOMETRISCH-ISOMEREN UNGESÄTTIGTEN VERBINDUNGEN

VON

JOHANNES WISLICENUS.

I. Einleitung.

§ 1. Seit Veröffentlichung der Theorie vom asymmetrischen Kohlenstoffatome (1874) durch van t'Hoff und gleichzeitig durch Le Bel hat die kurz zuvor[1]) als unvermeidliche Nothwendigkeit erkannte Zurückführung der Verschiedenheit structuridentischer Molekule auf abweichende räumliche Lagerung ihrer, nach gleicher Reihenfolge verketteten, Elementaratome nur geringe Fortschritte gemacht. Dieselben bestanden zunächst in dem Nachweise, dass in der That die optisch activen organischen Verbindungen von bekannter Structur stets asymmetrische Kohlenstoffatome enthalten, dass die Aufhebung der Asymmetrie sofort von einem Verluste der optischen Aktivität begleitet ist[2]), und dass Körper, welche trotz des Besitzes eines asymmetrischen Kohlenstoffatomes optisch inactiv sind, Gemische oder Verbindungen der entgegengesetzten aktiven Modificationen darstellen[3]).

In allerneuester Zeit hat die Theorie wieder einige Erweiterungen erfahren, indem A. v. Baeyer[4]) die auffallenden Verhältnisse zwischen den Wärmewerthen der einfachen, doppelten und dreiwerthigen Bindung zweier Kohlenstoffatome in geistvoller Weise durch die bei mehrwerthiger Vereininigung eintretende Aenderung der Wirkungsrichtungen der Valenzen und damit stattfindende Spannungen erklärte und Wunderlich[5]) den bezüglichen Anschauungen eine bessere mathematische Begründung und Gestaltung mit Erfolg zu geben versuchte.

Ein bereits von van t'Hoff und Le Bel ausgesprochener Gedanke

---

1) J. Wislicenus, Liebig's Annalen 167, 343.

2) Ebenda 220, 146.

3) Le Bel, Comptes rendus 92, 843. Lewkowitsch, Berichte d. d. chem. Ges. 16, 1568. Ladenburg, ebenda 19, 2578.

4) Ebenda 18, 2277.

5) Configuration organischer Molekule, Würzburg 1886.

über die Isomerie gewisser ungesättigter Verbindungen, wie der Fumar- und Maleïnsäure, oder der Kroton- und Isokrotonsäure, ist dagegen bisher ohne wesentliche Frucht geblieben. Allerdings zwangen die damals bekannten Thatsachen noch nicht unbedingt zu geometrischen Erklärungsversuchen, da die Möglichkeit von Structurverschiedenheiten hier noch immer nicht ausgeschlossen war. Die Hoffnung, solche nachweisen zu können, gab augenscheinlich den Hauptanstoss zu jener grossen Untersuchungsreihe über die ungesättigten Verbindungen, welche FITTIG unter Mithülfe seiner Schüler ausgeführt und vom Jahre 1877 an in LIEBIG's Annalen veröffentlicht hat. So reich an wichtigen und überraschenden Ergebnissen dieselbe gewesen ist, so blieb sie doch in Bezug auf das ursprüngliche theoretische Ziel wesentlich ohne Resultat. Wenn auch für die Mehrzahl der sonderbaren Beziehungen zwischen Fumarsäure und Maleïnsäure in der zuerst von KOLBE gemachten Annahme der Existenz von nur zweiwerthig gesättigten und mit zwei Valenzen vollkommen unbeschäftigten Kohlenstoffatomen eine ausreichende Erklärung gefunden werden kann, so weisen doch schon diese beiden Säuren Verhältnisse auf, welche durch die in den Formeln

$$\begin{array}{ll} CH.CO.OH & CH_2.CO.OH \\ \parallel & \mid \\ CH.CO.OH & =C.\ CO.OH \end{array}$$

ausgedrückten Constitutionsverhältnisse durchaus nicht verständlich werden. So geben diese Formeln z. B. nicht die geringste Auskunft darüber, warum die Fumarsäure bei ihrer Oxydation durch Permanganat Traubensäure, die Maleïnsäure dagegen inactive Weinsäure liefert [1]). Aehnliche Versuche der Erklärung von Isomerien bei anderen ungesättigten Verbindungen versagen noch vollständiger, und es bleibt angesichts der FITTIG'schen Untersuchungsreihe nichts übrig als zuzugestehen, dass es isomere Verbindungen — namentlich unter den ungesättigten — giebt, deren Zusammensetzung sich ohne Zweifel durch verschiedene Structurformeln überhaupt nicht ausdrücken lässt.

Zu dieser Ueberzeugung gelangte in neuester Zeit auch ARTHUR MICHAEL [2]), gelegentlich der Entdeckung einer dritten und wahrscheinlich auch vierten Monobromzimmtsäure durch Addition von Brom-

1) Ber. d. d. chem. Ges. XIII, 2150; XIV, 713 und LIEBIG's Annalen 226. 191.
2) Ber. d. d. chem. Ges. 19, 1378, 1381 u. f.

wasserstoff an Phenylpropiolsäure. Da seiner Meinung nach »unsere jetzigen Theorien unfähig sind, diese Art der Isomerie zum Ausdrucke zu bringen«, so sucht er dieselben wenigstens unter einem besonderen Namen, und zwar dem der »Alloisomerie«, zusammenzufassen.

Bald darauf theilte Erlenmeyer[1]) mit, dass er die beiden neuen Monobromzimmtsäuren in Gemeinschaft mit H. Stockmeier bereits vier Jahre zuvor dargestellt habe und dieselben für Polymere der schon bekannten Modificationen halte. Die thatsächlichen Gründe für diese Annahme erwähnt er vorläufig nicht, erklärt aber auch andere, von A. Michael zu den »alloisomeren« gerechnete Körper für Polymeriefälle; so namentlich ist ihm die Fumarsäure »gewiss aus zwei Molekulen Maleïnsäure zusammengesetzt«. Es gelingt Erlenmeyer zwar auf diese Weise eine Möglichkeit der Erklärung scheinbar »abnormer« Isomerieverhältnisse darzuthun und dem gegenüber die Einführung einer neuen auf jede Erklärung verzichtenden Bezeichnung zu vermeiden; aber es gelingt dies doch nur mit Hülfe einer durch die Thatsachen ungenügend gestützten oder ihnen direct widersprechenden Speculation. Die Fumarsäure wenigstens ist, wenn sie auch durch Oxydation in die Traubensäure übergeht, der Maleïnsäure nicht polymer, ganz gewiss nicht waltet ein solches Verhältniss zwischen den Estern, welche bei gleicher — und zwar dem einfachsten möglichen Molekulargewichte entsprechender — Dampfdichte doch alle Verschiedenschiedenheiten der Säuren bewahren.

An geometrische Gründe für diese Isomerien denken Michael und Erlenmeyer entweder nicht[2]), oder sie halten dieselben für so unwahrscheinlich oder so verwerflich, dass sie ihrer keine Erwähnung thun. In gleichem Grade aber wie früher die structur-identischen, optisch

[1]) Ber. d. d. chem. Ges. 19, 1936.

[2]) Nachdem das Manuscript dieser Abhandlung zum Drucke eingereicht war, erschien (Ber. d. d. chem. Ges. 20, 550) eine neue Arbeit von Michael und Browne »Zur Isomerie in der Zimmtsäurereihe«, worin diese Frage allerdings gestreift, aber mit der Bemerkung abgewiesen wird, dass die van t'Hoff'sche Theorie nicht genügend zwischen physikalischer und chemischer Isomerie unterscheide. Der nun folgende Satz (»Es scheint mir eine sehr bedenkliche Annahme u. s. w.«) zeigt, dass Michael zwischen der Gährungs- und Para-Milchsäure etc. nur den Unterschied einer einzigen optischen Eigenschaft gelten lässt, die Abweichungen in den chemischen Eigenschaften, z. B. der Salze, aber ganz vergisst.

differenten Verbindungen zwingen meiner Ueberzeugung nach auch diese Isomeren zu dem Versuche, die Ursache der Abweichungen der chemischen und physikalischen Eigenschaften solcher Verbindungen in räumlich verschiedener Lagerung der nach gleicher Reihenfolge verketteten Elementaratome nachzuweisen.

Dieser Versuch wird im Allgemeinen geglückt sein, wenn es gelingt, den betreffenden Isomeren nicht nur aus irgend einem Grunde plausible räumlich verschiedene aber structuridentische Formeln beizulegen, sondern wenn diese Formeln im weitesten Sinne rationelle sind, d. h. wenn sich aus ihnen die Gesammtheit der auf andere Weise unerklärbaren chemischen, namentlich genetischen Beziehungen als einfache Consequenz ergiebt.

In gegenwärtiger Abhandlung beabsichtige ich zunächst den Nachweis zu führen, dass das vorhandene Beobachtungsmaterial nicht nur vollkommen ausreicht, um diesen Versuch zu rechtfertigen, sondern dass seine Verwerthung im Sinne geometrischer Anschauungen zu einer Theorie führt, welche die bisher als »abnorm« betrachteten Thatsachen in überraschend einfacher Weise erklärt. Wenn der Versuch damit in der That geglückt erscheint, so wird mir in späteren Veröffentlichungen die Aufgabe erwachsen, die aus meiner Theorie sich ergebenden neuen Probleme zu behandeln und zu zeigen, dass die experimentelle Untersuchung die gemachten theoretischen Voraussetzungen in allen wesentlichen Dingen bestätigt.

II. Nothwendige Erweiterung der Theorie von der räumlichen Lagerung der Elementaratome in organischen Verbindungen.

§ 2. Die Ueberzeugung, dass weitaus die meisten Verbindungsmolekule räumliche Gebilde sein müssen, dürfte nie ernsthaft in Zweifel gezogen worden sein, und namentlich werden die Kohlenstoffverbindungen, sofern sie im Ganzen mehr als drei Atome enthalten, als solche allgemein anerkannt werden. Beim heutigen Stande der Chemie kann ferner die Annahme, dass die vier Valenzen des

Kohlenstoffatomes an sich gleichwerthig sind, keinem Widerspruche mehr begegnen. Damit aber ergiebt sich als einfachste geometrische Möglichkeit die Uebereinstimmung der vier Richtungen, in welchen ein Kohlenstoffatom andere Atome anzieht, mit den Richtungen der Lage der vier Ecken des regulären Tetraëders gegen den Mittelpunkt des letzteren. Vier gleichartige Elementaratome sind daher dem sie gemeinschaftlich bindenden Kohlenstoffatome höchst wahrscheinlich nach diesen Richtungen angelagert.

Nicht minder allgemeine Anerkennung wird gegenwärtig der Satz beanspruchen dürfen, dass die mit den einzelnen Valenzen eines Kohlenstoffatomes verbundenen anderen Elementaratome und Atomgruppen nicht ohne besondere Veranlassung ihre Plätze gegeneinander vertauschen können, da die durch Asymmetrie von Kohlenstoffatomen bedingten Isomeren nicht ohne Weiteres in einander übergehen.

Zu diesen auch von A. v. Baeyer adoptirten und am angegebenen Orte formulirten Lehrsätzen müssen jedoch für unsere Zwecke einige weitere Betrachtungen hinzukommen.

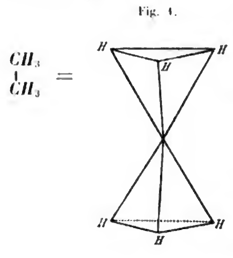
§ 3. Sind zwei Kohlenstoffatome unter dem Aufwande von nur je einer Valenz mit einander, sonst aber mit anderen Elementaratomen oder Atomgruppen verbunden, so müssen die beiden dadurch entstehenden, nur in einer Richtung mit einander vereinigten Systeme um ihre gemeinsame Axe, eben diese in eine Gerade fallenden Richtungen, drehbar sein. Die Drehung wird in Folge der Wärmestösse bald in entgegengesetztem, bald in gleichem Sinne — im letzteren Falle meist mit verschiedener Geschwindigkeit — stattfinden, wenn nicht besondere Ursachen die gegenseitige Stellung beider Systeme absolut fixiren, oder doch die eine vor allen anderen begünstigen und sie dadurch in einem Molekularaggregate zu der numerisch bevorzugteren machen.

Ganz anders ist das Verhältniss der beiden Systeme zu einander, sobald mehrwerthige Bindung der Kohlenstoffatome eintritt. So lange sie besteht, ist eine Rotation der beiden Systeme in entgegengesetztem Sinne, oder wenn in gleichem mit verschiedener Geschwindigkeit, nicht mehr möglich, sondern es können höchstens selbständige Oscillationen um die gemeinschaftliche Axe, welche jetzt zwischen den Richtungen der beiden Bindungspaare liegen muss, stattfinden. Die nicht zur gegenseitigen Verkettung dienenden Bindestellen der

Kohlenstoffatome sind in ihrer gegenseitigen mittleren Stellung dadurch festgelegt.

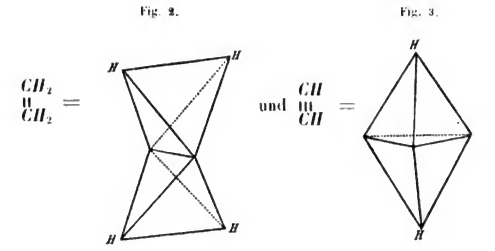
Bei einem doppelt gebundenen Kohlenstoffatompaare, welches im Ganzen vier Anlagerungsstellen für andere Radicale zur Verfügung hat, müssen nun, wie schon VAN T'HOFF ausführte, ausser den möglichen structurverschiedenen Lagerungen noch zwei räumlich verschiedene, aber structuridentische Anordnungen vorhanden sein, sobald jedes dieser Radicale in keiner grösseren als der Zweizahl vorhanden ist.

Fig. 1.

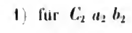


Zur Versinnlichung dieser Verhältnisse genügt die graphische Darstellung der Systeme durch das Tetraëderbild. Dieselben stossen im Falle einwerthiger Verkettung nur mit einer einzigen Ecke zusammen, z. B. Fig. 1, wogegen die doppelte Bindung die beiden Tetraëder mit einer gemeinschaftlichen Kante, die dreiwerthige mit einer gemeinsamen Fläche zeigt; z. B.

Fig. 2. Fig. 3.



§ 4. Im letzteren Falle sind Isomerien nicht möglich; für den der zweiwerthigen Bindung aber ergeben sich die folgenden allgemeinen Isomerielagen:



1) für $C_2\ a_2\ b_2$

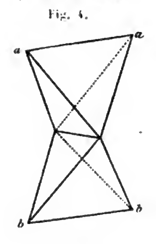


Fig. 4.

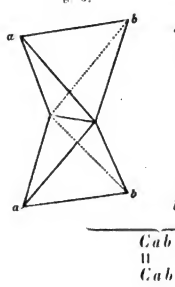


Fig. 5.

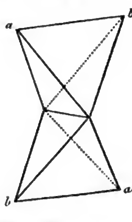


Fig. 6.

$$\begin{array}{c} C a_2 \\ \| \\ C b_2 \end{array} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\begin{array}{c} C a b \\ \| \\ C a b \end{array}}$$

2) für $C_2\ a_2\ b\ c$



Fig. 7.



Fig. 8.

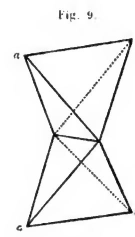
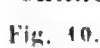


Fig. 9.



$$\begin{array}{c} C a_2 \\ \| \\ C b c \end{array} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\begin{array}{c} C a b \\ \| \\ C a c \end{array}}$$

3) für $C_2\ a\ b\ c\ d$ endlich



$$\begin{array}{c} C a b \\ \| \\ C c d \end{array} =$$

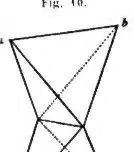


Fig. 10.

und

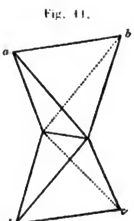
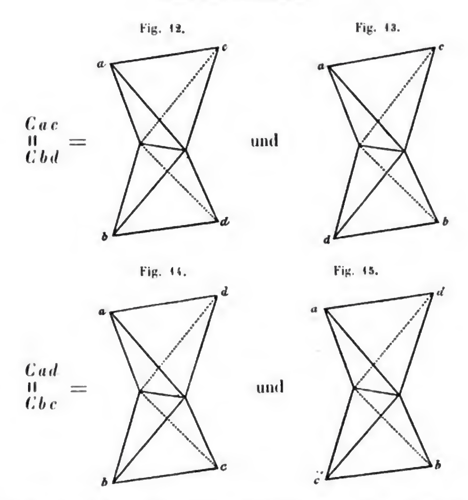


Fig. 11.



so dass hier den drei structurverschiedenen Molekulen noch je zwei räumlich differente zukommen, also im Ganzen **s e c h s** isomere Verbungen existiren müssen.

§ 5. Uebrigens bedarf man zur Bezeichnung dieser Verhältnisse der Bildersymbole nicht einmal, sondern kann sie durch blosse Buchstabenformeln ersetzen, wenn man dahin übereinkommt, in Zukunft mit den Ausdrücken

$$1)\quad \begin{matrix} a.C.a \\ \| \\ b.C.b \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ a.C.b \end{matrix} \quad \begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ b.C.a \end{matrix}} \qquad\qquad 2)\quad \begin{matrix} a.C.a \\ \| \\ b.C.c \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ a.C.c \end{matrix} \quad \begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ c.C.a \end{matrix}}$$

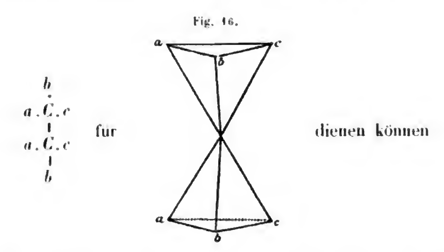
$$3)\quad \underbrace{\begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ c.C.d \end{matrix} \quad \begin{matrix} a.C.b \\ \| \\ d.C.c \end{matrix}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} a.C.c \\ \| \\ b.C.d \end{matrix} \quad \begin{matrix} a.C.c \\ \| \\ d.C.b \end{matrix}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} a.C.d \\ \| \\ b.C.c \end{matrix} \quad \begin{matrix} a.C.d \\ \| \\ c.C.b \end{matrix}}$$

nicht nur die Structur, d. h. die Reihenfolge der gegenseitigen Bindung, sondern im obigen Sinne die verschiedene räumliche Anordnung zu beiden Seiten der den Kohlenstoff-Atomsystemen gemeinschaftlichen Axe verstehen zu wollen, und damit den oben mit

einander verklammerten Ausdrücken verschiedene geometrische Bedeutung zuerkennt.

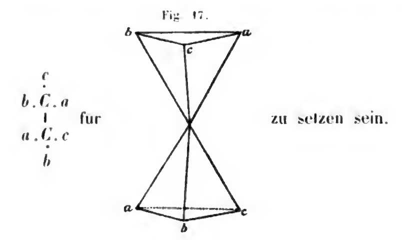
Etwas weniger in die Augen springend wird eine solche Anwendung von Buchstabensymbolen für die graphischen Formeln bei nur einwerthiger Verkettung zweier Systeme; doch lässt sie sich noch immer durchführen, wenn man den Stellen der im folgenden Ausdrucke gleichen Buchstaben auch gleiche Richtung in der Lage ihrer Bindestellen gegen die gemeinschaftliche Axe anweist. So wird

Fig. 16.



und im Falle einer Drehung des einen Systemes gegen das andere

Fig. 17.

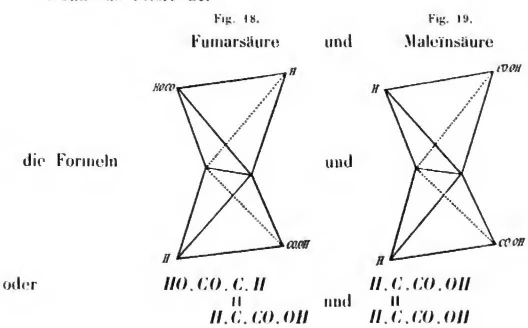


§ 6. Die in der angeführten Weise entwickelbaren stereometrischen Formeln reichen ihrer Zahl nach vollkommen aus, um die Constitutionsverschiedenheiten der »abnormen« Isomeren zu bezeichnen; es fragt sich nur, ob sich Mittel finden, um festzustellen, welches der möglichen Symbole jeder einzelnen Modification zukommt.

Wenn van 't Hoff der

Fig. 18. Fumarsäure und Fig. 19. Maleïnsäure

die Formeln



und

oder

$$\begin{matrix} HO.CO.C.H \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} H.C.CO.OH \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix}$$

beilegt, so lässt er sich von der Erwägung leiten, dass die beim Erwärmen leicht in ihr Anhydrid übergehende Maleïnsäure ihre beiden Carboxylgruppen ohne Zweifel in grösserer Nähe zu einander enthalten wird als die Fumarsäure, welche kein entsprechendes Anhydrid bildet, sondern beim Erhitzen wesentlich unverändert sublimirt.

Bei der Krotonsäure und Isokrotonsäure aber ist die Entscheidung zwischen den beiden Raumformeln

$$\begin{matrix} H.C.CH_3 \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} CH_3.C.H \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix}$$

schon nicht so leicht zu treffen, und ebensowenig existirte bisher ein Mittel, um jeder der bekannten vier Monobromzimmtsäuren mit Sicherheit das betreffende der vier Symbole

$$\underbrace{\begin{matrix} H.C.C_6H_5 \\ \| \\ Br.C.CO.OH \end{matrix} \quad \begin{matrix} C_6H_5.C.H \\ \| \\ Br.C.CO.OH \end{matrix}}_{\alpha\text{-Bromzimmtsäuren}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} Br.C.C_6H_5 \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix} \quad \begin{matrix} C_6H_5.C.Br. \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{matrix}}_{\beta\text{-Bromzimmtsäuren}}$$

zuzuweisen.

Dieses Mittel ergiebt sich jedoch von selbst, wenn man alle Vorgänge der Bildung ungesättigter geometrisch-isomerer Verbindungen sowie diejenigen ihrer Verwandlungen in einander am körperlichen Modell, oder doch mit steter Berücksichtigung der geometrischen Verhältnisse, verfolgt.

§ 7. Zunächst liegt es auf der Hand, dass beim Uebergange einer dreiwerthigen Bindung zweier Kohlenstoffatome in die zweiwerthige, vorausgesetzt dass kein anderer Vorgang als der der einfachen Addition und der Lösung nur eines der drei Valenzenpaare erfolgt, die zwei von vornherein an die Kohlenstoffatome angelagerten Radicale auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Axe beider Systeme fallen müssen, denn es kann

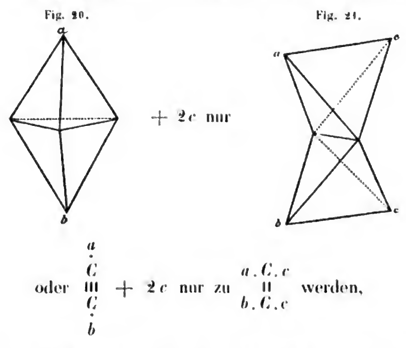


Fig. 20. Fig. 21.

oder $\begin{matrix} a \\ \cdot \\ C \\ ||| \\ C \\ \cdot \\ b \end{matrix}$ + 2c nur zu $\begin{matrix} a\,.\,C\,.\,c \\ || \\ b\,.\,C\,.\,c \end{matrix}$ werden,

so lange als die gegenseitige Bindung der beiden andern Valenzpaare nicht geändert wird. Dieses Mittel erlaubt jedoch nur eine verhältnissmässig seltene Anwendung.

§ 8. Ungleich häufiger entstehen ungesättigte geometrischisomere Körper aus gesättigten Verbindungen, indem jedem der beiden einwerthig vereinigten Kohlenstoffatome ein einwerthig gebundenes Radical entzogen wird, worauf die dadurch frei werdenden Bindestellen sich aneinander schliessen. Die so merkwürdigen, bisher gar nicht unter einem Gesichtspunkt zusammenfassbaren Uebergänge structuridentischer aber doch verschiedener Modificationen vollziehen sich in analoger Weise, indem die erste ungesättigte Verbindung durch Addition zweier Radicale in eine gesättigte übergeht, und letztere durch darauf folgenden Austritt ebenso vieler Reste wieder zur ungesättigten wird. So z. B. kann die Umwandlung von Maleïnsäure in Fumarsäure bei Einwirkung von concentrirten Halogenwasserstoffsäuren nur dadurch erfolgen, dass ein Molekul der letzteren

sich mit Maleïnsäure zu monohalogensubstituirter Bernsteinsäure verbindet und hierauf, namentlich wenn etwas Wasser zugegen ist, wieder eine Abspaltung von Halogenwasserstoff erfolgt:

$$C_2H_2(CO.OH)_2 + HBr = C_2H_3Br.(CO.OH)_2 = HBr + C_2H_2(CO.OH)_2.$$

Maleïnsäure Brombernsteinsäure Fumarsäure

Damit wird auch verständlich, dass eine kleine Quantität genügend concentrirter Bromwasserstoffsäure wie ein Ferment grosse Mengen von Maleïnsäure in Fumarsäure überführt.

§ 9. In der gesättigten Verbindung nun ist die Aenderung der Lage der Radicale durch Drehung des einen Systemes gegen das andere möglich. Diese Drehung aber muss, wenn bei einer späteren Zersetzung immer dasselbe Product entsteht, eine gesetzmässige sein und kann durch nichts anderes als die specifischen Anziehungsgrössen zwischen den mit dem Kohlenstoffatompaare verbundenen Radicalen bedingt werden.

Sind die sechs an ein solches Kohlenstoff-Atompaar gebundenen Radicale von gleicher Art, so werden die selbständigen Rotationen beider Systeme im wesentlichen anstandslos unter dem Einflusse von Wärmestössen vor sich gehen — anders dagegen, wenn an beiden Atomen verschiedenartige Radicale lagern. Hierbei wird allerdings eine Voraussetzung gemacht werden müssen, nämlich die, dass die in einem Verbindungsmolekule auch nicht direct miteinander vereinigten Elementaratome noch anziehend — und zwar nicht nur gravitirend, sondern chemisch anziehend — auf einander wirken.

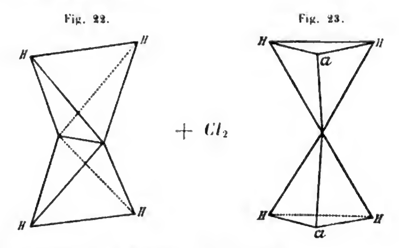
§ 10. Diese Voraussetzung aber lässt sich auch aus anderen thatsächlichen Gründen nicht ablehnen: sie ist gerade so nothwendig, wie die Annahme gegenseitiger chemischer Einwirkung zwischen den Atomen sich nahe tretender verschiedenartiger Molekule als Ursache der chemischen Umsetzungen zwischen solchen. Wenn sie nicht existirte, wären Dissociationsvorgänge unmöglich, ebenso alle innermolekularen Umwandlungen und die ganze Summe von thatsächlichen Aenderungen der Substituirbarkeit einzelner Elementaratome infolge des Vorhandenseins gewisser anderer — also aller jener Processe, bei welchen durch einen ersten Substituenten die specifische Orientirung eines zweiten nach bestimmtem chemischen Orte stattfindet.

Die gegenseitigen innermolekularen Einwirkungen nicht direct mit einander verbundener Elementaratome

müssen aber dieselbe Ursache haben wie die Wirkungen verschiedenen Molekulen angehörender Atome auf einander, es sind die Wirkungen der specifischen Affinitäten.

Unter dem Einflusse derselben muss die Drehung der beiden einwerthig mit einander verbundenen Kohlenstoffsysteme, deren jedes zwei verschiedene Arten von Radicalen bindet, in der Weise erfolgen, dass die mit den grösseren Affinitäten auf einander wirkenden Elementaratome sich einander möglichst nähern und ihre Richtungen zur gemeinschaftlichen Axe zunächst parallel werden.

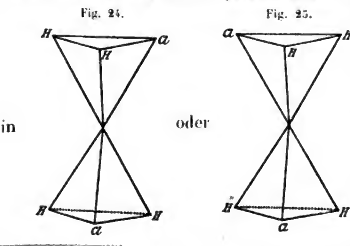
So z. B. wird für das Aethylendichlorür die bei seiner Entstehung aus ölbildendem und Chlor-Gase zuerst eintretende Configuration[1]) des Molekules



infolge des bekannten Affinitätenverhältnisses

$$H : H + H : H + Cl : Cl < H : H + 2\,(H : Cl)$$

unter Drehung des einen Systemes gegen das andere



in ... oder ... übergehen müssen. Beide aber sind identisch.

§ 11. Es soll indessen keineswegs gesagt sein, dass diese Lage eine absolut stabile sei. Wärmestösse von geringer Intensität werden allerdings nur Schwin-

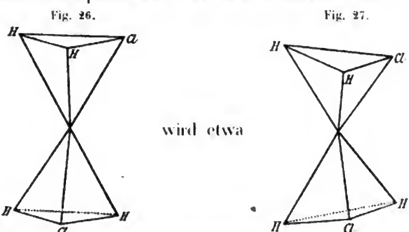
1) Der Ausdruck Configuration wurde von Wunderlich vorgeschlagen.

gungen der Systeme um diese den wirksamsten Affinitäten entsprechende Lage veranlassen; energischere Stösse dagegen, welche die richtenden Anziehungen zu überwinden vermögen, werden Rotationen des einen Systemes gegen das andere zur Folge haben. In einem Molekularaggregate müssen daher bei genügend hoher Temperatur immer Configurationen vorkommen, welche den grössten Anziehungen nicht entsprechen. Ihre Zahl wird mit steigender Mitteltemperatur der Masse wachsen. Stets aber werden die durch die stärksten anziehenden Kräfte bedingten Lagen die bevorzugteren, und selbst bei hohen Temperaturen in grösserer Anzahl vorhanden sein, als jede der nur durch die Wärmestösse veranlassten Configurationen.

§ 12. Es soll hier ein Umstand nicht mit Stillschweigen übergangen werden, der — wenn auch für die Anwendung der oben entwickelten Hypothese auf die bekannten chemischen Thatsachen vorläufig ohne hervorragende Bedeutung — doch die Gestalt der Molekule wesentlich beeinflussen und damit für die Krystallform organischer Verbindungen bestimmend werden kann.

Wirken die vier mit einem einzigen Kohlenstoffatome verbundenen Radicale mit ungleichgradiger Affinität auf einander ein, so werden die Bindestellen Aenderungen ihrer Lage erfahren müssen. Das Modell des Kohlenstoffsystemes ist dann nicht mehr das reguläre Tetraëder, wie schon von VAN T'HOFF[1]) ausgeführt wurde. Solche Verschiebungen werden auch stattfinden, wenn analoge Affinitätsverhältnisse zwischen den an zwei mit einander verbundenen Kohlenstoffatomen gelagerten Radicalen obwalten, und zwar in dem Sinne, dass die mit stärkeren Affinitäten ausgerüsteten Atompaare sich noch weiter nähern. Aus

Fig. 26. Fig. 27.



1) Die Lagerung der Atome im Raume, bearb. v. HERRMANN. Braunschweig 1877, S. 17. Vgl. ausserdem § 58.

§ 13. Um in dem folgenden speciellen Theile nicht zu überflüssigen Wiederholungen genöthigt zu sein, muss ich noch einen Punkt von allgemeiner Bedeutung hervorheben.

Wenn eine ungesättigte Verbindung mit zweiwerthig verkuppeltem Kohlenstoffpaare in eine gesättigte übergeht, so kann die Addition der hinzutretenden beiden Radicale an jeder der beiden Bindestellen, die einander zunächst geometrisch gleichwerthig sind, stattfinden. Diese Gleichwerthigkeit ist eine vollkommene, wenn jedes der beiden Kohlenstoffatome weiter mit zwei gleichartigen Radicalen vereinigt ist, so dass durch Lösung der einen (1 . 1′ in Fig. 28) oder der anderen (2 . 2′) Bindung immer geometrisch identische Configurationen hervorgerufen werden. So wird

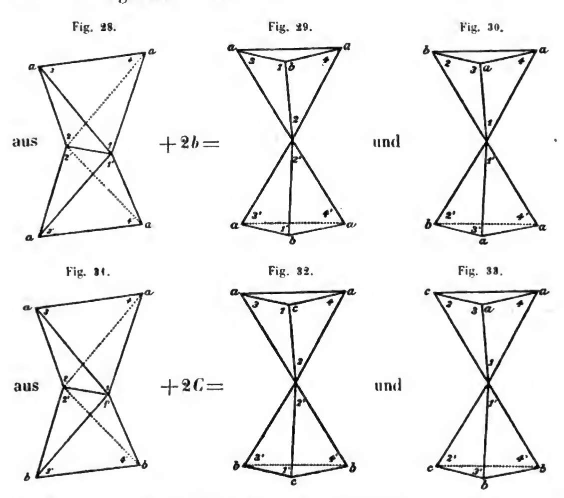


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.
Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33.

Die Körper Fig. 29 und Fig. 30 sind geometrisch identisch und nur von verschiedenen Seiten betrachtet, ebenso Fig. 32 und Fig. 33.

Anders ist der Erfolg, wenn mindestens das eine der beiden Kohlenstoffatome mit zwei verschiedenen Radicalen verbunden war und durch die Addition ein drittes hinzukommt. Es wird dann zu

einem asymmetrischen, und nun ergeben sich — da jede der beiden Bindestellen gleich gut wie die andere zur Addition geeignet ist — die entgegengesetzten Folgen in der Anordnung der einzelnen Radicale, d. h. es entstehen Körper, die sich nicht gegenseitig decken können, sondern Spiegelbilder von einander sind:

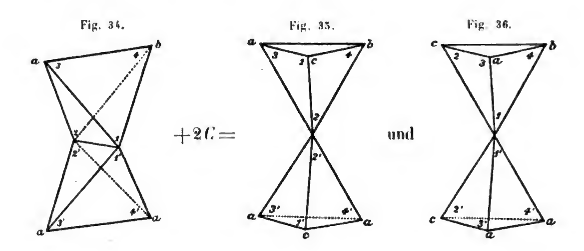
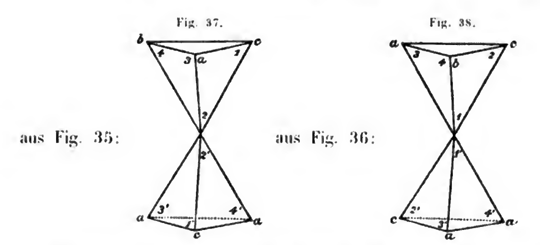


Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36.

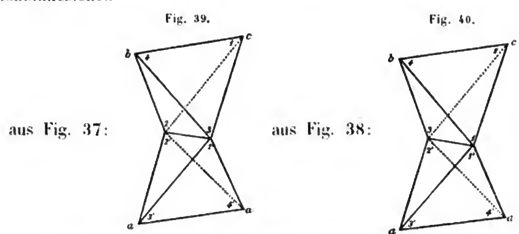
Es ist nämlich in Fig. 35 die Folge $a:b:c$ linksläufig, in Fig. 36 dagegen rechtsläufig. Wenn nun entgegengesetztläufige Folgen der gleichen, mit asymmetrischen Kohlenstoffatomen verbundenen Radicale entgegengesetzte optische Activität bedingen, so erklärt sich hieraus sofort, warum man durch solche Reactionen nie Producte gewinnt, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen, denn die rechts- und linksdrehende Modification entstehen nebeneinander in gleichen Mengen.

§ 14. Folgt auf den Uebergang einer ungesättigten in eine gesättigte Verbindung die Rückbildung einer ungesättigten unter Austritt von zwei Radicalen, so ist die Art der Asymmetrie ohne Einfluss auf die Configuration des Productes; es ist also in diesem Falle gleichgültig, welche der beiden Bindestellen der ersten ungesättigten Verbindung bei der Addition gelöst wird. Optisch entgegengesetzt wirkende Modificationen liefern identische Producte, wenn sie unter Verlust des gleichen der an das asymmetrische Kohlenstoffatom gelagerten Radicale in ungesättigte Verbindungen übergehen.

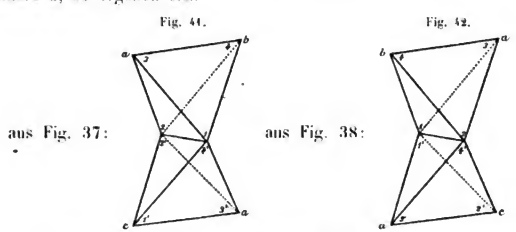
Bei Vorhandensein von besonders energisch richtenden Affinitäten von a und c würden durch Drehung sich ergeben



Werden nun *a* des asymmetrischen Systemes und *c* vom anderen abgespalten, so entstehen durch Vereinigung der frei werdenden Kohlenstoffbindestellen



Verliert dagegen das asymmetrische System das Radical *c*, das andere *a*, so ergeben sich



Die Bilder Fig. 39 und 40 lassen direct die Identität der Configurationen erkennen; Fig. 41 und 42 erscheinen zwar auf den ersten Blick verschieden, sind aber nichts als die Ansichten zweier geometrisch identischer Körper von entgegengesetzten Seiten her.

§ 15. Späterhin wird öfters bei Gelegenheit der Besprechung ungesättigter Verbindungen, welche zweiwerthig verkuppelte Kohlenstoffatome enthalten, von den hier auftretenden Symmetrielagen die Rede sein müssen. Um nicht jedesmal gezwungen zu sein, sie graphisch darzustellen, empfiehlt es sich, für dieselben besondere Bezeichnungen einzuführen, bei deren Wahl ich mich des Rathes meines Schwagers, des Professors der Mathematik an der Universität zu Strassburg, Dr. Th. REYE zu erfreuen hatte.

Die einfachsten Fälle geometrischer Isomerie ungesättigter Verbindungen ergeben sich dann, wenn jedes der beiden zweiwerthig verkuppelten Kohlenstoffatome mit denselben beiden unter sich verschiedenen Radicalen verbunden ist. Solche Körper von der allgemeinen Formel

$$\begin{array}{c} Cab \\ \| \\ Cab \end{array}$$

werden im Gegensatze zu den structur-isomeren

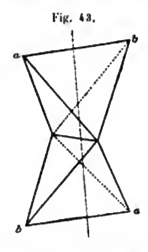
$$\begin{array}{c} Caa \\ \| \\ Cbb \end{array}$$

schon längst symmetrische genannt. Die Lagen der beiden vier Atome a und b sind in der That auch geometrisch symmetrische, jedoch in verschiedener Weise. Bei der Configuration

$$\begin{array}{c} a.C.b \\ \| \\ b.C.a \end{array}$$

liegen die gleichartigen Radicale symmetrisch zum gemeinschaftlichen Schwerpunkte und zur gemeinschaftlichen Axe beider Systeme,

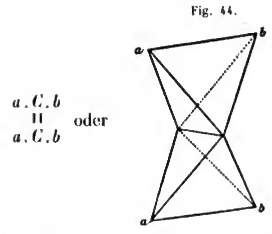
Fig. 43.



ihre Lagen sind daher centrisch- oder axialsymmetrische.

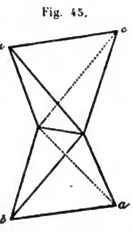
Bei der zweiten Configuration

Fig. 14.



dagegen liegt $a:a$ und $b:b$ zum Mittelpunkte oder zur gemeinschaftlichen Axe nicht symmetrisch, wohl aber zu einer Ebene, welche durch die beiden Bindestellen des Kohlenstoffatompaares senkrecht zur Axe gelegt werden kann. Sie sind deshalb als **plansymmetrisch** zu bezeichnen.

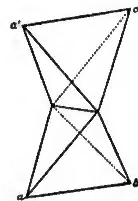
Fig. 15.



Die Ausdrücke, **centrisch-** oder **axialsymmetrisch** und **plansymmetrisch** können übrigens nicht nur für die an den betreffenden Stellen gebundenen gleichartigen Radicale selbst, sondern auch für die Stellen oder Lagen an sich gebraucht werden, so dass man z. B. in einer Verbindung

die Lagen nicht nur von $a' . a$, sondern auch von $b : c$ als centrisch- oder axialsymmetrische, in

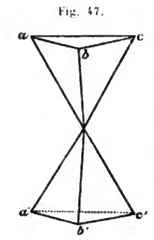
Fig. 16.



dagegen als plansymmetrische, und $a' : b$ sowie $a : c$ als axialsymmetrische bezeichnen kann.

§ 16. **Correspondirende** Lagen oder Stellen dagegen mögen im Folgenden diejenigen genannt werden, welche zur gemeinschaftlichen Axe eines Doppelsystemes in gleicher Richtung liegen, von welchen Senkrechte zur Axe einander daher parallel sind. In

Fig. 47.



correspondiren demnach die Stellen *a* und *a'*, *b* und *b'*, *c* und *c'*; in doppelt verkuppelten Systemen sind die plansymmetrischen Lagen zugleich die correspondirenden.

III. Specieller Theil.

Die Hypothese in ihrer Anwendung auf einzelne Gruppen chemischer Thatsachen.

§ 17. Im Folgenden wird zu zeigen sein, wie die im vorigen Abschnitte entwickelte Erweiterung der Theorie von der räumlichen Lagerung der Elementaratome, welche sich mir bei der Verfolgung der Bildung einzelner geometrisch-isomerer ungesättigter Verbindungen am Modell ergab, nicht nur die bisher unverständlichen analogen Vorgänge von einem einzigen Gesichtspunkte aus vollständig aufklärt, sondern auch auf eine Reihe anderer, bisher ganz dunkler chemischer Processe helles Licht wirft.

In erster Linie sind die relativ einfacheren Vorgänge zu besprechen, bei welchen die Lagerungsverhältnisse und die chemische Natur der nur zwei direct untereinander verbundenen Kohlenstoffatom-Systemen angehörenden einfachen oder zusammengesetzten Radicale in Betracht kommen; an sie wird die Betrachtung solcher Processe anzuschliessen sein, bei welchen die Verhältnisse von drei oder mehr Systemen von ursächlicher Bedeutung sind.

A. Die räumlichen Lagerungsverhältnisse der Atome in Doppel-Systemen.

1. Die ungesättigten Kohlenwasserstoffe und ihre Substitutionsproducte.

§ 18. Die beiden Tolandichlorüre und Tolandibromüre. — Im Jahre 1871 wurden gleichzeitig von Zinin[1]) und

[1]) Ber. d. d. chem. Ges. 4, 288.

von Limpricht und Schwanert[1]) zwei isomere Tolandichlorüre erhalten, indem ersterer das aus Benzil und fünffach Chlorphosphor dargestellte Tolantetrachlorid in alkoholischer Lösung mit Zink kochte, die beiden letzteren dagegen Stilben mit Phosphorpentachlorid auf 170° erhitzten. Die in weitaus vorwiegender Menge entstehende Verbindung ist in Alkohol sehr leicht löslich und krystallisirt in Nadeln von 63° Schmelzp., wogegen das in geringerer Quantität auftretende, in Alkohol beträchtlich schwerer lösliche Isomere bei 153° schmelzende Tafeln bildet.

Liebermann und Homeyer[2]) gelangten zu denselben Resultaten, als sie Tolantetrachlorid, welches beim Einleiten von Chlor in siedendes Toluol in grossen Mengen entstanden war, mit Alkohol und Zinkstaub kochten. Beide Dichlorüre gewann ferner Hanhart[3]) beim Erhitzen von unverdünntem Benzotrichlorid mit Kupferpulver und Onufrowicz[4]), als er das aus Benzotrichlorid und Kupfer zunächst entstehende Tolantetrachlorid mit Eisenpulver und Essigsäure in Reaction brachte. Dabei erhielt er auf 1 Theil der bei 153° schmelzenden Tafeln 5 Theile der leichter löslichen Nadeln von 63° Schmelzpunkt.

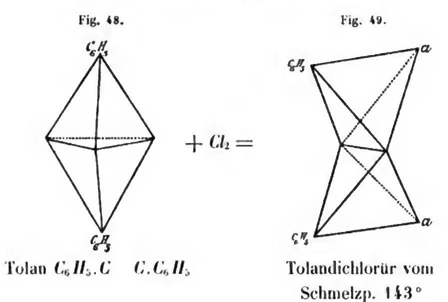
Als Liebermann und Homeyer[5]) dagegen Chlorgas zu in Chloroform gelöstem Tolan leiteten, gewannen sie nur das hochschmelzende Tolandichlorür, für welches sie den Schmelzpunkt 143° angeben.

Alle diese, durch die bisherigen Theorien nicht erklärbaren Thatsachen werden durch die oben angestellten Erwägungen als nothwendige Consequenzen der neuen Hypothese durchaus verständlich.

Nach § 7 muss das bei 143° schmelzende Tolandichlorür, wenn es das Product einfacher Chloraddition an Tolan ist, das plansymmetrische sein:

1) Ber. d. d. chem. Ges. 4. 379.
2) Ebenda, 12, 1971 (1879).
3) Ebenda 15, 898 (1882).
4) Ebenda 17, 833 (1884).
5) a. a. O S. 1974.

Fig. 48. Fig. 49.

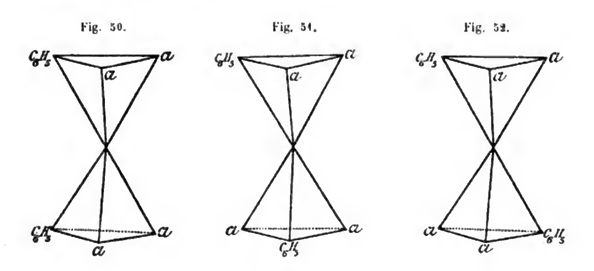


Tolan $C_6H_5.C$ $C.C_6H_5$

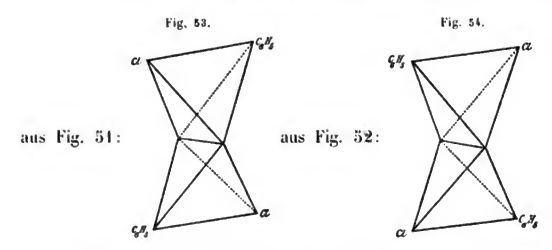
Tolandichlorür vom Schmelzp. 143°

Das aus Tolantetrachlorid durch Chlorentziehung entstehende Isomere muss dann als das axialsymmetrische angesprochen werden. Zu demselben Resultate betreffs des letzteren führt überdies die Anwendung von § 10 auf das Tolantetrachlorid. Von den für dasselbe möglichen Configurationen

Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52.



sind diejenigen, welche Fig. 51 und Fig. 52 entsprechen, die weitaus mehr begünstigten, als die in Fig. 50 dargestellte. Beide enthalten zwei Chloratome an correspondirenden Stellen, welche — unter Zusammenschluss der letzteren — an Metall abgegeben werden können. Dabei muss



d. h. aus beiden ein und dasselbe centrisch-symmetrische Tolandichlorür (Schmelzpunkt 68°) als der Menge nach weitaus überwiegendes Product entstehen. Da aber gleichzeitig eine gewisse, mit steigender Temperatur wachsende Anzahl von Molekulen der weniger begünstigten Configuration Fig. 50 (nach § 11) zugegen sein wird, so bildet sich in geringeren Mengen auch das bei 143° schmelzende plansymmetrische Dichlorür.

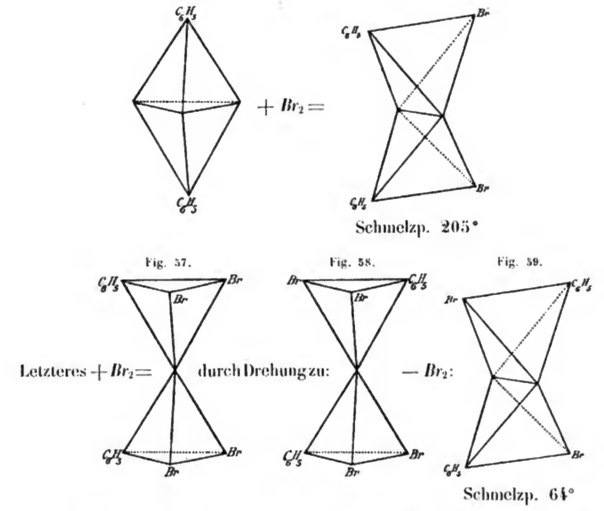
§ 19. Tolandibromüre sind aus dem Tetrabromür bisher nicht dargestellt worden, dagegen erhielten Limpricht und Schwanert[1]) beim Vermischen einer ätherischen Tolanlösung mit Brom zwei Dibromüre, nämlich

1) schwer lösliche Schüppchen von 200°—205° Schmelzpunkt in grosser und

2) leichter lösliche Nadeln von 64° Schmelzpunkt in viel geringerer Menge. Zu demselben Ergebnisse gelangten Liebermann und Homeyer[2]), als sie anstatt der ätherischen Lösung eine solche in Schwefelkohlenstoff anwendeten.

Das schwer lösliche und hochschmelzende Dibromür ist auch hier wieder das plansymmetrische, durch directe Addition entstandene. Das gleichzeitig gebildete axialsymmetrische (64° Schmelzp.) dagegen setzt die vorübergehende Existenz von Tolantetrabromür voraus, welches beim Zusammentreffen des plansymmetrischen Dibromürs mit Brom entsteht und nach Herstellung der begünstigteren Lage wieder zwei Bromatome an noch vorhandenes Tolan abgiebt:

1) Ber. d. d. chem. Ges. 4, 379.
2) Ebenda 12, 1974.



Im Beginne des Bromzusatzes zu Tolanlösung wird sich nur das directe Additionsproduct bilden und erst später, wenn die unverbundenen Tolanmolekule seltener werden, ein Theil derselben in Tetrabromür und dieses durch Abgabe der Hälfte seiner Bromatome an begegnende Tolanmolekule zu dem axial-symmetrischen Isomeren werden.

§ 20. Geometrische Isomerien der ungesättigten Kohlenwasserstoffe der Fettgruppe sind bisher nicht beobachtet worden. Auch für ihre Halogensubstitutionsproducte fehlen noch alle Gründe solche anzunehmen, mit Ausnahme der disubstituirten Aethylene.

Wenn die Beobachtung von TAWILDAROFF[1]) richtig wäre, dass die Zersetzung von Bromäthylendibromür mit alkoholischer Kalilösung ausser dem bei 91° siedenden unsymmetrischen Dibromäthylen eine

1) LIEBIG's Annalen 176, 22.

isomere, bei 157° siedende Verbindung liefert, so müsste in dieser ein symmetrisches Dibromäthylen vorliegen, welches mit dem aus Acetylen dargestellten von 108°—110° Siedepunkt[1]) geometrisch isomer sein würde. Ohne Zweifel aber ist nach meinen an anderer Stelle zu veröffentlichenden Beobachtungen jene bei 157° siedende Verbindung im Wesentlichen nichts anderes als Bromacetylbromid, welches aus dem unsymmetrischen Dibromäthylen durch directe Sauerstoffaufnahme entsteht[2]). Dafür spricht auch die Dampfdichte, welche von Sabanejew zu 6,97 gefunden wurde, während Dibromäthylen nur 6,43, Bromacetylbromür dagegen fast genau den beobachteten Werth — nämlich 6,98 — verlangt.

Dagegen existiren ohne Zweifel zwei verschiedene symmetrische Dijodäthylene, beides Producte der Einwirkung von Acetylen auf Jod. Sabanejew[3]) beobachtete hierbei die Bildung einer flüssigen neben einer festen Verbindung. Letztere schmilzt bei 73° und siedet unverändert bei 192°, während das flüssige Isomere erst unterhalb 0° erstarrt und selbst mit Wasserdämpfen nicht unverändert flüchtig ist. Danach ist die letztere Verbindung möglicherweise das plansymmetrische Acetylendijodür, das Product der directen Addition von zwei Jodatomen an das Acetylen, denn ein solches muss nach dem allgemeinen Verhalten der Verbindungen, welche Jodatome an benachbarten Kohlenstoffatomen enthalten, sehr unbeständig sein. Das feste, unverändert destillirende Acetylendijodür dagegen würde als das centrisch-symmetrische ungleich beständiger sein müssen und aus dem flüssigen durch vorübergehende Bildung von Tetrajodür in ähnlicher Weise wie das centrisch-symmetrische Tolandibromür (voriger §) entstehen. Eine eingehende Untersuchung dieser Verhältnisse ist in meinem Laboratorium im Gange.

2. Fumarsäure, Maleïnsäure und ihre Derivate.

§ 21. Die ungemein verwickelt erscheinenden und bisher ganz unverständlich gebliebenen Beziehungen zwischen der Fumarsäure und Maleïnsäure bieten im Lichte der neuen Theorie keine Räthsel mehr. Die überwiegende Zahl ergiebt sich aus ihr ohne weiteres, und nur wenige der bekannten Thatsachen verlangen die Annahme

1) Sabanejew, Liebig's Annalen 178, 116 und 216, 252.

2) Demole, Ber. d. d. chem. Ges. 11, 316.

3) Liebig's Annalen 178, 118.

von Zwischenvorgängen, für deren wirklichen Verlauf ich in einer besonderen Mittheilung demnächst die experimentellen Beweise geben werde.

§ 22. a) Schon die Entstehung der Fumarsäure und Maleïnsäure aus der Aepfelsäure und die Aenderung der relativen Ausbeuten je nach der bei Zersetzung der Aepfelsäure eingehaltenen Temperatur erklärt sich vollkommen und nur durch geometrische Betrachtungen.

Wird Aepfelsäure nicht höher als bis auf 150° im Oelbade erhitzt, so resultirt fast nur Fumarsäure, deren Bildung der bevorzugten Configuration (§ 11) der Aepfelsäure entspricht:

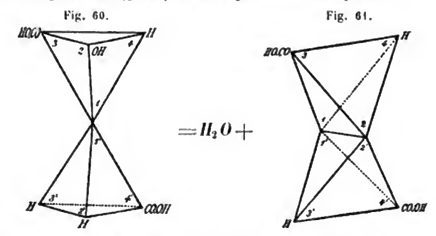


Fig. 60. Fig. 61.

Die Maleïnsäure oder ihr Anhydrid dagegen kann nur entstehen, wenn die beiden Systeme die weniger bevorzugte Lage Fig. 62 gegen einander einnehmen:

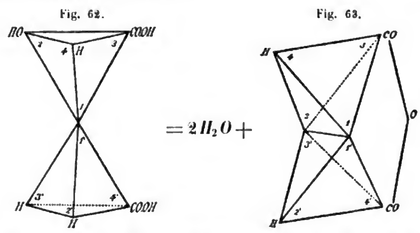
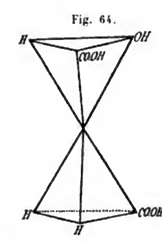


Fig. 62. Fig. 63.

wobei es gleichgültig ist, ob Maleïnsäure selbst und aus dieser ihr Anhydrid, oder erst Aepfelsäureanhydrid und aus ihm Maleïnsäureanhydrid gebildet wird. Aus der zweiten möglichen weniger bevorzugten Lage

Fig. 64.



kann überhaupt keine ungesättigte zweibasische Säure abgeleitet werden. Nach den in § 11 entwickelten Gesichtspunkten ergiebt sich nun in Uebereinstimmung mit den Thatsachen ferner, dass — da bei höherer Temperatur die weniger bevorzugten Lagen in einer Masse von Aepfelsäuremolekulen bedeutend zahlreicher als bei niederer vorhanden sein müssen — stärkeres Erhitzen auch mehr Maleïnsäureanhydrid unter den Producten auftreten lässt. Erwärmt man Aepfelsäure von vornherein auf 170°—180°, so ist die Ausbeute an letzterem in der That schon eine nicht unbeträchtliche; — sie wird wesentlich noch gesteigert, wenn die Temperatur des Oelbades schnell auf 200° gebracht und auf dieser Höhe gehalten wird. Nie aber erreicht sie die Hälfte des theoretischen Betrages, sondern es bleibt eine noch immer bedeutendere Quantität von Fumarsäure zurück, wenn die Temperatur nicht etwa ausreicht, um letztere unverändert zu verflüchtigen oder zu zersetzen.

Ist durch irgend eine Ursache die Aepfelsäure anhydrisirt — was ebenfalls nur bei der weniger begünstigten Configuration Fig. 62 geschehen kann —, so ist die Lage der Systeme fixirt, und bei weiterer Zersetzung kann sich nur Maleïnsäureanhydrid bilden. So erhält man letzteres allein aus dem Anhydrid der Essigester- Aepfelsäure [1]), und aus denselben Gründen liefern die Anhydride halogensubstituirter Bernsteinsäuren diejenigen der Maleïnsäure und ihrer Substitutionsproducte [2]).

§ 23. b) Maleïnsäure verwandelt sich beim Zusammentreffen mit starken Säuren — am schnellsten mit den Halogenwasserstoffsäuren — fast quantitativ in Fumarsäure [3]), letztere dagegen bleibt unter denselben Umständen unverändert oder bildet mit rauchender Chlor- und Bromwasserstoffsäure monosubstituirte Bernsteinsäuren. Dabei können die Mineralsäuren wie Fermente wirken, und so in kleiner Menge die Umwandlung grosser Quanti-

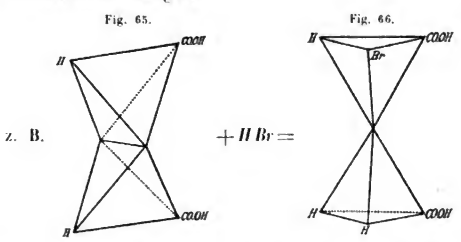
1) Anschütz, Ber. d. d. chem. Ges. 14, 2791.

2) Anschütz und Bennert, ebenda 15, 643.

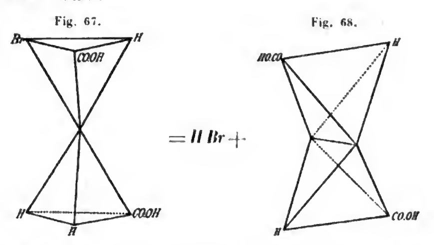
3) Kekulé, Liebig's Annalen, Supplement-Bd. 1, 134; Kekulé und Strecker, ebenda 223, 186.

täten Maleïnsäure bewerkstelligen. Ganz ebenso werden die Ester der Maleïnsäure in Fumarsäureester übergeführt[1]).

Bei der grossen Leichtigkeit, mit welcher die Maleïnsäure im Vergleiche zur Fumarsäure Additionsproducte bildet, wird sie zunächst die Elemente der Mineralsäuren aufnehmen und in eine substituirte Bernsteinsäure übergehen:



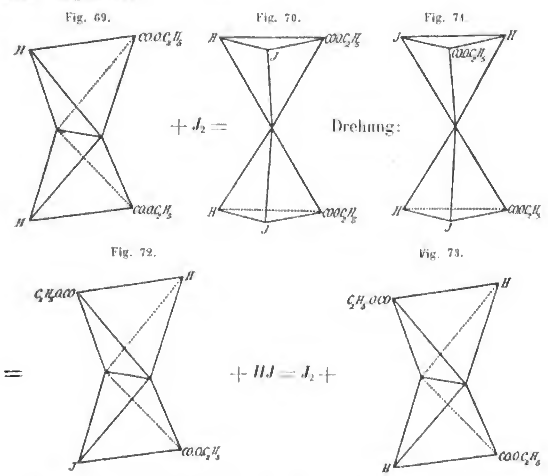
welche unter dem richtenden Einflusse der grösseren Affinitäten durch Drehung des einen Systems gegen das andere die bevorzugte Lagerung Fig. 67 annimmt, und nun unter dem Einflusse der theils durch das anwesende Wasser, theils durch die Schwerlöslichkeit der Fumarsäure bedingten Abspaltung von Bromwasserstoff zu Fumarsäure werden muss:



Die Fumarsäure dagegen wird bei der Bindung von Bromwasserstoff direct zu Monobrombernsteinsäure von der bevorzugten Lage Fig. 67. Hier fehlt jede Ursache zur Drehung, so dass aus dem Additionsproducte nur Fumarsäure zurückgebildet werden kann.

1) Osshoff, Berichte d. d. chem. Ges. 12, 2095.

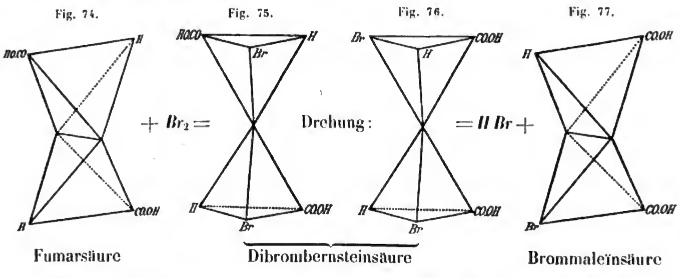
§ 24. c) Wenn die Ester der Maleïnsäure durch eine Spur freien Jods glatt in Fumarsäureester übergehen[1]), so wird ebenfalls zunächst eine Addition von Jod stattfinden, welcher nach gegenseitiger Drehung der Systeme Austritt von Jodwasserstoff und Reduction der vorübergehend entstehenden Jodfumarsäure folgen kann:



Wie bei der Umwandlung der Maleïnsäure in Fumarsäure durch Bromwasserstoff letzterer immer wieder abgespalten und dadurch befähigt wird, den ganzen Verlauf der Vorgänge mit neuen Mengen Maleïnsäure durchzumachen, so wird das hier stets regenerirte Jod durch immer neuen Eintritt in die Reaction grosse Mengen des plansymmetrischen Maleïnsäureesters in den axialsymmetrischen Fumarsäureester überführen. Gerade diese fermentartigen Wirkungen des Jods und der Halogenwasserstoffsäuren sind es überdies, welche den obigen Entwickelungen wesentlich zur Stütze dienen.

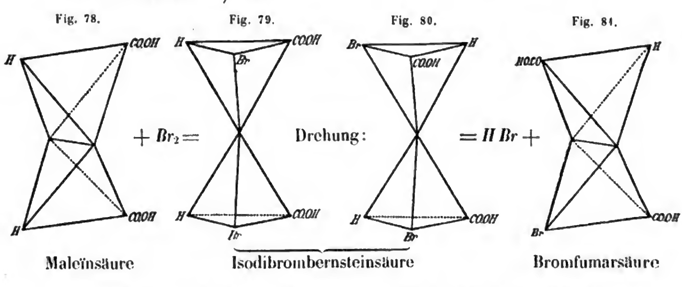
1) Anschütz, Ber. 12, 2282.

§ 25. d) Die aus Fumarsäure durch Aufnahme von zwei Bromatomen entstehende Dibrombernsteinsäure zerfällt beim Kochen mit viel Wasser nach einiger Zeit vollständig in Bromwasserstoff und Brommaleïnsäure[1]), weil dem Additionsvorgange (Fig. 75) die Drehung (Fig. 76) folgen muss und durch Austritt von Bromwasserstoff jetzt in jedem Falle nur ein Maleïnsäurederivat (Fig. 77) resultiren kann:



Fumarsäure — Dibrombernsteinsäure — Brommaleïnsäure

§ 26. e) Aus gleichen Gründen aber geht das Bromadditionsproduct der Maleïnsäure, die Isodibrombernsteinsäure, in Bromfumarsäure[2]) über:



Maleïnsäure — Isodibrombernsteinsäure — Bromfumarsäure

§ 27. f) In umgekehrtem Processe wird aus Brommaleïnsäure und rauchender Bromwasserstoffsäure Dibrom-

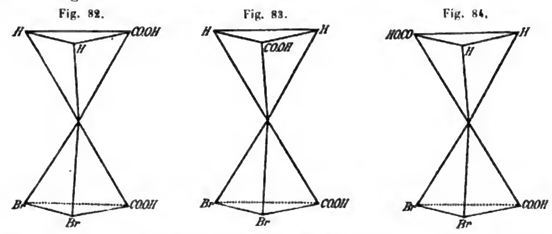
1) PETRI, Annalen 195, 62.

2) KEKULÉ, Ann. Suppl. 2, 91; Ann. 130, 1.

bernsteinsäure erhalten[1]), indem Fig. 77 + *HBr* zu Fig. 76 wird. Ebenso geht die Bromfumarsäure wieder in Isodibrombernsteinsäure[2]) über (Fig. 81 + *HBr* = Fig. 80).

Neben den genannten symmetrischen Additionsproducten entstehen aber aus Brommaleïnsäure gewisse Mengen von Bromfumarsäure, aus letzterer aber auch Dibrombernsteinsäure. Diese bisher sicherlich nicht in allen ihren Phasen genau studirten Vorgänge (sonst müsste auch aus Brommaleïnsäure etwas Isodibrombernsteinsäure erhalten worden sein) setzen voraus, dass neben der symmetrischen Addition von Bromwasserstoff in gewissem Betrage auch eine unsymmetrische nebenher läuft. Die so aus Brommaleïn- und Bromfumarsäure entstehende, gleiche und wahrscheinlich höchst unbeständige asymmetrische Dibrombernsteinsäure wird in ihren drei möglichen Configurationen keine einzige von besonderer Bevorzugung haben.

Brommaleïnsäure ergiebt direct die Configuration Fig. 82, Bromfumarsäure dagegen Configuration Fig. 84. Beide aber können durch Drehung nicht nur in einander, sondern auch in Configuration Fig. 83 übergehen:



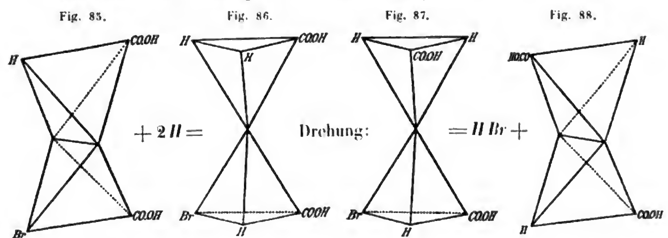
Nun liefert bei Bromwasserstoffaustritt Fig. 82 immer Brommaleïnsäure, wogegen Fig. 83 und 84 Bromfumarsäure entstehen lassen. Aus jeder von beiden ungesättigten gebromten Säuren muss daher die andere und damit auch durch darauffolgende symmetrische Addition jede der beiden Dibrombernsteinsäuren entstehen.

§ 28. g) Die auffällige Thatsache, dass Brommaleïnsäure durch Behandlung mit unzureichenden Mengen von Na-

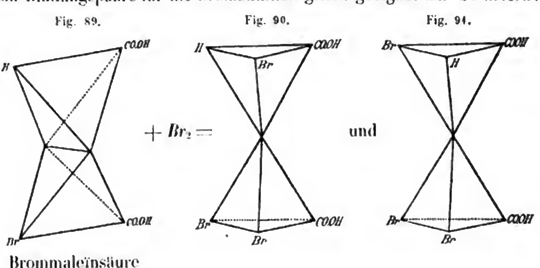
1) Petri, Annalen 195, 67.

2) Derselbe, ebenda.

triumammalgam nicht in Maleïnsäure, **sondern erst in Fumarsäure**[1]) und dann in Bernsteinsäure **übergeführt wird**, ist ohne Zweifel die Folge davon, dass bei dieser Reaction nicht direct eine Ersetzung von Brom durch Wasserstoff erfolgt, sondern zunächst letzteres Element addirt wird und die so gebildete Brombernsteinsäure nach der Drehung Bromwasserstoff abspaltet:



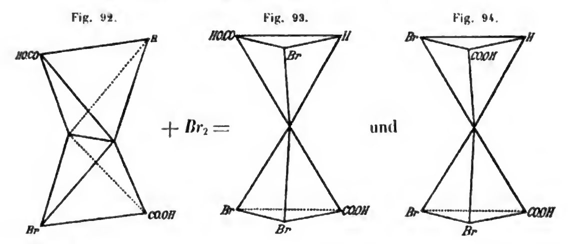
§ 29. b) **Brommaleïnsäure und Bromfumarsäure werden durch Aufnahme von je zwei Bromatomen in die gleiche Tribrombernsteinsäure verwandelt**[2]). Da die letztere in der Gruppe $CHBr.CO.OH$ ein asymmetrisches Kohlenstoffatom enthält, so muss sie in zwei geometrisch isomeren optisch entgegengesetzten Modificationen existiren, deren jede aus jeder der gebromten ungesättigten Säuren in gleicher Menge entsteht, weil jedes der beiden Kohlenstoff-Bindungspaare für die Bromaddition gleich geeignet ist. So liefern:



Brommaleïnsäure

1) PETRI, Annalen 195, 64.

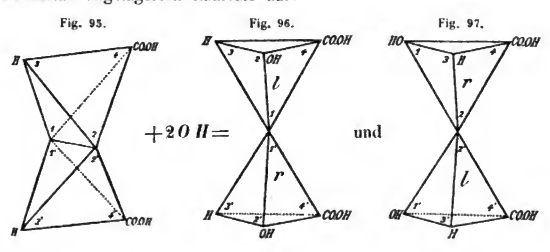
2) Derselbe, ebenda 195, 69.



Bromfumarsäure.

Nun ist aber Fig. 91 mit Fig. 93, und ebenso Fig. 90 mit Fig. 94 identisch, da jede der beiden durch Drehung des einen Systems gegen das zweite direct zur anderen wird.

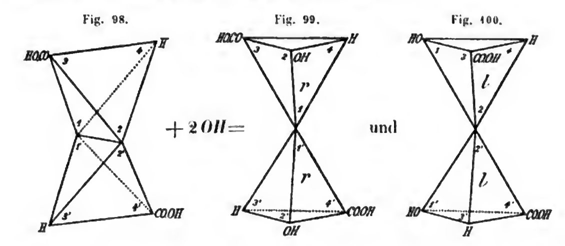
§ 30. i) Von der gleichen Beweiskraft für die Richtigkeit der für Fumarsäure und Maleïnsäure angenommenen geometrischen Formeln, wie der Uebergang der letzteren in die erstere (§ 23) ist die Thatsache, dass Maleïnsäure durch Permanganatlösung zu inactiver Weinsäure[1]), Fumarsäure dagegen zu Traubensäure[2]) oxydirt wird. In beiden Fällen gehen beide Kohlenstoffsysteme $= CH.CO.OH$ durch Addition von Hydroxyl in die asymmetrischen $- CH(OH)(CO.OH)$ über. Dieselben weisen, aus der Maleïnsäure gebildet, die entgegengesetzten Folgen der an die Kohlenstoffatome angelagerten Radicale auf:



1) Kekulé und Anschütz, Ber. d. d. chem. Ges. 14, 713.

2) Kekulé und Anschütz, Ber. d. d. chem. Ges. 13, 2150 und Anschütz, Liebig's Annalen 226, 191.

Die Ordnungsfolge von $CO.OH : OH : H$ ist in Fig. 96 in dem oberen Tetraëder eine linksgehende, im unteren dagegen eine rechtsgehende, sobald man letzteres in die gleiche Stellung wie vorher das andere bringt, in Fig. 97 dagegen hat das obere Rechtsfolge, das untere dagegen Linksfolge. Es müssen demnach in jedem der gebildeten Molekule die gleichen zwei optisch entgegengesetzt wirkenden asymmetrischen Systeme mit einander verbunden sein, so dass immer nur die optisch inactive Weinsäure entstehen kann. Die Fumarsäure dagegen verhält sich geometrisch ganz anders. Bei der Addition von $2.OH$ an das Bindungsstellenpaar $2.2'$ gehen beide Systeme in solche mit Rechtsfolge, bei der Anlagerung an $1.1'$ in solche mit Linksfolge über; es entstehen also, da



wird, aus Fumarsäure nur Molekule, in welchen die beiden Systeme sich in ihrer Wirkung auf die Schwingungsebene des Lichtes unterstützen, also rechtsdrehende und linksdrehende in gleichen Mengen, d. h. die in beide optisch entgegengesetzte Modificationen spaltbare Traubensäure. Ganz analoge Verhältnisse müssen selbstverständlich die Isodibrombernsteinsäure und Dibrombernsteinsäure aufweisen.

§ 31. Von den bekannten Umwandlungen der in die Fumar- und Maleïnsäure-Gruppe gehörigen Körper lassen sich in der Form, in welcher sie bis jetzt beobachtet wurden, zwei Thatsachen nicht mit der entwickelten Theorie vereinigen. Es sind dies einmal der Uebergang eines Theiles der mit Brom in Berührung gebrachten Maleïnsäure (§ 26) in Fumarsäure[1]), welcher zunächst unerklärbar erscheint, und andererseits die Entstehung von Dibromfumarsäure

1) PETRI, Annalen 195, 59.

durch Anlagerung von Brom an Acetylendicarbonsäure[1]), welche der Theorie geradezu widerspricht (§ 7). Durch eine ausgedehnte Untersuchungsreihe, über welche ich demnächst an anderem Orte eingehend berichten werde, hat sich nun herausgestellt, dass bei jenen Vorgängen die Processe keineswegs so einfach verlaufen, wie man bisher annahm, dass in beiden Fällen reichlich Bromwasserstoff gebildet wird, welcher ja für sich genügt, um Maleïnsäure in Fumarsäure, und Brommaleïnsäure in Bromfumarsäure überzuführen (vergl. § 23 und 27). Meine Versuche haben ferner für die Acetylendicarbonsäure ergeben, dass dieselbe nur unter den früher eingehaltenen Bedingungen in Dibromfumarsäure übergeht, dass sie dagegen in voller Uebereinstimmung mit der Theorie Dibrommaleïnsäure liefert, sobald es gelingt (und zwar in um so grösserer Menge, je besser es gelingt) die Einwirkung der stets durch Nebenvorgänge gebildeten Bromwasserstoffsäure auf Acetylendicarbonsäure zu verhindern. Es existirt damit jetzt meines Wissens in den genetischen Beziehungen der Fumarsäure und Maleïnsäure keine einzige Thatsache mehr, welche nicht durch die ausgeführten geometrischen Betrachtungen sich erklärte, keine, die der neuen Hypothese nicht entschieden als Stütze diente.

3. Die Brenzcitronensäuren und ihre Derivate.

§ 32. Von den durch trockene Destillation der Citronensäure, resp. der Aconitsäure, entstehenden isomeren ungesättigten Säuren sind nur die Citrakonsäure und Mesakonsäure geometrische Isomere, während die Itakonsäure die Elemente in anderer Reihenfolge mit einander verbunden enthält:

$$\begin{array}{ll} CH_3 & CH_2 \\ | & \| \\ C.CO.OH & C.CO.OH \\ \| & | \\ CH.CO.OH & CH_2.CO.OH \end{array}$$

Citrakon- und Mesakonsäure Itakonsäure

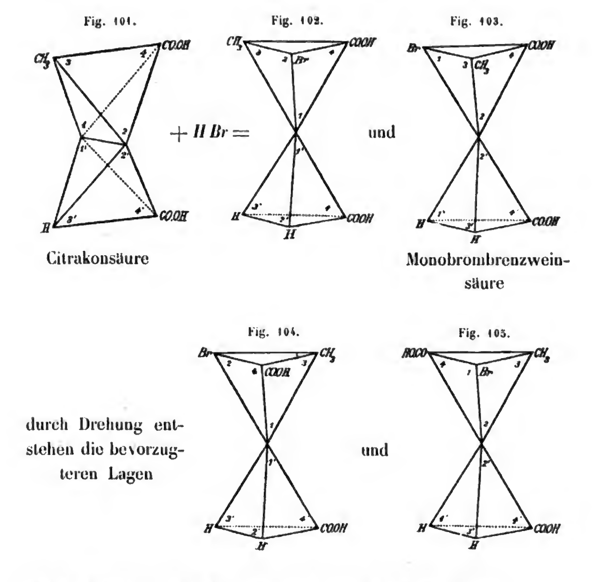
Die letztere Art der Structur lässt verschiedenartige räumliche Gruppirungsweisen nicht zu, wohl aber die erstere. Durch die Fähigkeit, leicht ein Anhydrid zu bilden, charakterisirt sich die Citrakonsäure als das Analogon der Maleïnsäure, d. h. sie enthält die

---

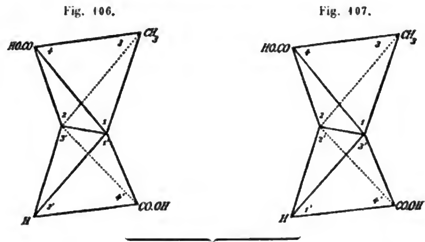
2) Bandrowski, Ber. 12, 2212.

beiden Carboxylgruppen an plansymmetrischen Stellen, wogegen in der der Fumarsäure entsprechenden Mesakonsäure die Carboxyle centrisch symmetrische Lagen einnehmen.

§ 33. Dem entspricht der Uebergang der Citrakonsäure in Mesakonsäure bei Behandlung mit Mineralsäuren. Wenn die Elemente der Bromwasserstoffsäure addirt werden, so muss eine gegenseitige Drehung der beiden einwerthig verbundenen Kohlenstoffatomsysteme in dem Sinne eintreten, dass möglichst die negativen Radicale des einen Systems zu den positiven des anderen in correspondirende Stellung treten. Die unter dem Einflusse des Wassers darauffolgende Abspaltung von Bromwasserstoff aber wird immer zu Mesakonsäure führen:



bei Abspaltung von HBr aber bildet sich in beiden Fällen



Mesakonsäure

Wird dagegen Citrakonsäure — oder besser ihr Anhydrid — mit bei 0° gesättigter Bromwasserstoffsäure übergossen, so kommt es zur Abspaltung der letzteren nicht, da es an ungesättigtem Wasser fehlt, sondern die Monobrombrenzweinsäure bleibt erhalten. Es müssen sich dabei, jenachdem sich das eine oder das andere der Kohlenstoffbindepaare bei der Addition der Säure löst, zwei entgegengesetzte asymmetrische Modificationen, und zwar beide in gleichen Mengen, bilden. Die Monobrombrenzweinsäure ist deshalb optisch indifferent, wird aber in eine rechts- und eine linksdrehende Modification zerlegbar sein. Genau dieselben beiden Monobrombrenzweinsäuren bilden sich durch Addition von Bromwasserstoff an die Mesakonsäure, und entstehen hier die bevorzugten Lagen von vornherein. Dem entsprechend wurden die aus Maleïnsäureanhydrid und Mesakonsäure durch stärkst rauchende Bromwasserstoffsäure entstehenden Producte identisch befunden.

§ 34. Wird nicht Bromwasserstoff, sondern Brom zu Citrakonsäure und Mesakonsäure addirt, so müssen sich zwei verschiedene Dibrombrenzweinsäuren bilden, von welchen die Citradibrombrenzweinsäure der Isodibrombernsteinsäure und inactiven Weinsäure, den Additionsproducten der Maleïnsäure, die Mesadibrombrenzweinsäure dagegen denen der Fumarsäure: der Dibrombernsteinsäure resp. der Traubensäure, entsprechen wird (vergl. § 25, 26 und 30). In ähnlicher Weise wie die Dibrombernsteinsäure durch Kochen mit Wasser in Brommaleïnsäure übergeht, ist aus der Mesadibrombrenzweinsäure die Bromcitrakonsäure und beim blossen Erhitzen das Anhydrid der letzteren gewonnen worden. Kochendes Wasser verwan-

delt die Citradibrombrenzweinsäure dagegen in anderer Weise, indem neben Propionaldehyd, Kohlensäure und Bromwasserstoff die Brommethakrylsäure entsteht. Beim Erhitzen für sich liefert sie Bromcitrakonsäureanhydrid, da jedenfalls zunächst beim Erwärmen die Anhydridbildung (Citradibrombrenzweinsäureanhydrid) und erst hierauf, d. h. nach dadurch erfolgter Fixirung der Lage der Systeme, die Abspaltung von Bromwasserstoff erfolgt.

§ 35. Der Übergang der Citradibrombrenzweinsäure in Brommethakrylsäure gehört einer Gruppe von Erscheinungen an, welche gleichfalls nur bei geometrischer Betrachtungsweise ihr volles Verständniss finden. Es sind dies die sehr verbreiteten Zersetzungen, welche namentlich an den Alkalisalzen halogensubstituirter Säuren unter Austritt von Brommetall und Kohlensäure und Bildung einer ungesättigten Verbindung — sei dieselbe Kohlenwasserstoff, Halogensubstitutionsproduct eines solchen oder eine ungesättigte Säure von geringerer Basicität — vor sich gehen. Da diese Processe alle ein Gemeinsames haben und bei ihrer Zurückführung auf räumliche Atomanordnung drei Kohlenstoffsysteme in Betracht gezogen werden müssen, so empfieht es sich, dieselben in besonderem Kapitel mit einander zu besprechen.

4. Die ungesättigten Säuren der Akrylsäuregruppe.

§ 36. In der Gruppe der der Akrylsäure analog constituirten Säuren treten zahlreiche Isomerien auf, welche nur auf räumlich verschiedene Lagerungsverhältnisse der in gleicher Reihenfolge mit einander verbundenen Elementaratome zurückgeführt werden können.

Die Akrylsäure selbst, sowie ihre α-Substitutionsproducte sind unfähig geometrische Isomere zu bilden, da bei der Structur

$$\begin{array}{c} H.C.H \\ \| \\ H.C.CO.OH \end{array}$$

nur eine Lagerungsmöglichkeit vorhanden ist und die Formeln

$$\begin{array}{c} H-C-H \\ \| \\ R-C-CO.OH \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} H-C-H \\ \| \\ HO.CO-C-R \end{array}$$

räumlich identisch sind. Die β- und α-β-substituirten Akrylsäuren dagegen müssen in je zwei geometrisch isomeren Modificationen



existiren, und sind unter den Homologen der Akrylsäure und ihren analogen aromatischen Verbindungen in grösserer Zahl bekannt. Eine Zeitlang schien es sogar, als ob auch räumlich isomere Monochlorakrylsäuren dargestellt seien, da Otto und Beckurts[1]) aus α-Dichlorpropionsäure eine unzweifelhafte α-Chlorakrylsäure als bei 176°—180° siedende Flüssigkeit dargestellt zu haben schienen, so dass die von Werigo und Werner[2]) aus α-β-Chlorpropionsäure gewonnene, bei 64°—65° schmelzende Isomere als die der zuerst von Pinner und Bischoff[3]) aus Chloralid durch Reduction mit Zink und Salzsäure erhaltenen zweifellosen β-Chlorakrylsäure von 84°—85° Schmelzpunkt geometrisch Isomere erschien. Seit aber Otto und Beckurts[4]) erkannten, dass ihre vermeintliche α-Chlorakrylsäure ein Gemisch gleicher Molekule von α-Dichlorpropionsäure und Brenztraubensäure war, und sie aus ersterer durch verdünnte Kalilauge die Werigo'sche Säure darstellten, ist diese als α-Chlorakrylsäure anzusehen.

Für die β-Chlorakrylsäure ergiebt sich nach ihrer Entstehung aus Propiolsäure durch Addition von Chlorwasserstoff als wahrscheinlichste die der Formel

$$\begin{array}{c} Cl—C—H \\ \| \\ H—C—CO.OH \end{array}$$

entsprechende Configuration. Die geometrisch Isomere ist demnach noch zu suchen.

a) Die Krotonsäuren und Methakrylsäure.

§ 37. Seitdem R. Friedrich[5]) nachgewiesen hat, dass die β-Chorisokrotonsäure durch Alkalien auch bei Temperaturen, welche weit unterhalb jener der Umwandlung der Isokrotonsäure in Krotonsäure liegen, genau in dieselben Producte verwandelt wird wie die Chlorkrotonsäure, musste die Annahme verschiedener Structur für dieselben aufgegeben werden. Krotonsäure und Isokrotonsäure erhalten beide die Formel $CH_3.CH:CH.CO.OH$, ihre β-Chlorsubstitutionsproducte sind $CH_3.CCl:CH.CO.OH$. Für jede dieser Structurformeln existiren zwei Raumformeln:

1) Ber. d. d. chem. Ges. 9, 1879 und 10, 1948.
2) Liebig's Annalen 170, 168.
3) Ebenda 179, 85.
4) Ber. d. d. chem. Ges. 18, 240 u. f.
5) Liebig's Annalen 219, 322 u. f.

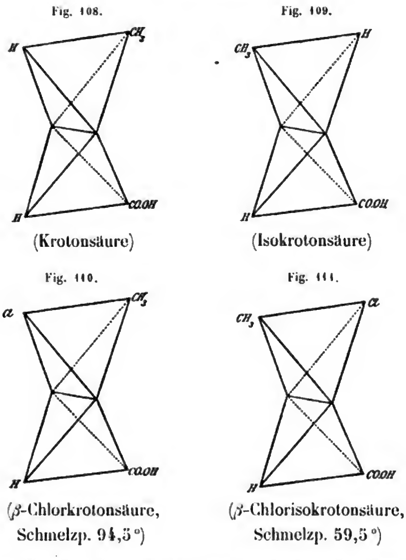


Fig. 108. (Krotonsäure)

Fig. 109. (Isokrotonsäure)

Fig. 110. (β-Chlorkrotonsäure, Schmelzp. 94,5°)

Fig. 111. (β-Chlorisokrotonsäure, Schmelzp. 59,5°)

und ebenso muss es zwei α-Chlorkrotonsäuren geben:

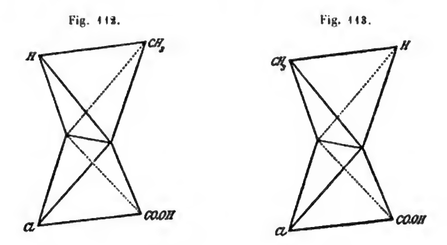


Fig. 112.

Fig. 113.

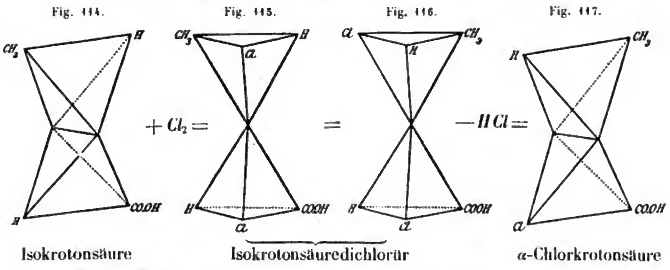
Welche dieser Lagerungsweisen der einen oder anderen der bekannten Verbindungen zukommt, ist, da die isomeren bisher nicht in ähnlicher Weise wie die Maleïn- und Fumarsäuren in einander

haben verwandelt werden können, nur aus ihren Beziehungen zur Tetrolsäure mit einiger Wahrscheinlichkeit zu ermitteln.

Beide β-Chlorkrotonsäuren gehen bei Behandlung mit Kalilösung in die Tetrolsäure über, die β-Chlorkrotonsäure in kürzester Zeit und glatter Reaction schon bei einer Temperatur von 70° und durch verdünnte Kalilauge[1]), während die Chlorisokrotonsäure erst bei 100° wesentlich übersteigender Temperatur[2]) in weit geringerer Ausbeute die Tetrolsäure liefert. Die Configuration der β-Chlorkrotonsäure muss daher die der Tetrolsäurebildung günstigere, d. h. die der Fig. 110 entsprechende sein.

Für die β-Chlorisokrotonsäure ergiebt sich damit die Raumformel Fig. 111, für die Isokrotonsäure Fig. 109 und für Krotonsäure Fig. 108. Zu dem gleichen Resultate führt die Beobachtung, dass bei der Addition von Chlorwasserstoff an Tetrolsäure wieder β-Chlorkrotonsäure von 94,5° und nicht Chlorisokrotonsäure entsteht.

Welche der beiden Configurationen Fig. 112 und 113 der bekannten α-Chlorkrotonsäure von 97,5° Schmelzpunkt entspricht, lässt sich auf Grund des bisher vorliegenden Thatsachenmateriales nicht entscheiden. Ich habe in Folge der hier noch vorhandenen Lücken die Untersuchung der halogensubstituirten Krotonsäuren wieder aufgenommen und gefunden, dass die α-Chlorkrotonsäure aus dem Isokrotonsäuredichlorür bei der Zersetzung mit Alkali entsteht. Sie muss danach die α-Chlorkrotonsäure, mit correspondirender Stellung von CH_3 und $CO.OH$ sein, da auf die Addition von 2 Atomen Chlor an die Isokrotonsäure eine Drehung der Systeme gegen einander erfolgen muss:



1) Liebig's Annalen 219, 347—349. 2) Ebenda 341—345.

Ebenso giebt das Chloradditionsproduct der gewöhnlichen Krotonsäure eine neue vierte, bei viel niedrigerer Temperatur (66,5°) schmelzende Chlorkrotonsäure, welche aus den gleichen Gründen α-Chlorisokrotonsäure

$$\begin{array}{c} CH_3.C.H \\ \| \\ Cl.C.CO.OH \end{array}$$

ist. Die Ergebnisse dieser, sowie einer gleichzeitigen Arbeit über die Derivate der aus den isomeren Krotonsäuren entstehenden α-β-Dibrombuttersäuren werde ich demnächst an anderem Orte ausführlicher mittheilen.

§ 38. Von den gebromten Krotonsäuren waren bisher nur zwei Isomere bekannt. Die eine, bei 106,5° schmelzende erhielten BISCHOFF und GUTHZEIT[1]) aus Propenyltricarbonsäure, MICHAEL und NORTON[2]) aus der α-Dibrombuttersäure durch Behandeln mit alkoholischer Kalilösung, die zweite ebenso aus der α-β-Dibrombuttersäure, dem Krotonsäuredibromür, als bei 92° schmelzende Masse. Die letztere war schon 1866 von KÖRNER[3]) auf gleiche Weise gewonnen, von ihm aber trotz ihres höheren Schmelzpunktes für identisch mit der Brommethakrylsäure gehalten worden. ERLENMEYER und MÜLLER[4]) erhielten sie später zusammen mit α-Bromkrotonsäure nach demselben Verfahren. Zuletzt wurde sie von C. KOLBE[5]) untersucht, der ihren Schmelzpunkt zu 90° fand und sie für β-Bromkrotonsäure erklärte.

Der einzige Grund für diese Annahme ist ihre Verschiedenheit von der α-Bromkrotonsäure. Sie ist jedoch ohne Zweifel nur die geometrisch Isomere der letzteren, denn diese entsteht nach meiner Beobachtung genau so aus dem Isokrotonsäuredibromür. In allerjüngster Zeit kommen auch MICHAEL und BROWNE[6]) zu dem Schlusse, dass sie die »Allo«-α-Bromkrotonsäure sei, da die von ihnen aus Tetrolsäure und Bromwasserstoff dargestellte β-Bromkrotonsäure bei 94,5°—95° schmilzt und andere Eigenschaften besitzt.

Aus den im vorigen Paragraphen erörterten Gründen wird von

1) Ber. d. d. chem. Ges. 14, 616.
2) Ebenda Seite 1202.
3) Liebig's Annalen 137, 233.
4) Ber. d. d. chem. Ges. 15, 49.
5) Journ. f. prakt. Chem. [2] 25, 394.
6) Ebenda 35, 257.

beiden α-Bromkrotonsäuren die bei 106,5° schmelzende die wirkliche α-gebromte Krotonsäure, die von 90° Schmelzpunkt dagegen α-Brom-Isokrotonsäure sein:

$$\begin{array}{ccc} H - C - CH_3 & \qquad & CH_3 - C - H \\ \| & & \| \\ Br - C - CO.OH & & Br - C - CO.OH \end{array}$$

α-Bromkrotonsäure (106,5° Schmp.) α-Bromisokrotonsäure (90° Schmp.)

Die den Krotonsäuren isomere Methakrylsäure kann als α-Methakrylsäure nur in einer einzigen Modification existiren, dagegen müssen ihre Halogensubstitutionsproducte geometrische Isomere aufweisen. Solche liegen augenscheinlich in der bei 62°—63° schmelzenden, aus Citradibrombrenzweinsäure entstehenden Brommethakrylsäure und in der neben ihr aus Mesadibrombrenzweinsäure erhaltenen[1]) Isobrommethakrylsäure von 66° Schmelzpunkt vor. Auch über diese Säuren sind neue Untersuchungen im Gange (vergl. § 53).

b) Die Methylkrotonsäuren und die Homologen.

§ 39. Die Tiglinsäure und Angelikasäure stehen nach den vorhandenen, in letzter Zeit namentlich von Fittig und seinen Schülern[2]) ausgeführten Untersuchungen wahrscheinlich in ähnlichem Verhältnisse zu einander, wie Krotonsäure und Isokrotonsäure, d. h. sind geometrisch Isomere. So wird z. B. die Angelikasäure bei 40stündigem Kochen vollkommen in Tiglinsäure verwandelt. Indessen sind unsere Kenntnisse über die einschlägigen Verhältnisse noch so lückenhaft, dass sie erneute — gleichfalls in der Ausführung befindliche — experimentelle Studien verlangen.

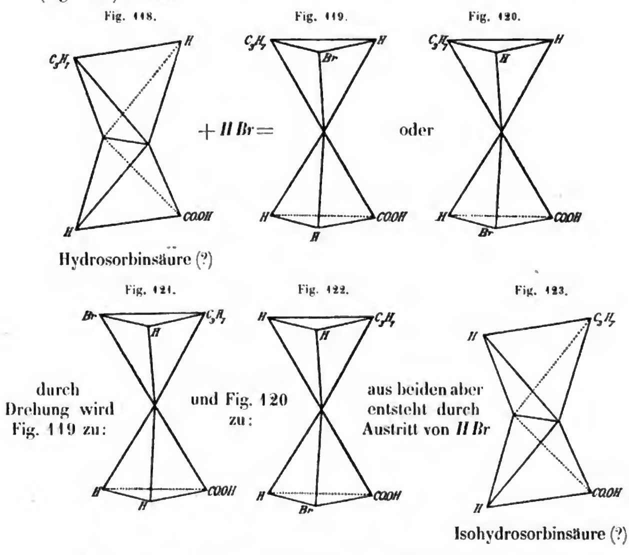
§ 40. Ein Gleiches gilt von den höheren Homologen der Akrylsäurereihe. So sind z. B. die Structurverhältnisse der durch Addition von Bromwasserstoff an Sorbinsäure entstehenden Dibromcapronsäure und der bei der Verbindung von Brom mit Hydrosorbinsäure erhaltenen Isodibromcapronsäure noch nicht genügend aufgeklärt, um bestimmte Schlüsse auf die Configuration der aus ihnen erhältlichen ungesättigten Verbindungen zuzulassen. Auch der Uebergang der Hydrosorbinsäure durch ihr Bromwasserstoffadditionsproduct, die Bromcapronsäure, bei Abspaltung von Brom-

1) Fittig und Krusemark, Liebig's Annalen 206, 16.

2) Liebig's Annalen 195, 79. 92. 108.



wasserstoff in Isohydrosorbinsäure[1]) neben Kaprolacton gehört hierher. Haben in der Hydrosorbinsäure $CH_3.CH_2.CH_2.CH:CH.CO.HO$ die Propyl- und Carboxylgruppe centrisch-symmetrische Lage (Fig. 118), so wird bei ihrer Umwandlung in die gesättigte Bromcapronsäure (Fig. 119 und 120) eine Drehung der Systeme in dem Sinne erfolgen müssen, dass beide Gruppen sich an correspondirende Stellen begeben (Fig. 121 und 122) und beim Wiederaustritte von Brom mit Wasserstoff sich die geometrisch isomere Säure mit plansymmetrischer Stellung (Fig. 123) bildet:



§ 40. Die höchsten Glieder der Akrylsäurereihe gehen bekanntlich bei der Behandlung mit Mineralsäuren, namentlich aber mit einer Spur salpetriger Säure, in Isomere von etwas höheren Schmelzpunkten und — wenigstens soweit die Spaltung bei der Zersetzung

1) LANDSBERG, Liebig's Annalen 200, 51 und HJELT, Ber. d. d. chem. Ges. 51, 618.

durch Alkalien in Betracht kommt — gleicher Structur über. Es sind dies die Hypogäsäure, Oelsäure und Erucasäure, welche zu Gaïdinsäure, Elaïdinsäure und Brassidinsäure werden. Vorläufig ist Grund vorhanden, den Vorgang — da die Salpetrigsäure hier stets wie ein Ferment wirkt und daher aus dem zuerst entstandenen Verbinbindungsproducte immer wieder austritt, um dieselben Processe an anderen Molekulen zu veranlassen — als einen dem Übergange der Maleïnsäure in Fumarsäure (§ 23) und der Hydrosorbinsäure in Isohydrosorbinsäure analogen anzusehen. Damit aber würden die Oelsäuren der Fette der Raumformel

$$\begin{array}{c} R - C - H \\ \| \\ H - C - CO.OH \end{array},$$

die künstlich aus ihnen erhaltenen Isomeren dagegen dem Ausdruck

$$\begin{array}{c} H - C - R \\ \| \\ H - C - CO.OH \end{array}$$

entsprechen, wobei R für die Alkoholradicale

$$C_{13}H_{27} \quad C_{15}H_{31} \quad C_{19}H_{39}$$

steht.

c) Die Zimmtsäure, ihre Isomeren und Homologen.

§ 41. Schon in der Einleitung wurde die hier einschlägige Literatur kurz besprochen. Die von Michael und Norton signalisirten und den früher bekannten Bromzimmtsäuren isomeren Additionsproducte von Bromwasserstoff an Phenylpropiolsäure, welche Erlenmeyer und Stockmeier bereits einige Jahre vorher dargestellt hatten, ohne ihre Beobachtungen genügend zu veröffentlichen, müssen nach § 7 — vorausgesetzt dass sie durch einfache Anlagerung eines Brom- und eines Wasserstoffatomens entstehen, — α- und β-Bromzimmtsäuren mit plansymmetrischer Stellung der Phenyl- und Carboxylgruppe sein:

$$a \begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ C \\ ||| \\ C \\ | \\ CO.HO \end{array} + a\,HBr = b \begin{array}{c} H - C - C_6H_5 \\ \| \\ BrC - CO.OH \end{array} + (a-b) \begin{array}{c} BrC - C_6H_5 \\ \| \\ HC - CO.OH \end{array}$$

Daraus ergeben sich für die bereits bekannten, aus Zimmtsäuredibro-



mür durch Einwirkung von alkoholischer Kalilösung entstehenden Bromzimmtsäuren die Raumformeln

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5-C-H & & C_6H_5-C-Br \\ \parallel & \text{und} & \parallel \\ Br-C-CO.OH & & H-C-CO.OH \end{array}$$

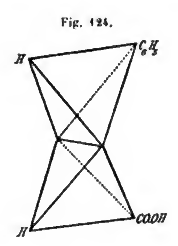
α-Bromzimmtsäure β-Bromzimmtsäure

Welcher der beiden für die Zimmtsäureformel $C_6H_5.CH:CH.CO.OH$ möglichen Configurationen

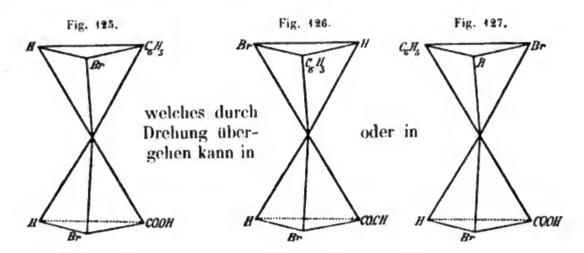
$$\text{I.}\ \begin{array}{c} H-C-C_6H_5 \\ \parallel \\ H-C-CO.OH \end{array} \quad \text{und II.}\ \begin{array}{c} C_6H_5-C-H \\ \parallel \\ H-C-CO.OH \end{array}$$

die uns bekannte Zimmtsäure entspricht, ist zwar vorläufig noch nicht mit absoluter Sicherheit festzustellen, doch scheint ihr die Raumformel I. zuzukommen, da aus dieser allein sich diejenigen der länger bekannten Bromzimmtsäuren ergeben. Denn nur wenn Zimmtsäure

Fig. 124.



ist, so entsteht ein Dibromür



welches durch Drehung übergehen kann in ... oder in

und durch Austritt von Bromwasserstoff die Bromzimmtsäuren

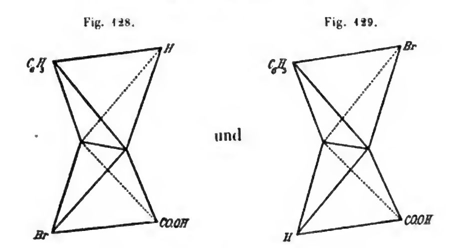


Fig. 128. Fig. 129.

zu liefern vermag. Wenn es gelingen sollte, in den Bromzimmtsäuren die Halogenatome einfach durch Wasserstoff zu ersetzen, ohne durch Addition bis zur Phenylpropionsäure zu gelangen, so würden die aus der Zimmtsäure dargestellten Bromzimmtsäuren ohne Zweifel eine Isozimmtsäure, die aus der Phenylpropiolsäure gewonnenen dagegen die gewöhnliche Zimmtsäure geben. Auch hier sind neue, in meinem Laboratorium bereits begonnene Versuche vonnöthen.

§ 42. Die der Zimmtsäure structurisomere Atropasäure

$$C_6H_5.C{=}CH_2 \quad \text{oder} \quad H{-}C{-}H$$
$$| \qquad\qquad\qquad\qquad ||$$
$$CO.OH \qquad\qquad C_6H_5.C.CO.OH$$

lässt geometrische Isomere nicht erwarten. In der That haben sich auch die zuerst von Lossen[1]) entdeckte α-Isatropasäure und die von Fittig[2]) neben derselben aufgefundene β-Isatropasäure unzweifelhaft als Polymere der Atropasäure herausgestellt und sind untereinander selbst structurisomer, so dass sie deshalb hier nicht in Frage kommen.

§ 43. Die Homologen der Zimmtsäure, namentlich die Phenylkrotonsäuren, lassen geometrisch Isomere erwarten, sind aber von Fittig und seinen Schülern[3]) nicht in dieser Richtung, sondern lediglich auf die aus ihnen entstehenden Lactone untersucht worden.

d) Kumarin, Kumarinsäure und Kumarsäure.

§ 44. Das Kumarin und seine Homologen lösen sich bekanntlich in Alkalilaugen zu höchst unbeständigen Metallverbindungen auf,

1) Liebig's Annalen 138, 237.
2) Ebenda 206, 35.
3) Ebenda 216, 97 u. f.

aus welchen durch Säuren, und zwar schon durch Kohlensäure, die Kumarine unverändert wieder abgeschieden werden. R. WILLIAMSON[1]), der diese Metallverbindungen in festem Zustande darstellte, fand sie entsprechend der Formel

$$\begin{array}{l} CH.C_6H_4.OM \\ \| \\ CH.CO.OM \end{array}$$

zusammengesetzt. Sie sind demnach phenolbasische Salze, denen durch Kohleusäure nicht nur das an Stelle des Phenolhydroxylwasserstoffatomes stehende, sondern — wie oft bei den Salzen der γ- und δ-Hydroxylsäuren — auch das salzbasische Metallatom unter Lactonbildung entzogen wird:

$$\begin{array}{l} CH.C_6H_4.ONa \\ \| \\ CH.CO.ONa \end{array} + 2H_2O + 2CO_2 = 2NaHCO_3 + \begin{array}{l} CH.C_6H_4.OH \\ \| \\ CH.CO.OH \end{array} =$$

$$2NaHCO_3 + \begin{array}{l} CH.C_6H_4 \\ \| \\ CH.CO \end{array} \!\!> O + H_2O.$$

Durch längeres Erhitzen mit sehr concentrirter Alkalilösung oder durch Schmelzen mit Ätzalkalien gehen diese basischen Metallsalze der Kumarinsäure in isomere Verbindungen über, aus welchen nur stärkere Mineralsäuren die Orthokumarsäuren[2]) frei machen. Letztere geben beim Erhitzen nicht, wie man vermuthen sollte, direct wieder Kumarin, sondern nur wenn man sie mit rauchender Bromwasserstoffsäure in die Additionsproducte verwandelt und diese durch Wasser zersetzt[3]).

FITTIG[4]) bemerkt bei dieser Beobachtung: »Diese Reaction ist »um so bemerkenswerther, da die Rückverwandlung der Orthoku- »marsäure in Kumarin bis jetzt nur auf einem Wege, durch Erhitzen »der Acetylkumarsäure auf hohe Temperaturen gelungen ist. Es »ist schwer, sich über die wasserentziehende Wirkung der Brom- »wasserstoffsäure in diesem Falle Rechenschaft zu geben, da wohl »kaum anzunehmen ist, dass das Phenolhydroxyl in der Kumarsäure »vorübergehend durch Brom ausgetauscht wird.«

1) Journ. of the Chem. Soc. 1875, 850.

2) DELALANDE, Liebig's Annalen 45, 334; BLEIBTREU, ebenda 59, 183; FITTIG, ebenda 226, 351.

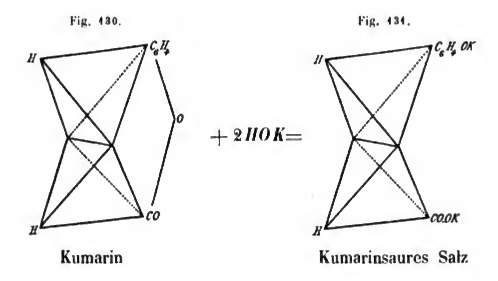
3) FITTIG, ebenda.

4) Ebenda Seite 352.

Diese Verhältnisse, ebenso wie die zuerst von Perkin[1]) aufgefundene und von Fittig und Eberl[2]) bestätigte Isomerie der aus Methyläther-Salicylaldehyd und analogen Aetheraldehyden synthetisch dargestellten Aethyläther-Orthokumarsäuren mit den aus den Metallderivaten der Kumarine und Alkyljodüren gewonnenen Derivaten der Kumarinsäuren, lassen sich in der That abermals wieder nur mit Hülfe geometrischer Betrachtungen begreifen.

§ 45. Für die Kumarinsäure ist die räumliche Formel durch den ausserordentlich leichten Uebergang in ihr inneres Esteranhydrid, das Kumarin, gegeben: die beiden sich miteinander so leicht anhydrisch verbindenden Gruppen müssen auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Axe des Doppelsystems $\overset{CH}{\underset{CH}{\|}}$, demnach plansymmetrisch liegen, ähnlich wie die Carboxylgruppen der Maleïnsäure und Citrakonsäure:

Fig. 130. Fig. 131.

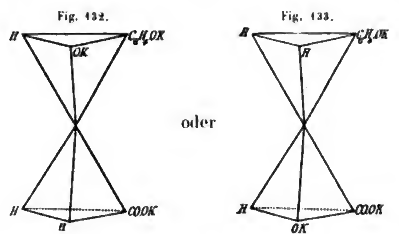


Kumarin — Kumarinsaures Salz

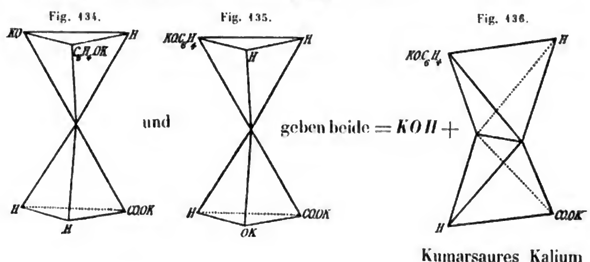
Die Orthokumarsäure dagegen, welche nach dem Ansäuern ihrer Salze nicht wieder in Kumarin übergeht, wird die beiden Gruppen in centrisch-symmetrischer Lage enthalten. Ihre Bildung aus Kumarin beim Erhitzen mit überschüssigem Aetzkali erfolgt entweder durch innermolekulare Umlagerung, oder wird durch vorübergehende Addition der Elemente des Alkalis veranlasst, ähnlich wie

1) Journ. of the Chem. Soc. 1877 I. 414 und 418.
2) Liebig's Annalen 216, 142 (vergl. auch ebenda 226, 353.

Fumarsäure[1]) und Maleïnsäure[2]) dieselben bei langem Erhitzen aufnehmen und zu Aepfelsäure werden, oder wie Fumarsäureester und Maleïnsäureester Natriumäthylat binden und in die Aethylätheräpfelsäure[3]) übergehen. Aus Fig. 131 entsteht so beim Hinzutritt von *KOH:*



worauf nach erfolgter Drehung die Wiederabspaltung von *KOH* unter Bildung von kumarsaurem Salze erfolgen würde:



Kumarsaures Kalium

§ 46. Dass in der Kumarsäure die Oxyphenyl- und Carboxylgruppe sich in centrisch-symmetrischen Lagen befinden, wird durch den Uebergang in Kumarin durch Anlagerung von Bromwasserstoff und dessen Wiederabspaltung vollauf bestätigt. — Auf den Additionsvorgang

1) Linnemann und Lovdl, Liebig's Annalen 192, 81.

2) van 'tHoff, Ber. d. d. chem. Ges. 18, 2713.

3) Purdie, Journ. of the Chem. Soc. 1881 I, 344 und Ber. d. d. chem. Ges. 18, Ref. 536.

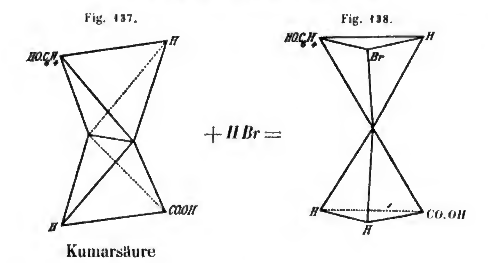


Fig. 137. Fig. 138.

Kumarsäure

wird unter dem Einflusse der Tendenz zur Lactonbildung die Drehung der Systeme gegeneinander stattfinden:

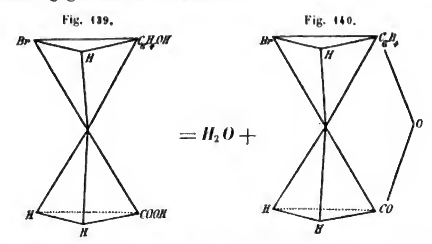


Fig. 139. Fig. 140.

worauf nach so geschehener Fixirung der Lage durch Austritt von *HBr* Kumarin entsteht:

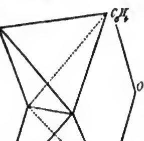
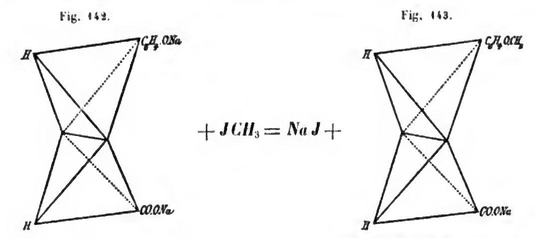


Fig. 141.

Der Erfolg ist der gleiche, wenn bei der Addition das Brom in die α-Stellung tritt.

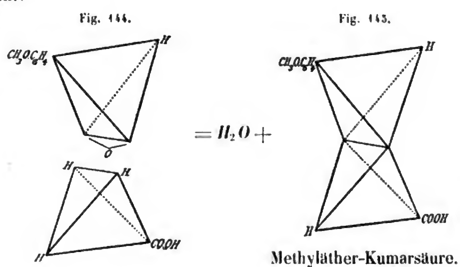
§ 47. Die aus dem basisch kumarinsauren Natrium durch Alkyljodüre entstehenden α-Alkyläther-Kumarsäuren (§ 44 Seite 51) sind selbstverständlich die Kumarinsäurederivate





α-Methyläther-kumarsaures Natrium, besser: Methyläther-kumarinsaures Natrium,

wogegen bei der Kondensation von Methyl-Salicylaldehyd mit essigsaurem Natrium durch die Einwirkung von Acetanhydrid die β-Methyläther-Kumarsäure oder schlechtweg Methyläther-Kumarsäure entsteht:



Methyläther-Kumarsäure.

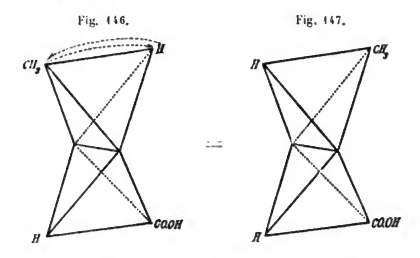
5. Die Umwandlungen ungesättigter Verbindungen in geometrisch Isomere durch Wärme.

§ 48. Eine grosse Zahl ungesättigter Verbindungen, welchen geometrisch Isomere entsprechen, wandeln sich in solche um, wenn sie nur genügend lange Zeit auf gewisse Temperaturen erwärmt werden, ohne dass andere chemische Verbindungen — und wäre es auch nur in sehr geringer Quantität unter fermentartiger Wirkung — hinzukommen.

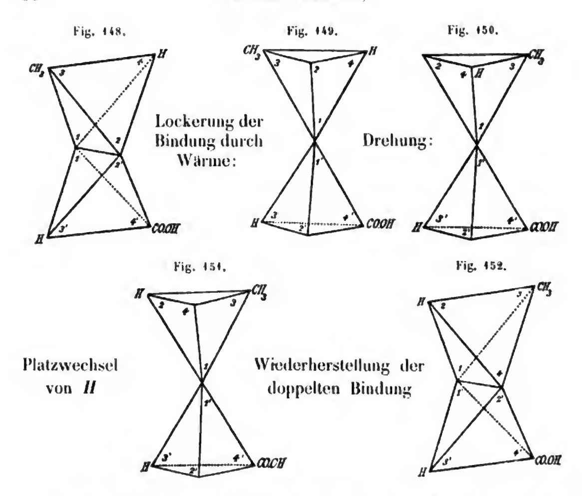
Hierher gehören z. B. der theilweise Uebergang von Fumarsäure in Maleïnsäureanhydrid, von Mesakonsäure in Citrakonsäureanhydrid und der halogensubstituirten Fumarsäuren in die Anhydride ebensolcher Maleïnsäuren. Analoge Vorgänge sind die Umsetzung der Isokrotonsäure in Krotonsäure bei 180°—190°, der Angelikasäure in Tiglinsäure bei derselben Temperatur, sowie der β-Chlorkrotonsäure in die β-Chlorisokrotonsäure bei 20stündigem Erhitzen auf 150°—160°. Auch die Ueberführung der Methyläther-Kumarinsäure in Methyläther-Kumarsäure erfolgt auf gleichem Wege.

Die genannten Vorgänge sind auf innermolekulare Umsetzungen durch die, alle Bindungsenergien vermindernde, Wärmewirkung zurückzuführen, sei es dass dabei ein Platzwechsel der betreffenden an $\overset{C}{\underset{C}{\|}}$ gebundenen Radicale direct und im Sinne der Bildung beständigerer Verbindungen stattfindet, oder dass sich zeitweise die zweifache Bindung beider Kohlenstoffatome zum Theil so weit lockert, dass unter der Wirkung energischerer Affinitäten eine Drehung der Systeme, darauf der Uebertritt des dieselbe nicht veranlassenden Radicales an die nascirende Valenz desselben Kohlenstoffatomes und zuletzt die Wiederherstellung der doppelten Bindung erfolgt.

Wenn z. B. Isokrotonsäure in Krotonsäure übergeht, so würde dieser Vorgang im ersten Falle dem Schema



entsprechen, indem Methyl und Wasserstoff ihre Plätze vertauschen; im zweiten Falle würden die in folgenden Bildern ausgedrückten Zwischenstadien durchlaufen werden:



Als Ursache der Aenderung erscheint hier die grössere Affinität des Methyl zur negativen Carboxylgruppe. Bei dem Uebergange von β-Chlorkrotonsäure in Isochlorkrotonsäure würde allerdings das negative Chloratom in möglichste Nähe zur *CO.OH* treten — vielleicht unter dem Einflusse des Hydroxylwasserstoffatomes, welches, wenn man sich die Carboxylgruppe ebenfalls räumlich zu dem Reste vorstellt, in ganz besondere Nähe zu der Stellung 3 tritt.

Der Uebergang der Säuren der Fumarsäure-Configuration in jene der Maleïnsäuregruppe ist durch ganz analoge Verhältnisse wie bei den β-Chlorkrotonsäuren bedingt und liegt in der Tendenz zur Anhydridbildung, welche nur an den Säuren mit plansymmetrischer Lage der Carboxylgruppen möglich ist. Die Reaction erfolgt hier erst bei wesentlich oberhalb 200° liegenden Temperaturen, welche diejenigen der Anhydrisirung der Maleïnsäuren an Höhe übertreffen. Wird durch Erwärmung die zweiwerthige Bindung vorübergehend soweit gelockert, dass eine Drehung der Systeme erfolgen kann, so folgt auf den Eintritt correspondirender Stellung der Carboxylgruppen — gleichgiltig ob dieselbe die Folge überwiegender Affinitätswirkungen

oder blosser Wärmestösse ist — sofort die Anhydridbildung und damit die Fixirung der Systeme in der entsprechenden Lage.

Die Aenderungen der Configuration bei höherer Temperatur treten auf diese Weise in volle Analogie zu den auch sonst nicht abzulehnenden Aenderungen der Constitution chemischer Verbindungen durch innermolekulare Umsetzungen, wie sie z. B. bei dem Uebergange optisch activer Modificationen organischer Verbindungen in die nach entgegengesetzter Richtung drehenden oder in die inactiven stattfinden müssen.

B. Wirkungen der räumlichen Lagerungsverhältnisse der Atome bei drei- und mehrfachen Kohlenstoffsystemen.

1. Der gleichzeitige Austritt von Metallhaloiden und Kohlensäure aus den Salzen halogensubstituirter organischer Säuren.

§ 49. Den Arbeiten Fittig's und seiner Schüler verdanken wir den Nachweis der grossen Häufigkeit und das eingehende Studium einer Reaction, deren erste Entdeckung Kekulé[1]) gelegentlich seiner Untersuchungen über ungesättigte Säuren machte, indem er den Zerfall der neutralen citradibrombrenzweinsauren Salze in Brommetall, Kohlensäureanhydrid und Brommethakrylsäure fand.

Fittig sah zu seiner Ueberraschung analoge Zersetzungen an den Neutralsalzen zahlreicher anderer, auch einbasischer, bromsubstituirter Säuren ablaufen und machte darauf aufmerksam, dass diese Reaction von der Stellung des austretenden Bromatoms zur Carboxylgruppe abhängig sein muss. Seine Annahme, dass beide an das gleiche Kohlenstoffatom gebunden seien, das Brom sich also zum Carboxyl in der α-Stellung befinde, wurde bedingt einmal durch die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass zwei Radicale namentlich dann sich stark beeinflussen, wenn sie im Molekule möglichst benachbarte Orte einnehmen, andrerseits aber durch die damals allgemeine Deutung der bei 137° schmelzenden Bromhydrozimmtsäure als der α-Säure. Diese Ansicht macht es freilich nothwendig, in vielen Fällen eine innermolekulare Verschiebung von Wasserstoffatomen am Kohlenstoffkerne anzunehmen, wie z. B. bei der Bildung von Styrol aus der Bromhydrozimmtsäure

1) Liebig's Annalen, Supplementband 2, 98.

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CO.ONa \end{array} = NaBr + CO_2 + \begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH_2 \end{array}$$

Bromhydrozimmtsäure Styrol

Gegen diese Deutung führte zuerst ERLENMEYER[1]) schwer wiegende Gründe ins Feld, welche jedoch FITTIG[2]) nicht als entscheidend anerkannte, obgleich er zugab, dass die ERLENMEYER'sche Ansicht gerade für die Entstehung des Styrols den grossen Vorzug besitze, eine Ortsänderung des Wasserstoffs unnöthig zu machen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO.ONa \end{array} = NaBr + CO_2 + \begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH_2 \end{array}$$

Er erklärte die Frage nach der Constitution der analog zerfallenden Säuren als eine noch offene, wendete sich aber bei seiner Kritik der Gründe ERLENMEYER's eigentlich nur gegen die wenigst beweiskräftigen und bezeichnete gerade den wichtigsten — die Entstehung des angeblichen α-, in der That aber β-Chlorstyrols aus dem Dichlorür des Acetophenonradicales — als nicht stichhaltig. Nun aber verläuft dieser Process genau wie die Ueberführung des Acetons in β-Chlorpropylen

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + PCl_5 = POCl_3 + \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CCl_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CCl_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} = HCl + \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CCl \\ \| \\ CH_2 \end{array}$$

Das vermeintliche α-Chlorstyrol muss deshalb β-Chlorstyrol sein:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + PCl_5 = POCl_3 + \begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CCl_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CCl_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} = HCl + \begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ CCl \\ \| \\ CH_2 \end{array}$$

Seit jener Zeit sind einige Thatsachen bekannt geworden, welche

1) Ber. d. d. chem. Ges. 12, 1607.

2) Liebig's Annalen 200, 87.

entschieden darthun, dass mit dem Metall des Neutralsalzes gerade ein β-ständiges Halogenatom austritt.

Wallach[1]) zunächst fand, dass die Salze der aus Chloralid bei der Reduction mit Zink und Salzsäure entstehenden β-Dichlorakrylsäure sich in der Wärme unter Kohlensäureentwickelung in Chlormetall und Chloracetylen zersetzen:

$$\begin{matrix} CCl_2 \\ \| \\ CH \\ | \\ CO.ONa \end{matrix} = NaCl + CO_2 + \begin{matrix} CCl \\ ||| \\ CH \end{matrix}$$

und nach Otto und Beckurts[2]) entsteht aus der Dichlordimethylbernsteinsäure durch Kochen ihrer Salze die Chlortiglinsäure. Das kann aber nur geschehen, wenn das austretende Chloratom zu der sich abspaltenden Kohlensäure die β-Stellung inne hatte:

$$\begin{matrix} CO.OK \\ | \\ CH_3.C.Cl \\ | \\ CH_3.C.Cl \\ | \\ CO.OK \end{matrix} = KCl + CO_2 + \begin{matrix} CH_3.C.Cl \\ \| \\ CH_3.C \\ | \\ CO.OK \end{matrix}$$

Uebrigens wurde schon vorher, und zwar im Fittig'schen Laboratorium, eine zu gleichem Schlusse führende Thatsache durch Petri[3]) aufgefunden. Nach Diesem verwandelt sich die Tribrombernsteinsäure schon beim Kochen ihrer wässrigen Lösung in eine Dibromakrylsäure, welche gemäss ihrer Entstehung aus Mucobromsäure nur die α-β-Dibromakrylsäure sein kann. Auch hier muss demnach mit dem Carboxyl ein zu diesem in der β-Stellung befindliches Bromatom entfernt werden:

$$\begin{matrix} CO.OH \\ | \\ CHBr \\ | \\ CBr_2 \\ | \\ CO.OH \end{matrix} = HBr + \begin{matrix} \underline{CO_2} \\ CHBr \\ \| \\ CBr \\ | \\ CO.OH \end{matrix}$$

1) Liebig's Annalen 203, 88.
2) Ber. d. d. chem. Ges. 18, 853—856.
3) Liebig's Annalen 195, 70.

Wie fest sich die Meinung gesetzt hatte, dass bei derartigen Reactionen die α-ständigen Halogenatome betheiligt seien, zeigt die schon erwähnte Arbeit C. KOLBE's[1]), welcher das bei Zersetzung des Natriumsalzes des Krotonsäuredibromürs gebildete, bei 59° siedende Brompropylen als β-Brompropylen bezeichnet. Es kann nun aber gar nicht zweifelhaft sein, dass das längst bekannte, aus Bromacetol ($CH_3.CBr_2.CH_3$) entstehende Isomere von 47°—48° Siedepunkt das wirkliche β-Brompropylen, das bei 59°—60° siedende dagegen α-Brompropylen ist. Damit spricht denn auch C. KOLBE's Beobachtung wieder für die Betheiligung des β-ständigen Halogenatomes an der Reaction:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CHBr \\ | \\ CO.ONa \end{array} = NaBr + CO_2 + \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH \\ \| \\ CHBr \end{array}$$

Da meines Wissens in der That kein einziges Beispiel existirt, welches auch nur mit heute noch gewichtigen Plausibilitätsgründen die FITTIG'sche Ansicht unterstützte, so muss angenommen werden, dass es ganz allgemein gerade die β-Stellung ist, welche den Eintritt der fraglichen Zersetzung ermöglicht.

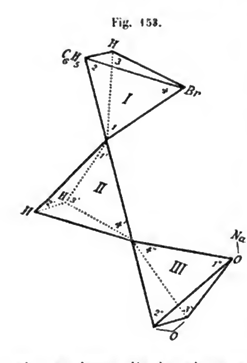
§ 50. Dieser in der That ohne Platzwechsel von Wasserstoffatomen stattfindende Verlauf verliert seine überraschende Eigenthümlichkeit vollkommen, wenn man ihn an Hand der entwickelten Theorie geometrisch verfolgt; es ist dabei nur erforderlich, die Lagerungsverhältnisse der Elementaratome auch eines dritten Kohlenstoffatoms mit in Betracht zu ziehen.

Wird eine β-halogensubstituirte Säure, z. B. die Phenyl-β-Brompropionsäure, in ihr Alkalisalz verwandelt, so muss unter dem Einflusse der besonders starken chemischen Anziehung zwischen Halogen und Metall die möglichste räumliche Annäherung der beiden Elemente im Sinne von Fig. 153 eintreten:

---

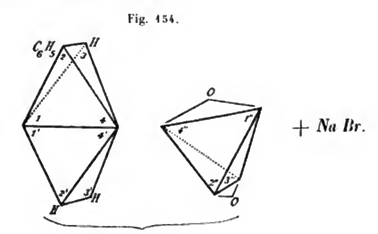
1) Journ. f. prakt. Chem. [2] 25, 392.

Fig. 153.



Die Entfernung der beiden Bindestellen 4 und 1″, welche hauptsächlich in Frage kommen, ist, wenn die gemeinschaftlichen Axen der beiden Doppelsysteme *I.II* uud *II.III* in eine, und auch jene Bindestellen in dieselbe Ebene fallen, nur um ein Geringes grösser als diejenige der correspondirenden Stellen eines Doppelsystems, denn beide verhalten sich zu einander wie 1,023 : 1. Tritt dagegen durch die Affinität zwischen dem Halogen und dem Metall die in § 12 erwähnte Neigung der Axen oder Aenderung der Anziehungsrichtungen ein, so kann die Annäherung von 4 zu 1″ eine noch grössere werden. Da übrigens das Metallatom nicht direct, sondern durch Vermittelung eines Sauerstoffatomes dem Kohlenstoff angelagert ist, so wird die Entfernung vom Halogenatome sich in jedem Falle auf einen sehr geringen Betrag reduciren, und die chemische Einwirkung beider auf einander um so leichter zu ihrer Vereinigung und ihrem Austritte aus dem Molekule führen. In dem Augenblicke, wo dies geschieht, nascirt die vorher metallbindende Valenz des Sauerstoffatomes und sättigt sich unter Lösung der Bindung zwischen den Stellen 4′ und 4″ durch die vierte Valenz des Kohlenstoffatomes *III*, so dass Kohlensäure frei wird und gleichzeitig unter Vereinigung der frei gewordenen Stellen 4 und 4″ die ungesättigte Verbindung — hier Styrol — entsteht. Fig. 153 geht dadurch über in

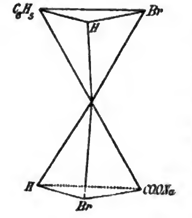
Fig. 154.



§ 51. Die Leichtigkeit, mit welcher solche Zersetzungen eintreten, ist eine ausserordentlich verschiedene. So finden sie an den Salzen der Phenyl-β-Brompropionsäure, Phenyl-α-β-Dibrompropionsäure, der Bromwasserstoff- und Brom-Additionsproducte der Tiglinsäure, Aethylkrotonsäure und der Citrakonsäure schon bei gewöhnlicher Temperatur statt, während sie sich bei den α-β-dibrombuttersauren Salzen selbst auf dem Wasserbade nur langsam vollenden. Zweifellos sind hier die mit den Kohlenstoffatomen verbundenen Reste und ihr Einfluss auf die Lagerungsverhältnisse von ursächlicher Bedeutung. In einigen Fällen kann man sich vom Boden der entwickelten Theorie aus davon Rechenschaft geben.

So lässt sich z. B. der Unterschied in dem Verhalten des Zimmtsäuredibromürs und Krotonsäuredibromürs darin erkennen, dass beim ersteren die zum Zerfall führende Configuration Fig. 155

Fig. 155.



die unbedingt bevorzugte ist, während bei dem Krotonsäuredibromür die entsprechende Figur 156 infolge der stark positiven Natur der Methylgruppe und ihrer Wirkung auf das α-ständige Bromatom mit der nicht zu jener Zersetzung geeigneten Lage Fig. 157 zu concurriren hat:

Fig. 156.

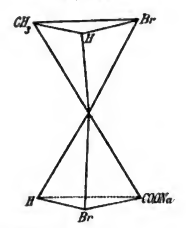
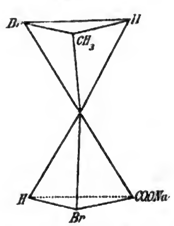


Fig. 157.



§ 52. Neben der Abspaltung von Halogenwasserstoff oder Halogenmetall und Kohlensäure aus den Molekulen der β-substituirten Säuren und ihrer Salze laufen sehr häufig andere Vorgänge — Parallel-



processe — ab, welche — da sie ebenfalls in den räumlichen Lagerungsverhältnissen ihre Erklärung finden — noch besondere Besprechung erfordern. Oft kann durch Aenderung der äusseren oder der chemischen Bedingungen der eine dieser gleichzeitigen Vorgänge so beträchtlich zurückgedrängt, der andere so befördert werden, dass nicht selten geradezu eine Umkehr der Verhältnisse eintritt.

Ganz allgemein ist die Erscheinung, dass der Austritt von Kohlensäure am leichtesten oder überhaupt nur in neutralen oder höchstens kohlensaures Alkali enthaltende Lösungen vor sich geht, während die freien β-halogensubstituirten Säuren, oder ihre Salze bei Anwesenheit überschüssigen Aetzalkalis sich vorwiegend in anderer Richtung zersetzen.

Während z. B. eine mit Soda schwach übersättigte Lösung von β-Bromhydrozimmtsäure in weitaus überwiegender Menge (65%) in Styrol übergeht[1]),

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CH_2.CO.ONa \end{matrix} = NaBr + CO_2 + \begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH_2 \end{matrix},$$

nebenbei nur etwa 5% Zimmtsäure liefert

$$2\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CH_2.CO.ONa \end{matrix} + Na_2CO_3 = 2NaBr + CO_2 + H_2O + 2\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH.CO.ONa \end{matrix},$$

und der Rest zu Phenylmilchsäure wird

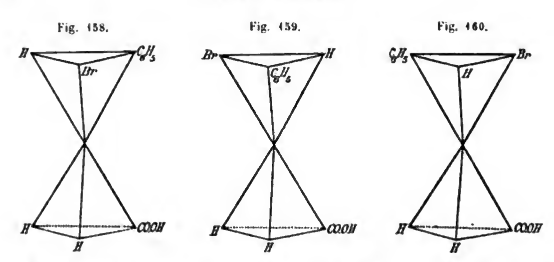
$$2\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CH_2.CO.ONa \end{matrix} + H_2O + Na_2CO_3 = 2NaBr + CO_2 + 2\begin{matrix} C_6H_5 \\ \| \\ CH.OH \\ | \\ CH_2.CO.ONa \end{matrix},$$

so werden beim Kochen der freien Säure mit Wasser 38—40% in Zimmtsäure und ca. 60% in Phenylmilchsäure verwandelt, und beim Erhitzen ihres Salzes mit alkoholischer Kalilösung fast die Hälfte in Zimmtsäure und der Rest in Styrol übergeführt.

Es beruht dies einzig und allein auf den ganz verschiedenen bevorzugteren Configurationen der freien Säure und ihrer Salze. Unter den drei Lagen der Systeme in der freien Säure

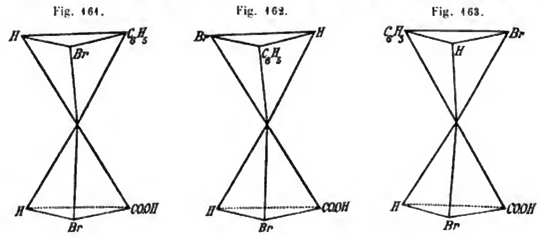
---

1) Fittig und Binder, Liebig's Annalen 195, 136. 137.



sind die begünstigeren sicherlich die in Fig. 158 und Fig. 159 dargestellten, welche beim Abspalten von Bromwasserstoff Zimmtsäuren liefern, wogegen Fig. 160 — aus welcher allein der gleichzeitige Austritt von *HBr* und CO_2 und die Bildung von Styrol abgeleitet werden kann — die weit weniger begünstigte ist. Geradezu umgekehrt wird das Verhältniss bei dem Natriumsalze. Sind endlich noch freie Aetzalkalimolekule vorhanden, so wird häufig das Bromatom durch ein solches eliminirt und ein α-ständiges Wasserstoffatom durch die Hydroxylgruppe noch mit abgespalten werden, ehe das Bromatom mit dem Metall des Salzes auszutreten vermag, und der Rest wird sich zu Zimmtsäure schliessen. Ist das Halogen — gleichgültig ob bei Umsetzung mit Wasser oder mit Alkali (im letzteren Falle aus Fig. 160) — einmal durch Hydroxyl ersetzt, so unterbleibt die Bildung einer ungesättigten Verbindung.

Auf ganz analogen Verhältnissen beruhen die Parallelzersetzungen der Dibromhydrozimmtsäure. Die aus der Addition von Brom an Zimmtsäure (vergleiche § 41) unmittelbar hervorgegangene Configuration Fig. 161 ist in ganz besonderem Grade schlecht begünstigt, dagegen unterscheiden sich Fig. 162 und Fig. 163 bei weitem nicht in dem Maasse zu Ungunsten der letzteren, wie Fig. 160 gegen Fig. 159:



Infolge dessen entsteht schon aus der freien Dibromhydrozimmtsäure sehr viel α-Bromstyrol. Nach ihrer Ueberführung in Neutralsatz ist letzteres fast das einzige Product, weil dann die Lagerungsverhältnisse Fig. 163 selbst vor Fig 162 ganz wesentlich bevorzugt sind. Wird dagegen ein Bromatom durch überschüssiges Aetzkali herausgenommen, so verbindet sich gleichzeitig ein Wasserstoffatom mit dem Hydroxyl und es entsteht α-Bromzimmtsäure aus Fig. 162, β-Bromzimmtsäure aus Fig. 163.

Im Allgemeinen ähnlich in Bezug auf die Ausbeuten an den Producten der Parallelprocesse verhält sich nach C. Kolbe die α-β-Dibrombuttersäure aus Krotonsäure, je nachdem ihre Lösung in freiem Zustande, oder in Form ihrer neutralen Salze, oder endlich bei Gegenwart von freiem Alkali erwärmt wird. Ein Unterschied gegenüber den Zimmtsäurederivaten jedoch tritt insofern hervor, dass im letzteren Falle gar kein Brompropylen entsteht. Es hat dies augenscheinlich darin seinen Grund, dass das Alkali unter Bildung von α-Bromisokrotonsäure bereits gewirkt hat, ehe die träge verlaufende Abspaltung von Kohlensäure einen irgendwie nennenswerthen Betrag erreichte (vergleiche § 38 und 51).

§ 53. Die Salze geometrisch isomerer β-halogensubstituirter Säuren werden im Allgemeinen bei der Abspaltung von Chlormetall und Kohlensäure auch geometrisch isomere ungesättigte Verbindungen bilden müssen.

Obwohl dieser Satz systematisch-experimenteller Prüfung, mit welcher ich beschäftigt bin, noch bedarf, so sind doch einzelne ihm entsprechende Thatsachen bereits bekannt.

Die Halogenadditionsproducte der Citrakonsäure und Mesakonsäure, welche zu den unter Kohlensäureentwickelung leicht zerfallenden Verbindungen gehören, liefern beim Kochen mit Wasser und, sobald sie mit Soda neutralisirt werden, schon bei gewöhnlicher Temperatur halogensubstituirte Methakrylsäuren. Aus der Citradibrombrenzweinsäure wurde nur die bei 62°—63° schmelzende Brommethakrylsäure, aus Mesadibrombrenzweinsäure neben dieser noch die Isobrommethakrylsäure (Schmelzpunkt 65°—66°) erhalten.

Die Verwandlung der Citrakonsäure, resp. Citradibrombrenzweinsäure findet in den folgenden Phasen statt:

Fig. 164. Fig. 165. Fig. 166. Fig. 167.

Citrakonsäure $+ Br_2 =$ Citradibrombrenzweinsäure, Drehung: $= Na\,Br + CO_2 +$ Brommethakrylsäure

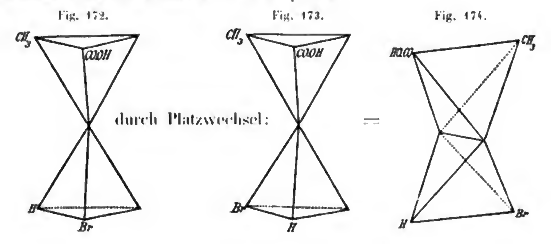
Ganz analog verläuft die Bildung der Isobrommethakrylsäure:

Fig. 168. Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171.

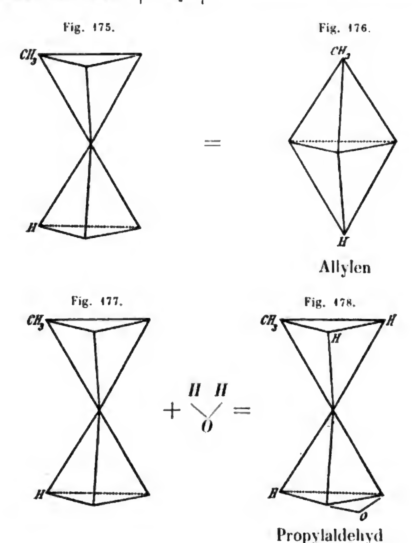
Mesakonsäure $+ Br_2 =$ Mesadibrombrenzweinsäure $=$ $= Na\,Br + CO_2 +$ Isobrommethakrylsäure

Wenn bei der letzteren Zersetzung etwas Brommethakrylsäure mit entsteht, so wird dies durch die grössere Stabilität derselben, d. h. durch die überwiegende Verwandtschaft des Broms zum Methyl veranlasst werden können, welche einen innermolekularen Platzwechsel im Sinne der folgenden Figuren veranlasst. Aus Fig. 170 wird im Momente des Austrittes von $Na\,Br + CO_2$

Fig. 172. Fig. 173. Fig. 174.



Der bei beiden Zersetzungen reichlich auftretende Propylaldehyd aber entsteht durch nochmalige Abspaltung von $NaBr + CO_2$ unter Mitwirkung der Elemente eines Molekules Wasser, während ohne die letztere Allylen resultirt, welches Friedrich[1]) unter den Producten der Einwirkung von Alkalien auf Brommethakrylsäure nachwies. Fig. 172 wird zu $NaBr + CO_2 +$



2. Die Bildung der Lactone und der Anhydride zweibasischer Säuren.

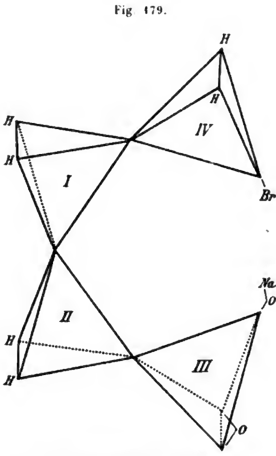
§ 54. Zu den auf geometrischen Gründen beruhenden Reactionen gehören ohne Zweifel auch die eigenthümlichen Wirkungen zwischen solchen Elementen, welche am gesättigten Kohlenstoffkerne sich in der sogenannten γ-Stellung zu einander befinden[2]). Wenn

1) Liebig's Annalen 203, 359.

2) Vergl. Hjelt, Ber. d. d. chem. Ges. 15, 630.

dieselben sich chemisch stark anziehen, so wird, eventuell unter Drehungen der vier Kohlenstoffsysteme, die Configuration Fig. 179 eintreten:

Fig. 179.



γ-brombuttersaures Natrium.

Die in Frage kommenden Stellen rücken einander hier ganz besonders nahe, so dass ihre Entfernung nur noch 0,667 von derjenigen der correspondirenden Bindestellen eines Doppelsystemes betragen kann. Die energischen chemischen Wirkungen zwischen den diese Stellen besetzenden Radicalen sind dadurch vollkommen verständlich. So existiren z. B. die Salze der γ-halogensubstituirten Säuren schon bei gewöhnlicher Temperatur nicht, da die Configuration Fig. 179 für sie die weitaus bevorzugtere ist. Das Halogenatom vereinigt sich mit dem in seiner nächsten Nähe befindlichen Metall und das Sauerstoffatom tritt mit der zweiten Valenz an seine Stelle.

Die freien γ-Hydroxylsäuren dagegen zerfallen nicht alle sofort von selbst in Wasser und Lacton. Für die γ-Oxybuttersäure z. B. wird die bevorzugtere Lage an sich die in Fig. 180 dargestellte sein:

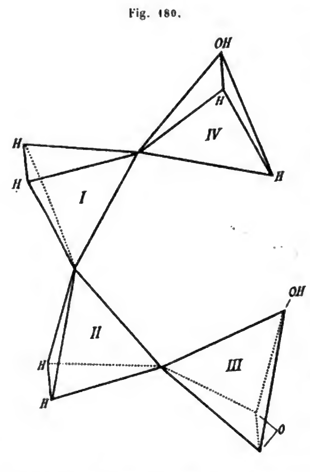


Fig. 180.

Nur infolge der Wärmestösse tritt — namentlich schnell beim Aufkochen der Lösung — die Hydroxylgruppe des Systems IV zeitweise in Nachbarschaft zum Säurehydroxyl des Systemes III und es findet dann unter Wasseraustritt die Esterbildung, hierdurch aber die Fixirung der Lage statt.

Ist eines der Wasserstoffatome in System I dagegen durch ein negatives Radical, z. B. durch Carboxyl ersetzt — wie in der Itamalsäure, so muss die zur Lactonbildung führende Configuration sich viel leichter einstellen, da *CO.OH* zu *H* des Systemes I in möglichste Nähe treten wird. Solche γ-Oxysäuren zerfallen schon bei gewöhnlicher Temperatur in Wasser und Lactone, resp. Lactonsäuren; die Itamalsäure z. B. wird schon beim Ansäuern ihrer Lösungen sofort zu Parakonsäure:

$$
\begin{array}{l}
\quad\; CO.OH \\
\quad\;\; | \qquad\quad H \\
\quad\;\; | \qquad\; / \\
H - C - C - H \\
\quad\;\; | \qquad\; \backslash OH \\
\quad\;\; | \qquad\; / OH \\
H - C - C = O \\
\quad\;\; | \\
\quad\;\; H
\end{array}
= H_2O +
\begin{array}{l}
\quad\; CO.OH \\
\quad\;\; | \qquad\quad H \\
\quad\;\; | \qquad\; / \\
H - C - C - H \\
\quad\;\; | \qquad\; \backslash \\
\quad\;\; | \qquad\quad O \\
\quad\;\; | \qquad\; / \\
H - C - C = O \\
\quad\;\; | \\
\quad\;\; H
\end{array} ,
$$

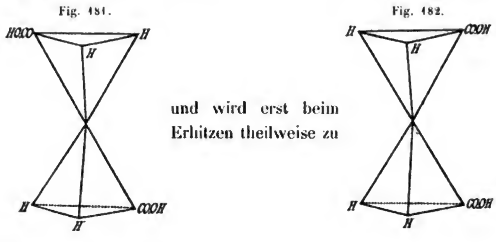
Diaterebinsäure zu Terebinsäure u. a. m.

§ 55. Analog der Lactonbildung geht die Anhydridbildung solcher mehrbasischer Säuren vor sich, welche zwei Carboxylgruppen an benachbarten Kohlenstoffatomen, die Hydroxylgruppen derselben also in γ-Stellung zu einander enthalten. Die zur Anhydridbildung führende Configuration ist allerdings hier nicht die begün-

stigtere, sondern nur die zeitweilige Folge von Wärmestössen (vergl. § 22).

So ist die Bernsteinsäure z. B. bei gewöhnlicher Temperatur sicherlich

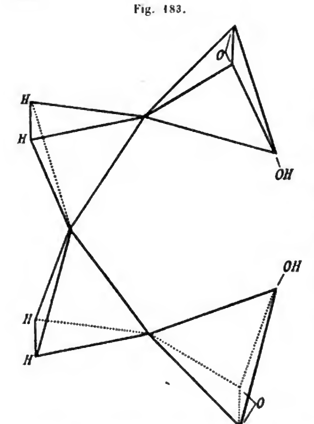
Fig. 181. Fig. 182.



und wird erst beim Erhitzen theilweise zu

oder:

Fig. 183.



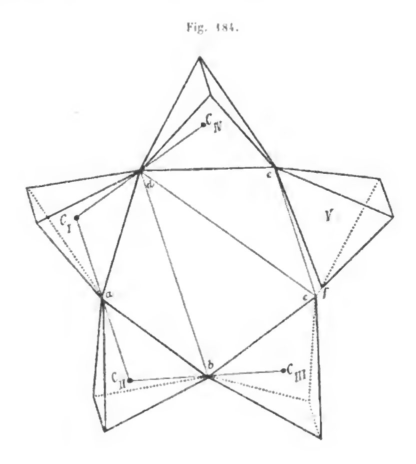
Ist die Anhydridbildung in dieser Lage einmal vollzogen, so kehren die Systeme in die an sich bevorzugtere Configuration nicht zurück, da die neue jetzt fixirt ist und erst dann wieder durch Drehung verändert werden kann, wenn die Schliessung des Ringes durch Hydratbildung gelöst wurde.

§ 56. Die Umstände bei der Entstehung der δ-Lactonsäuren finden durch die geometrischen Verhältnisse gleichfalls ihre Erklärung.

Wenn fünf zu einfacher Kette verbundene Kohlenstoffatom-Systeme mit je einem Radicale der beiden endständigen besonders an-

ziehend auf einander wirken, so treten die correspondirenden Bindestellen fast in Berührung. Bei Aenderungen der Configuration durch Wärmestösse und dadurch bedingte Drehungen der Systeme wird jene Lage zeitweilig auch dann eintreten, wenn sie nicht die bevorzugtere ist, und es muss mit erhöhter Temperatur eine ohne dieselbe ausbleibende Reaction, z. B. Esteranhydridbildung der δ-Lactone, stattfinden können. Diese Configuration ist aus Fig. 184 ersichtlich.

Fig. 184.



Sie setzt wie die übrigen Figuren voraus, dass die vier Bindestellen gegen den Mittelpunkt des Kohlenstoffatomes gleichwerthige Lagen besitzen. In diesem Falle befinden sich die gemeinsamen Bindestellen sämmtlicher und die für die Lactonbildung in Betracht kommenden correspondirenden der endständigen Kohlenstoffatome auf einem Kreise, dessen Radius sich zur Entfernung einer Bindestelle vom Mittelpunkte ($C_I : d$) verhält wie 1,414 : 1. Die übrigen in Betracht kommenden Abstände haben dann folgende relativen Werthe:

Entfernung der	z. B. Linie	A	B	C	D
Bindestellen vom Mittelpunkte des Kohlenstoffatoms	$C^I . a$	1,000	0,612	0,500	0,375
Bindestellen des einfachen Systems	$a . b$	1,633	1,000	0,817	0,612
Mittelpunkte zweier Kohlenstoffatome	$C_I . C_{II}$	2,000	1,225	1,000	0,705
Correspondirende Bindestellen des Doppelsystems	$b . d$	2,667	1,633	1,333	1,000
» » des dreifachen Systems	$c . d$	2,724	1,661	1,361	1,022
» » des vierfachen Systems	$c . e$	1,779	1,089	0,890	0,667
» » des fünffachen Systems	$c . f$	0,181	0,111	0,091	0,068

Die betreffenden Bindestellen rücken sich bei dem fünffachen Systeme allerdings so nahe, dass ein mit beiden vereinigtes Sauerstoffatom in dem Zwischenraume cf keinen Platz haben wird. Die Entfernung der Bindestellen der Kohlenstoffatome vom Mittelpunkte ist in den Constructionen der Abbildungen nämlich nicht als Entfernung der Mittelpunkte der an dieselben angelagerten Atome, sondern als Entfernung der Begrenzungsfläche der Kohlenstoffatome gedacht. Der wirkliche Abstand der Mittelpunkte zweier direct mit einander verbundener Kohlenstoffatome ist demnach doppelt so gross (C_I C_{II}). Wenn auch die Grössen der Elementaratome nicht alle gleich sein werden, so dürften sie, namentlich diejenigen des Kohlenstoffs und Sauerstoffs, doch nicht in dem Grade von einander verschieden sein, wie cf von bc. Es folgt daraus, dass die Lage der fünf Kohlenstoffatome eines δ-Lactones nicht die in Fig. 184 dargestellte bleiben kann, sondern dass sich durch Eintritt von O zwischen die Bindestellen c und f entweder der Kreis gewaltsam erweitert, oder die Bindestellen a, b, c, d und f aus der Ebene des Kreises nach theilweise entgegengesetzten Richtungen heraustreten. Bei der Bildung der γ-Lactone würde diese von Spannungszuständen innerhalb des Molekules begleitete Vergrösserung der die Bindestellen verbindenden Curve nicht erfolgen. Da der Zwischenraum ce, in welchen das Sauerstoffatom einzutreten hat, nur um ein Geringes grösser als derjenige der Bindestellen des einfachen Systemes ist, so würde eher eine Verengerung, aber nur eine verhältnissmässig sehr geringe, des Ringes die Folge sein.

Mit diesen Verhältnissen hängt vielleicht die Erscheinung zusammen, dass die vollkommene Überführung der δ-Oxyfettsäuren in δ-Lactone wesentlich schwieriger als jene der γ-Oxysäuren in γ-Lactone vor sich geht[1].

1) Liebig's Annalen 216, 135.

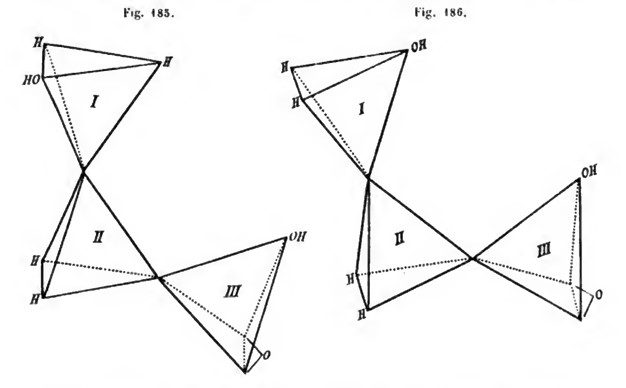


§ 57. Auch das ganz abweichende Verhalten der β-und α-Oxysäuren wird mit Hilfe dieser geometrischen Betrachtungen ersichtlich.

Die β-hydroxylsubstituirten Fettsäuren zersetzen sich bei 100° noch nicht, zerfallen aber bei höherer Temperatur, so lange das α-ständige Kohlenstoffatomsystem noch direct gebundene Wasserstoffatome enthält, in ungesättigte Säuren. Ihre bevorzugte Configuration wird z. B. in der β-Milchsäure die in Fig. 185 dargestellte sein; durch Wärmestösse muss auch die der Fig. 186 entsprechende zeitweilig sich einstellen.

Wenn auch die Entfernung der beiden Hydroxyl-Bindestellen der Systeme I und II in Fig. 186 nicht viel grösser ist als diejenige

Fig. 185. Fig. 186.



des Hydroxyls in System I von dem correspondirend gelagerten Wasserstoffatome in System II Fig. 185 (1,022:1,000), so wirkt sie doch gerade einer lactonartigen Ringschliessung entschieden entgegen, da sich mit der Zwischenlagerung eines mit beiden Systemen verbundenen Sauerstoffatomes eine beträchtliche Verengerung des Ringes und damit der Stabilität des Molekules hinderliche Spannungszustände einstellen müssen. Der Uebergang der β-Milchsäure in die Akrylsäure dagegen wird ausser durch die etwas grössere Nähe der correspondirenden Stellen (*OH* in System I und *H* in System II Fig. 185) durch die unleugbare Reactionsfähigkeit, d. h. Lockerung der Bindungsintensität der



in der α-Stellung zum Carboxyl befindlichen Wasserstoffatome begünstigt.

Dass die α-Oxysäuren nicht in ähnlicher Weise zu ungesättigten Säuren werden, ist schon in ihrer Structur begründet; dass sie lactonartiger Ringschliessung nicht fähig sind, hat die gleiche Ursache wie bei den β-Oxysäuren; ja dieselbe tritt hier mit verstärkter Kraft ins Gewicht. Wenn in dem Doppelsysteme die Entfernung zwischen correspondirenden Bindestellen nur um Weniges geringer ist als beim dreifachen, so wird der Eintritt eines mit beiden verbundenen Sauerstoffatomes eine noch stärkere, weil auf nur zwei und nicht auf drei Kohlenstoffatome vertheilte, Neigung der Axen oder Ablenkung der Bindungsrichtungen und innermolekulare Spannung zur Folge haben. Der lactidartigen Veresterung zwischen zwei und mehreren Molekulen dagegen steht ebensowenig etwas im Wege, wie der Esterbildung zwischen getrennten Säuren und Alkoholmolekulen überhaupt.

IV. Schlussbemerkungen.

§ 58. In ähnlicher Weise wie für die Erklärung der in den vorstehenden Abschnitten besprochenen Erscheinungen lassen sich geometrische Betrachtungen der Molekular-Constitution auch auf andere Gruppen von Vorgängen mit Erfolg ausdehnen. Ich verzichte vorläufig auf die Behandlung derselben, um diese Abhandlung nicht allzusehr anwachsen zu lassen. Es kam mir für diesesmal nicht darauf an, die einschlägigen Thatsachen in erschöpfendem Umfange zu discutiren, sondern mehr darauf, die Hauptzüge der neuen Theorie und ihre Anwendbarkeit zur Erklärung bisher unverstandener Thatsachen zu entwickeln. Späterhin werden sich, namentlich bei Mittheilungen der Ergebnisse experimenteller Untersuchungen, Gelegenheiten finden, die gelassenen Lücken auszufüllen. Die räumlichen Verhältnisse bei der Ringschliessung habe ich nur soweit berücksichtigt, wie sie für die Bildung der Lactone und der Anhydride zweibasischer Säuren von Bedeutung sind, jede weitere Verfolgung derselben aber absichtlich unterlassen, da A. v. Baeyer augenscheinlich in ihrem Studium begriffen ist. Den Satz v. Baeyers[1]): »die Ringschliessung ist offenbar dieje-

1) Ber. d. d. chem. Ges. 18, 2277.



nige Erscheinung, welche am meisten über die räumliche Anordnung der Atome Auskunft geben kann«, möchte ich vorläufig nicht ganz gelten lassen. Von weit grösserer Bedeutung sind zunächst noch, wie ich im Vorstehenden dargethan zu haben glaube, die einfachsten Vorgänge der Umwandlung gesättigter in ungesättigte und ungesättigter in gesättigte Verbindungen, bei denen nur zwei oder drei Kohlenstoffatom-Systeme in Betracht kommen, und bei welchen Fragen wie die mit dem Eintritte von Spannungszuständen verbundenen Aenderungen der Anziehungsrichtungen vorläufig unberücksichtigt bleiben können. So geist- und werthvoll dieser von v. Baeyer gegebene Begriff auch jetzt schon ist und so fruchtbar er in der Zukunft werden dürfte, so grosse Vorsicht ist heute noch in seiner Anwendung geboten. Auch ist er entschieden einer Erweiterung bedürftig.

Zwangsweise Aenderungen der Anziehungsrichtungen werden sich z. B. schon für ein einziges Kohlenstoffatomsystem ergeben, wenn dasselbe Radicale von zweierlei Art enthält. Die Uebereinstimmung der vier Bindestellenlagen mit den Ecken des einer Kugel eingeschriebenen regulären Tetraëders wird nur dann möglich sein, wenn die vier angelagerten einfachen oder zusammengesetzten Radicale vollkommen gleichartig, die chemischen Anziehungen, welche sie auf einander ausüben, alle gleich gross sind, wie bei dem Grubengase CH_4 oder dem Perchlormethan CCl_4. Ist aber das Kohlenstoffatom mit drei Atomen des einen $(a.a.a)$ und mit einem Atom eines anderen Elementes (b) verbunden, so werden in Folge der verschieden grossen Affinität von b zu jedem Atome a und der Atome a unter einander die Lagen der Bindestellen den Ecken einer nur noch gleichschenkligen dreiseitigen Pyramide entsprechen, welche eine stumpfe sein muss, wenn Affinität $b:a > a:a$ ist, eine spitze dagegen, wenn das Verhältniss sich umkehrt.

Steht ein Kohlenstoffatom in Verbindung mit aa und bb, so werden die Bindestellen wie die Ecken eines quadratischen Sphenoides zu einander liegen, wenn Affin $a:a =$ Affin $b:b$ und Affin $a:b \gtrless$ Affin $a:a$ oder Affin $b:b$ ist. Jedes andere Verhältniss der Affinitätsgrössen, wie auch jede Steigerung der Anzahl der Arten von gebundenen Atomen muss Lagen herbeiführen, welche sich um so mehr von der Gestalt des regulären Tetraëders entfernen, je man-

nigfaltiger die Verhältnisse zwischen den Grössen der Anziehung jedes der Atome zu jedem anderen werden. Mit jeder solchen Aenderung der Bindestellenlage muss aber eine Abweichung der Anziehungsrichtungen gegen den Mittelpunkt des Kohlenstoffatomes von den normalen regulären, und damit nicht nur eine Aenderung der Gestalt des Systemes, sondern auch der Eintritt von Spannungszuständen verbunden sein. Die auf die Eigenschaften von organischen Molekulen influirenden geometrischen Verhältnisse werden damit äusserst verwickelte, und entziehen sich grösstentheils vorläufig jeder speciellen Verwerthung.

Es gilt daher von allen solchen Versuchen mehr noch als mit Beziehung auf die von Ihm entwickelten theoretischen Betrachtungen der Schlusssatz v. BAEYER's[1]), dass ihnen durchaus nicht der Werth einer abgeschlossenen und durch die Erfahrung bestätigten Theorie beigelegt werden solle.

§ 59. Anders steht es, wie ich glaube, mit denjenigen Erörterungen, welche im II. Abschnitte dieser Abhandlung gegeben sind: sie haben in ihrer Beschränkung auf die einfachsten räumlichen Lagerungsverhältnisse, trotz der noch bestehenden Unsicherheit ihrer Anwendung auf manche specielle Fälle, den Werth einer wirklichen Theorie, denn ihre einfache hypothetische Grundlage erklärt nicht nur gleichmässig eine grosse Zahl bisher absolut unverständlicher Thatsachen, sondern sie ist auch ferner der experimentellen Prüfung fähig.

Von den zahlreichen, aus ihr ableitbaren Problemen ist eine grosse Reihe theils von mir selbst, theils von meinen Schülern in Angriff genommen worden. Soweit bis jetzt bestimmte Resultate erzielt sind, entsprechen sie den theoretischen Voraussetzungen in allen Punkten. Es ist mir wie schon erwähnt (§ 31) nicht nur gelungen, die scheinbaren Widersprüche, welche das Verhalten der Fumar- und Maleïnsäure und ihrer Substitutionsproducte in einigen Umsetzungen darboten, vollkommen aufzuklären und als solche wegzuräumen, sondern ich habe aus dem Chloradditionsproducte der Krotonsäure das zweite α-Chlorpropylen und die vierte Chlorkrotonsäure, ganz wie es meine Theorie vorraussehen liess, gewonnen, und aus dem Isokrotonsäuredichlorür ebenso ausser dem gewöhn-

1) Ber. d. d. chem. Ges. 18, 2281.

lichen α-Chlorpropylen die bisher schon bekannte α-Chlorkrotonsäure dargestellt. Von meinen Schülern wurde bereits der Nachweis geführt, dass Isokrotonsäuredibromür wie vorauszusetzen durch Abspaltung von Bromwasserstoff die zwischen 106° und 107° schmelzende α-Bromkrotonsäure liefert, und dass die aus Krotonsäuredibromür entstehende, bei 90°—92° schmelzende Bromkrotonsäure wirklich die α-Bromisokrotonsäure sein muss. Auf dem vorauszusehenden Wege ist ferner das zweite geometrisch isomere Brompseudobutylen und Krotonylendibromür erhalten worden u. s. w. Ich darf infolge dessen schon jetzt behaupten, dass sich die Theorie am Experimente bewährt und werde mehrfache Gelegenheit haben, in der Folge den thatsächlichen Beweis hierfür an anderem Orte zu führen.

§ 60. Die wichtigste Errungenschaft der Theorie ist jedenfalls die vollkommene Aufklärung der sogen. »abnormen« Isomeriefälle und der Nachweis, dass in isomeren ungesättigten Verbindungen sich die relativen räumlichen Lagerungsverhältnisse wirklich auf Grund experimenteller Forschungsergebnisse bestimmen lassen[1]). Vorläufig existiren damit auf Isomerieverhältnisse bezügliche, theoretischem Verständnisse durchaus unzugängliche Thatsachen so gut wie nicht, oder gar nicht mehr.

Will man in Zukunft den Namen »Alloisomerie« noch anwenden, so wird man darunter die Existenz structuridentischer, aber in der räumlichen Anordnung der Atome verschiedene Molekule zu verstehen haben. Ich habe schon im Jahre 1873 dafür den Namen »geometrische Isomerie«[2]) vorgeschlagen und halte denselben für besser, weil er bezeichnender ist.

---

1) Vergl. namentlich die §§ 18, 19, 23, 30, 33, 36, 41.

2) Liebig's Annalen 167, 345.

Inhalt.

Seite

I. Einleitung 3

II. Nothwendige Erweiterung der Theorie von der räumlichen Lagerung der Elementaratome in organischen Verbindungen 6

Geometrische Eigenschaften eines Kohlenstoffatomsystems 6

Geometrische Eigenschaften der Doppelsysteme 7

Geometrische Isomeriefälle bei zweiwerthig gebundenen Doppelsystemen 8

Mittel der Lagenbestimmung 11

Drehbarkeit einwerthig verbundener Systeme durch Affinitätsverhältnisse 14

Dieselbe infolge von Wärmestössen 16

Entstehung asymmetrischer Kohlenstoffsysteme aus ungesättigten Verbindungen und umgekehrte Vorgänge 18

Verschiedenartige Symmetrielagen 20

Correspondirende Lagen 21

III. Specieller Theil: Anwendung der Hypothese auf einzelne Gruppen chemischer Thatsachen 22

A. Räumliche Lagerungsverhältnisse der Atome in Doppelsystemen 22

1. Die ungesättigten Kohlenwasserstoffe und ihre Substitutionsproducte 22

2. Fumarsäure, Maleïnsäure und ihre Derivate 27

3. Die Brenzcitronensäuren und ihre Derivate 37

4. Die ungesättigten Säuren der Akrylsäuregruppe 40

a) Krotonsäuren und Methakrylsäure 41

b) Methylkrotonsäuren und die Homologen 45

c) Zimmtsäure, ihre Isomeren und Homologen. 47

d) Kumarin, Kumarinsäure und Kumarsäure 49

5. Umwandlung ungesättigter Verbindungen in geometrisch Isomere durch Wärme 54

B. Wirkungen räumlicher Lagerungsverhältnisse bei drei- und mehrfachen Kohlenstoffsystemen. . . . 57

1. Der gleichzeitige Austritt von Metallhaloiden und Kohlensäure aus den Salzen halogensubstituirter Säuren 57

2. Bildung der Lactone und der Anhydride zweibasischer Säuren 67

Das Verhalten der α- und β-Oxysäuren 73

IV. Schlussbemerkungen 74

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

GELENKE DES MENSCHLICHEN ARMES

VON

W. BRAUNE,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

UND

O. FISCHER.

I. THEIL:

DAS ELLENBOGENGELENK VON O. FISCHER.

II. THEIL:

DAS HANDGELENK VON W. BRAUNE UND O. FISCHER.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº II.

MIT ZWÖLF HOLZSCHNITTEN UND FÜNFZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Vom Verfasser übergeben den 25. April 1887.
Der Abdruck vollendet den 10. Juli 1887.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

GELENKE DES MENSCHLICHEN ARMES

VON

WILHELM BRAUNE UND OTTO FISCHER.

1. THEIL:

DAS ELLENBOGENGELENK VON O. FISCHER.

2. THEIL:

DAS HANDGELENK VON W. BRAUNE UND O. FISCHER.

I. Theil.

Das Ellenbogengelenk

von

Otto Fischer.

Über die Mechanik des Ellenbogengelenks sind so zahlreiche Untersuchungen angestellt worden, dass Viele den Gegenstand für erledigt halten. Als Resultat dieser Untersuchungen hat sich bei fast allen Autoren ergeben, dass die Bewegungen im Ellenbogengelenk um eine feste Achse stattfinden, und dass sich zu dieser Drehung noch eine geringe Seitenbewegung der Ulna in medialer Richtung zugesellt, so dass aus den beiden Bewegungen eine Schraubenbewegung um die Längsachse der Trochlea resultirt. So sagt, um beispielsweise nur einige Autoren anzuführen, Gegenbaur (Lehrbuch der Anatomie des Menschen, Leipzig, 1883 pag. 241): »Die Bewegung geht der schrägen Stellung der Trochlea gemäss nicht in einer planen Ebene [?], sondern in einer Schraubenfläche vor sich, ist bei der Streckung ab-, bei der Beugung ansteigend.« Henke (Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig 1863, pag, 145): »Genau genommen ist die Verbindung der Ulna mit dem Oberarm mit ihrer ausschliesslichen Drehung um eine Achse kein reines Drehgelenk, sondern eine Schraube, jedoch von sehr kleiner Steigung. Sie ist am rechten Arme rechtsgewunden.« Sappey (Traité d'Anatomie descriptive, Paris 1876, pag. 649): « L'avant-bras se fléchit et s'étend sur le bras. Il exécute aussi de très-minimes mouvements d'inclinaison latérale. Dans les mouvements de flexion et d'extension, le cubitus et le radius tournent autour d'un axe qui passe par le centre de la trochlée et du condyle de l'humérus.«

Henle (Handbuch der Bänderlehre des Menschen, Braunschweig, 1872, pag. 76) und Meyer (Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes, Leipzig, 1873, pag. 141 und ff.) sprechen ebenfalls von einem Schraubengelenk mit 4 mm resp. 3 mm Schraubenhöhe.

Bei Hyrtl (Handbuch der topographischen Anatomie, Wien 1860, pag. 348) findet sich die Annahme einer einzigen Drehachse und infolgedessen einer einzigen Bewegungsebene für jeden Punkt der Ulna, während er die seitliche Verschiebung des Knochens nicht erwähnt.

Angesichts dieser durchgängigen Uebereinstimmung in den Ansichten der verschiedenen Autoren über das Vorhandensein von nur einer Drehungsachse möchte es recht überflüssig erscheinen, die Untersuchungen am Ellenbogengelenk, deren bisherige Resultate schon in alle Lehrbücher der Anatomie als abgeschlossen übergegangen sind, wieder aufzugreifen. Dass ich es trotzdem gethan habe, dazu gab folgende Beobachtung die Veranlassung.

Fixirt man den Humerus einer vom Rumpf abgelösten oberen Extremität und bewegt dann den Vorderarm aus der extremen Streckstellung in die extreme Beugestellung, so kann man bei aufmerksamer Beobachtung schon mit blossem Auge wahrnehmen, dass die Punkte an dem der Hand zugekehrten Ende der Ulna sich nicht in einer Ebene bewegen, sondern aus jeder Ebene, man mag sie gelegen annehmen, wie man will, im Verlaufe der Bewegung heraustreten. Genauer kann man sich davon überzeugen, indem man sich mit Hülfe eines Papierblattes eine Ebene senkrecht zur Längsaxe der Trochlea im Raume festlegt und dann Beugung und Streckung im Ellenbogengelenk ausführt. Wie man auch das Blatt legt, es gelingt nicht eine Lage ausfindig zu machen, von der die Ulnapunkte bei der Bewegung nicht beträchtliche Abweichung zeigten. Nun würde zwar durch die Schraubenbewegung eine Abweichung bedingt sein, aber dieselbe könnte doch eine Grösse von 2 mm nicht überschreiten. Dies hat schon Henke richtig bemerkt, indem er sagt (a. a. O. pag. 145): »Die ganze Höhe eines Ganges der Schraube beträgt bis zu 4 mm, die seitliche Verschiebung der Ulna bei Durchlaufung ihres ganzen Spielraums also stets unter 2 mm. Dies ist ganz verschwindend gegen den Effect der Drehung um die Achse,

durch den die von der Achse weiter entfernten Theile, also namentlich die Hand, einen sehr grossen Weg durchlaufen, während jene Verschiebung für sich natürlich nur immer die gleiche ist, wie am Gelenk.«

Da nun aber die Abweichungen der Knochenpunkte von den supponirten Bewegungsebenen ersichtlich die Grösse von 2 mm weit überschreiten, so fragt es sich, wodurch dieselben bedingt sind. Eine zutreffende Erklärung dieser Erscheinung liefern zuerst die Untersuchungen von BRAUNE und KYRKLUND (Ein Beitrag zur Mechanik des Ellenbogengelenkes, Archiv für Anatomie und Entwickelungsgeschichte, Jahrgang 1879, pag. 332), indem diese Autoren durch ihre experimentellen Untersuchungen zu dem Resultat gelangen, dass die Achse, um die die Bewegungen im Ellenbogengelenk stattfinden sollen, etwas schwankt. Den genauen Verlauf der Schwankungen dieser Bewegungsachse zu ermitteln, war man infolge der Mangelhaftigkeit der Methode bisher nicht in der Lage. Dies lässt sich nur durch eine streng mathematische Analyse der Bewegung im Ellenbogengelenk feststellen. Letztere ist aber gerade der Gegenstand der vorliegenden Arbeit, im Anschluss an die frühere principielle Feststellung der Methode, wie man bei einer strengen Analyse der Gelenkbewegungen zu verfahren hat (vgl. BRAUNE und FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XIII, Leipzig, 1885). Die Untersuchungen haben ergeben, dass die Schwankungen der Bewegungsachse und damit der Lage der Bewegungsebenen so beträchtlich sind, dass sie in der That eine bedeutende Abweichung in der Bahn eines jeden Punktes der Ulna von einer ebenen Bahn bedingen, und dass der Antheil, der bei diesen Abweichungen der von allen Autoren gefundenen und in der That vorhandenen Seitwärtsbewegung der Ulna zuzuschreiben ist, verschwindet gegenüber dem Einfluss der Achsenschwankungen. Von einer Schraubenbewegung kann selbstverständlich keine Rede sein, sobald es sich nicht mehr um eine feste Achse handelt.

Wie schon früher auseinandergesetzt wurde, muss jeder mathematischen Behandlung eines derartigen Bewegungsproblems, wie es beim Gelenkmechanismus auftritt, eine sorgfältige experimentelle Bestimmung der Bewegungscurven von drei starr mit dem bewegten

Knochen verbundenen Punkten vorausgehen, welche dann das Fundament für alle möglichen Untersuchungen über die Art der Gelenkbewegung bildet. So einfach die Aufgabe für den Mathematiker ist, auf dieser Grundlage weiter zu bauen und am Schreibtisch alle einschlägigen Fragen zu erledigen, so schwierig stellt sich meistens der experimentelle Theil der Untersuchung, die experimentelle Auffindung einer geeigneten Grundlage, aus der man die Resultate mit grösstmöglichster Genauigkeit mathematisch ableiten kann. Die Schwierigkeit liegt nicht zum grössten Theil in den Fehlerquellen bei der Messung der Lage der am Knochen fixirten Punkte in den verschiedenen Phasen der Bewegung, denn davon kann man sich durch stetige Vervollkommnung der Messapparate und durch grössere Sorgfalt bei der Messung bis zu gewissem Grade unabhängig machen, sondern die Schwierigkeit liegt im Wesentlichen in der zweckmässigen Wahl der starr mit dem Knochen verbundenen Punkte, deren Bewegung man messen will.

So unanfechtbar daher einerseits der Satz ist, dass man von einer einzigen experimentellen Messung als Grundlage ausgehend alle Fragen mit Hülfe mathematischer Interpretation der Messungen lösen kann, so muss man sich doch andererseits klar machen, dass man von nur einer Messungsreihe ausgehend die verschiedenen Fragen nicht mit derselben Genauigkeit beantworten kann, indem z. B. bei der mathematischen Behandlung in einer bestimmten Richtung geringe Fehler, die sich durch zweckmässigere Wahl der Punkte vielleicht ganz vermeiden liessen, im Verlaufe der Rechnung oder Construction sich multipliciren, während sie sich bei der mathematischen Behandlung nach einer anderen Richtung hin gegenseitig vernichten. Man muss daher von vornherein für jede bestimmte Untersuchung die Wahl der mit dem Knochen verbundenen Punkte so zu treffen suchen, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler einen möglichst geringen Einfluss auf die Genauigkeit der Resultate besitzen. Hierin liegt aber eben die Hauptschwierigkeit bei der exacten Untersuchung der Gelenkbewegungen, die jedoch niemals unüberwindliche Hindernisse bedingt. Man wird im gegebenen Fall nicht nur die Wahl der für die Messung zu benutzenden Punkte der mathematischen Behandlung anzupassen haben, sondern man wird andererseits nach der Messung die mathematische Methode dieser Messung anbequemen müssen, indem man unter

allen möglichen die heraussucht, welche im gegebenen Fall die grösste Genauigkeit verspricht. Man wird sich z. B. zu entscheiden haben, ob der Weg der Rechnung oder der Weg der Construction oder eine geeignete Abwechselung beider Wege zu der grösseren Genauigkeit führt.

Im vorliegenden Fall wurden aus den Messungen bei dem einen Versuch einmal ausschliesslich auf analytisch-geometrischem Wege, also durch Rechnung, und das anderemal auf darstellend-geometrischem Wege, also durch Construction, die Resultate abgeleitet. Die auf den verschiedenen Wegen gefundenen Resultate zeigten eine derartige Übereinstimmung, dass man in diesem Fall mit gleicher Genauigkeit auf die eine Weise oder auf die andere Weise verfahren konnte oder, wie es mit den Messungen des anderen beschriebenen Versuchs geschah, theils rechnend, theils constructiv.

Da der analytisch-geometrische Weg ein bekannterer sein dürfte, als die Methode der darstellenden Geometrie, und da ferner ersterer sich ungleich besser für die Darstellung eignet als der letztere, so soll die mathematische Behandlung für eine der beiden an verschiedenen Präparaten gewonnenen Messungsreihen mit Hülfe analytisch-geometrischer Methoden in extenso mitgetheilt und in Bezug auf die andere Messungsreihe den gewonnenen Resultaten nur ein kurzes Referat des etwas abweichenden eingeschlagenen Weges voraufgeschickt werden.

Es waren die beiden Messungsreihen ausschliesslich auf die Ermittelung der Achsenschwankungen eingerichtet. Die vorliegende Arbeit behandelt daher auch bloss diese Frage, indem die Beantwortung anderer wichtiger den Mechanismus des Ellenbogengelenks betreffender Fragen späteren Untersuchungen vorbehalten sein möge.

Bekanntlich kann man jede Bewegung aus kleinen Schraubenbewegungen zusammengesetzt denken. Ersetzt man jede unendlich kleine Verrückung durch eine Schraubenbewegung, so hat man in der stetigen Folge der Schraubenbewegungen die zu analysirende Bewegung selbst. Ersetzt man aber nur eine Folge von die Bewegung zusammensetzenden endlichen Verrückungen durch die zugehörige endliche Folge von Schraubenbewegungen, so hat man in letzterer nur mit gewisser Annäherung die Bewegung selbst. Jede Schrauben-

bewegung ist nun aber eine Zusammensetzung einer Rotation und einer Translation in der Richtung der Rotationsachse. Kommt die Bewegung, die man analysiren will, einer Parallelverschiebung sehr nahe, so überwiegt auf jedem herausgegriffenen kleinen Stück der Bewegung die Translation der entsprechenden Schraubenbewegung in dem Maasse die Rotation, dass man letztere vernachlässigen kann und dann schon in der Folge der Translationen eine Bewegung besitzt, welche der zu analysirenden sehr nahe kommt. Nähert sich die Bewegung einer Rotation um eine feste Achse, wie es bei der Bewegung im Ellenbogengelenk der Fall ist, indem man ja bisher diese Bewegung geradezu als Rotation auffasste, so wird auf jedem herausgegriffenen kleinen Stück der Bewegung die Rotation der entsprechenden Schraubenbewegung in dem Maasse die Translation überwiegen, dass man letztere nicht nur vernachlässigen kann, sondern sogar vernachlässigen muss, weil die Grösse derselben noch unter der Genauigkeitsgrenze der Messungen liegt. Man hat daher in diesem Falle die Gesammtbewegung als eine Folge kleiner Rotationen aufzufassen und wird damit die Bewegung im Ellenbogengelenk mit so grosser Annäherung treffen, als es sich bei den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern überhaupt erreichen lässt. Die Untersuchung hat sich dadurch a priori wesentlich vereinfacht, indem man nun nur nöthig hat, die Folge der successiven Rotationsachsen zu ermitteln.

Von vornherein kann man sich sagen, dass diese Rotationsachsen alle im Innern der Trochlea verlaufen müssen, da die Bewegung zweier diametral gegenüberliegender Punkte der Gelenkpfanne der Ulna im ganzen Verlaufe der Beugung und Streckung des Vorderarms in entgegengesetzter Richtung stattfindet. Da ferner die Trochlea abgesehen von ihrer schrägen Stellung mit gewisser Annäherung die Form eines Rotationskörpers aufweist, so sieht man auch weiter a priori ein, dass diese Rotationsachsen in der Nähe der Mittellinie und nicht am Rande im Innern der Trochlea verlaufen müssen. Es bleibt also für die Rotationsachsen im Innern der Trochlea nur ein sehr kleines Gebiet. Die successiven Rotationsachsen müssen infolge dessen, wenn sie sich nicht alle treffen, was unwahrscheinlich ist, in so grosser Nähe an einander vorüberlaufen, dass man ihre wahre Lage zu einander trotz der Genauigkeit der Messungen auch nicht

ermitteln kann. Man begeht daher einen erlaubten Fehler, wenn man diese Achsen alle durch denselben Punkt im Innern der Trochlea verlegt und nur ihre Richtungen bestimmt. Diese Annahme wird überdies durch das Experiment bestätigt indem schon Braune und Kyrklund (a. a. O. pag. 332) fanden, dass die successiven Rotationsachsen durch einen Punkt gehen, der etwa in der Mitte des Gelenkes, näher der medialen als lateralen Seite liegt.

Es reducirt sich somit die Aufgabe darauf, die Richtung einer Anzahl successiver Rotationsachsen zu bestimmen. Mit anderen Worten, wir denken uns die Bewegung im Ellenbogengelenk aus mehreren Rotationen zusammengesetzt, die um der Richtung nach verschiedene Achsen stattfinden. Die Gesammtheit dieser Rotationen stellt dann mit der bei der Genauigkeit unserer Messung überhaupt erreichbaren Annäherung den wirklichen Verlauf der Ellenbogenbewegung dar.

Bei jeder Rotation eines Körpers um eine feste Achse bewegen sich alle Punkte desselben in zu einander parallelen Ebenen, und zwar stehen dieselben alle senkrecht auf der Rotationsachse. Hat man also die gemeinsame Richtung der Ebenen gefunden, so hat man damit auch die gesuchte Richtung der Rotationsachse gewonnen. Die gemeinsame Richtung der Ebene findet man aber, wenn man irgend zwei Strecken, welche in verschiedenen der einander parallelen Ebenen liegen, mit ihren Anfangspunkten parallel nach ein und demselben Punkte des Raumes verschiebt; die Ebene, welche durch diese beiden verschobenen Strecken geht, ist dann auch allen diesen Ebenen parallel und steht ebenfalls senkrecht auf der Richtung der Rotationsachse. Da zwei Strecken genügen, um diese Ebene zu bestimmen, so hat man zur Bestimmung derselben nur die Verrückungen von zwei mit der Ulna fest verbundenen Punkten zu bestimmen. Es genügt also dazu, zwei Nadeln in die Ulna so unverrückbar fest einzutreiben, dass ihre Spitzen möglichst weit vom Gelenk entfernt sind. Diese beiden Nadelspitzen sollen der Kürze der Darstellung wegen mit N_1 und N_3 bezeichnet werden. Bewegt man nun bei fixirtem Humerus die Ulna von einer Stellung des Knochens in eine benachbarte Stellung, so werden N_1 und N_3, wie sie auch zum Gelenk liegen mögen, Curven beschreiben, die mit genügender Genauigkeit in zwei parallelen Ebenen liegen. Bezeichnet man mit $N_1^{(a)}$, $N_3^{(a)}$ die Punkte im Raume, an

denen sich vor dieser herausgegriffenen Bewegung N_1 und N_3 befanden, und mit $N_1^{(e)}$, $N_3^{(e)}$ die Punkte, an denen sie sich am Ende dieser Bewegung befinden, so liegen auch die beiden Strecken, von denen die eine die beiden Lagen $N_1^{(a)}$ und $N_1^{(e)}$ der Nadelspitze N_1 und die andere die beiden Lagen $N_3^{(a)}$ und $N_3^{(e)}$ der Nadelspitze N_3 verbindet, in diesen beiden parallelen Ebenen. Diese beiden Strecken mögen kurz durch $\overline{N_1^{(a)} N_1^{(e)}}$ und $\overline{N_3^{(a)} N_3^{(e)}}$ bezeichnet werden. Verlegt man dann $\overline{N_1^{(a)} N_1^{(e)}}$ und $\overline{N_3^{(a)} N_3^{(e)}}$ jede parallel mit sich selbst nach einem Punkte des Raumes, am zweckmässigsten nach dem Coordinatenanfang O selbst, so dass $\overline{N_1^{(a)} N_1^{(e)}}$ in $\overline{O N_1^{(a)\prime}}$ und $\overline{N_3^{(a)} N_3^{(e)}}$ in $\overline{O N_3^{(e)\prime}}$ übergeht, so ist dann die Ebene, welche durch $\overline{O N_1^{(e)\prime}}$ und $\overline{O N_3^{(e)\prime}}$ geht oder, was dasselbe ist, die Ebene, welche durch die drei Punkte O, $N_1^{(e)\prime}$, $N_3^{(e)\prime}$ geht, auch parallel jenen beiden Ebenen. Die Senkrechte, welche man im Coordinatenanfangspunkt O auf derselben errichtet, hat dann die Richtung der gesuchten Rotationsachse. Die Ebene lässt sich genauer durch O, $N_1^{(e)\prime}$ und $N_3^{(e)\prime}$ legen, wenn $N_1^{(e)\prime}$ und $N_3^{(e)\prime}$ nicht zu nahe an einander liegen, d. h. wenn der Winkel $N_1^{(e)\prime} O N_3^{(e)\prime}$ nicht zu klein ist. Dieser Winkel ist aber, wie man leicht einsieht, derselbe, unter dem die Nadelspitzen N_1, N_3 vom Gelenk aus erscheinen. Aus diesem Grunde wurden die beiden Nadeln derart in den Ulnaknochen eingebracht, dass ihre Spitzen so zum Gelenk gestellt waren, dass die von irgend einem Punkte des Gelenkes nach ihnen gezogenen Linien ungefähr einen rechten Winkel mit einander bildeten.

Bewegt man nun die Ulna von der extremen Streckstellung aus nach und nach bis zur extremen Beugestellung, indem man in verschiedenen Zwischenstellungen den Knochen festhält und dabei jedesmal die Lagen der Nadelspitzen N_1 und N_3 innerhalb irgend eines festgelegten räumlichen Coordinatensystems misst, so kann man aus den gemessenen Coordinaten der Nadelspitzen für die verschiedenen festgehaltenen Lagen des Knochens in der angegebenen Weise die Rotationsachsen konstruiren, welche zu den successiven Verrückungen der Ulna gehören und hat damit die Gesammtbewegung der Ulna analysirt. Man darf die successiven Verrückungen des Knochens nicht zu klein nehmen, weil dann die Punkte O, $N_1^{(e)\prime}$ und $N_3^{(e)\prime}$, welche die Lage der Bewegungsebenen bestimmen, zu nahe an einander rücken, wodurch die Genauigkeit der Ebenenbestimmung

sehr beeinträchtigt wird. Es ist auch hier in jedem einzelnen Falle der Gegenstand einer nothwendigen Nebenuntersuchung, zu ermitteln, wie gross die Verrückungen mindestens zu nehmen sind, damit die unvermeidlichen Ungenauigkeiten das Endresultat nicht illusorisch machen.

Bei dem Versuch, den wir unten zuerst beschreiben, hatten wir die Ulna während der Bewegung in 22 verschiedenen Stellungen festgehalten und jedesmal die Coordinaten von N_1 und N_3 gemessen. Wir haben also 21 Verrückungen gemacht. Eine Construction der 21 Rotationsachsen ergab aber das Resultat, dass die Verrückungen für die erreichbare Genauigkeit bei den Messungen zu klein angenommen waren. Daher sind nicht die Verrückungen verwendet worden, die zu zwei aufeinanderfolgenden der gemessenen Zwischenstellungen gehören, sondern es ist alternirend immer eine Stellung unbenutzt geblieben und eine zur Construction benutzt worden. Da wir die 22 Stellungen mit den Ziffern 1 bis 22 numerirt haben, so haben wir also die Verrückungen $\overline{1, 3}$; $\overline{3, 5}$ u. s. w. in Betracht gezogen. Beim zweiten Versuch waren überhaupt nur 12 Stellungen der Ulna gemessen, woraus sich 11 brauchbare Verrückungen ergaben.

Vor der Beschreibung der Messungen in extenso soll noch erwähnt werden, dass, obgleich zwei Nadeln zur Auffindung der Richtungen der Rotationsachsen genügen, doch noch die Curve einer dritten Nadel, deren Spitze N_2 genannt ist, gemessen wurde. Diese dritte Nadel war so in der Ulna befestigt worden, dass ihre Spitze N_2 in die Richtung der Verbindungslinie der Nadelspitze N_1 mit einem Punkte a auf der medialen Aussenfläche der Trochlea, der nicht sehr weit vom medialen Austritt der bisher angenommenen einzigen Bewegungsachse entfernt war, fiel. Ausserdem lag N_2 gerade in der Mitte zwischen N_1 und a, so dass man aus den Curven für N_1 und N_2 leicht die Bewegungscurve des Punktes a construiren kann. Die Gestalt dieser hinterher construirten Curve, wie sie für den ersten Versuch aus Figur 1 und 2, für den zweiten aus Figur 5 und 6 ersichtlich ist, bestätigt die Annahme, dass die Rotationsachsen alle in der Nähe der Mittellinie der Trochlea dieselbe durchschneiden.

Die beiden nunmehr zu beschreibenden Versuche waren in vollständig übereinstimmender Weise angeordnet und ausgeführt worden. Bei dem ersten war Herr stud. med. Mohr, bei dem zweiten Herr stud. med. Bach behülflich.

Erster Versuch.

Die Nadelspitzen N_1 und N_2 besassen eine Entfernung von 219,5 mm, so dass N_1 439 mm von dem Punkte a auf der Aussenfläche der Trochlea entfernt war. Zur genauen Angabe der Lage der drei unverrückbar fest mit dem Ulnaknochen verbundenen Nadelspitzen N_1, N_2, N_3 mögen folgende Daten dienen:

N_1 war 186 mm vom processus styloideus ulnae,
336 » » foramen nutritium ulnae,
467 » » äussersten Punkt des Olecranon,
N_2 war 36 » » processus styloideus ulnae,
147 » » foramen nutritium ulnae,
248 » » äussersten Punkt des Olecranon, und
N_3 war 298 » » processus styloideus ulnae,
215 » » foramen nutritium ulnae und
212 » » äussersten Punkt des Olecranon entfernt.

Die Coordinaten, welche zu den successiven Lagen der Nadelspitze N_1 gehören, sollen x_1, y_1, z_1, die zu N_2 gehörenden x_2, y_2, z_2, die zu N_3 gehörenden x_3, y_3, z_3 und endlich die zum Punkte a gehörenden x_a, y_a, z_a heissen. Die Coordinaten x_a, y_a, z_a wurden nicht gemessen, sondern hinterher berechnet aus den Coordinaten N_1 und N_2. Da a von N_2 ebenso weit als N_2 von N_1 und ausserdem auf der Verlängerung der Verbindungsstrecke $\overline{N_1 N_2}$ lag, so hat man die Formeln zur Berechnung der Coordinaten x_a, y_a, z_a:

$$x_a = 2x_2 - x_1$$
$$y_a = 2y_2 - y_1$$
$$z_a = 2z_2 - z_1 .$$

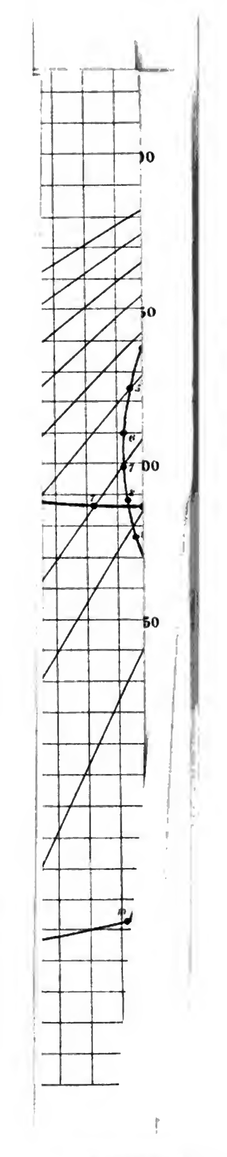
Es wurden 22 Stellungen der Ulna festgehalten und die zugehörigen Coordinaten für N_1, N_2, N_3 gemessen, wie sie in folgender Tabelle niedergelegt sind (die Zahlen bedeuten Millimeter):

y_a	z_a
·6,5	201,5
·7	202,5
·7	203
·7	204
·7,5	204,5
·7,5	205
·7,5	205,5
·8	205,5
·8	206
·8	206,5
·8	207
·7,5	207
·7	207,5
·6,5	207,5
·6	207
·5	207
64	206,5
63	205,5
62	205
61	204,5
59,5	203,5
58	203

Humerus
emselben

er zu der

$\overline{N_3^{(a)} N_3^{(e)}}$
emselben
zu liegen
einfach.
so erhält
akte $N_1^{(e)\prime}$





No.	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_a	y_a	z_a
1	1	297,5	282	187,5	182	242	305	123,5	5,5	371,5	66,5	201,5
2	23	315	313,5	197,5	191	258	299,5	136	13	372	67	202,5
3	45	330	343	209	198,5	273	294	148,5	21,5	372,5	67	203
4	74	342,5	377,5	223,5	205	291	289	162,5	31,5	373	67	204
5	103	354	407,5	238	209,5	306	284,5	176,5	42,5	373,5	67,5	204,5
6	135	356	437	254,5	212	321	282	189,5	53,5	374	67,5	205
7	169	358	465,5	272	213	335,5	281,5	201	66,5	375	67,5	205,5
8	201	357	487,5	288,5	212,5	346,5	282,5	211,5	78	375,5	68	205,5
9	243	355	512	309,5	211,5	359	285,5	223,5	90	376	68	206
10	282,5	346,5	533	329,5	207,5	369,5	290	234	104	377	68	206,5
11	329,5	334,5	555,5	353,5	199,5	381	296	244	120,5	378	68	207
12	375,5	313	571,5	377	190,5	389	302,5	253	137,5	379	67,5	207
13	416	293,5	582	398	180	394,5	309	259,5	152,5	379,5	67	207,5
14	460,5	267	589,5	420,5	167	398	318	265,5	169	380,5	66,5	207,5
15	496,5	243	592,5	439	154,5	399,5	326	269	181,5	381	66	207
16	526	219	592,5	454	142	399,5	335	272	194	382	65	207
17	562	189,5	587,5	472	126,5	397	347	273,5	208,5	382,5	64	206,5
18	593,5	157,5	581	488,5	110	393	360,5	274	221,5	383	63	205,5
19	622,5	126	569,5	503	94	387	374	273,5	232	383	62	205
20	648	93	554,5	515,5	77	379,5	389	271	242	383	61	204,5
21	675,5	53	536	529	56	369,5	406,5	267	252,5	383	59,5	203,5
22	694,5	17,5	513,5	538,5	37,5	358	425,5	261	259	382,5	58	203

Ausserdem wurden, um die Lage der Ulna gegen den Humerus festzulegen, zwei Punkte α, β der Humeruslängsachse in demselben Coordinatensystem gemessen. Es ergab sich:

$$x_\alpha = 453 \qquad x_\beta = 528{,}5$$
$$y_\alpha = 15{,}5 \quad \text{und} \quad y_\beta = -36{,}5$$
$$z_\alpha = 212{,}5 \qquad z_\beta = 225 \;.$$

Figur 1 gibt die XY-Projection, Figur 2 die XZ-Projection der zu der obenstehenden Tabelle gehörenden Curven.

Das parallele Verschieben der Strecken $\overline{N_1^{(a)} N_1^{(e)}}$ und $\overline{N_3^{(a)} N_3^{(e)}}$ nach dem Coordinatenanfangspunkt, so dass $N_1^{(a)}$ und $N_3^{(a)}$ mit demselben zusammenfallen und $N_1^{(e)}$ resp. $N_3^{(e)}$ nach $N_1^{(e)'}$ resp. $N_3^{(e)'}$ zu liegen kommen, gestaltet sich auf dem Wege der Rechnung sehr einfach. Da der Coordinatenanfang die Coordinaten 0, 0, 0 besitzt, so erhält man die Coordinaten x_1', y_1', z_1' resp. x_3', y_3' z_3' für die Punkte $N_1^{(e)'}$

resp. $N_3^{(e)'}$, indem man die entsprechenden Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Stellung $N_1^{(a)}$ von denen der Stellung $N_1^{(e)}$, resp. die Coordinaten x_3, y_3, z_3 der Stellung $N_3^{(a)}$ von denen der Stellung $N_3^{(e)}$ subtrahirt.

Für die erste Verrückung (1, 3) erhält man daher als Coordinaten der Punkte $N_1^{(e)'}$ und $N_3^{(e)'}$ (siehe die Tabelle auf pag. 13):

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^{(3)} - x_1^{(1)} = 45 - 4 = 41 \\ y_1' &= y_1^{(3)} - y_1^{(1)} = 330 - 297{,}5 = 32{,}5 \\ z_1' &= z_1^{(3)} - z_1^{(1)} = 343 - 282 = 61 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_3' &= x_3^{(3)} - x_3^{(1)} = 294 - 305 = -11 \\ y_3' &= y_3^{(3)} - y_3^{(1)} = 148{,}5 - 123{,}5 = 25 \\ z_3' &= z_3^{(3)} - z_3^{(1)} = 21{,}5 - 5{,}5 = 16\ . \end{aligned}$$

Auf diese Weise sind die Coordinaten x_1', y_1', z_1' und x_3', y_3', z_3' der Punkte $N_1^{(e)'}$ und $N_3^{(e)'}$ für die 11 Verrückungen (1, 3), (3, 5) u. s. w. bis (19, 21), (21, 22) berechnet worden und in folgender Tabelle niedergelegt:

Verrückung	x_1'	y_1'	z_1'	x_3'	y_3'	z_3'
(1,3)	+ 41	+ 32,5	+ 61	− 11	+ 25	+ 16
(3,5)	+ 58	+ 21	+ 64,5	− 9,5	+ 28	+ 21
(5,7)	+ 66	+ 7	+ 58	− 3	+ 24,5	+ 24
(7,9)	+ 74	− 3	+ 46,5	+ 4	+ 22,5	+ 23,5
(9,11)	+ 86,5	− 23,5	+ 43,5	+ 10,5	+ 20,5	+ 30,5
(11,13)	+ 86,5	− 38	+ 26,5	+ 13	+ 15,5	+ 32
(13,15)	+ 80,5	− 50,5	+ 10,5	+ 17	+ 9,5	+ 29
(15,17)	+ 65,5	− 53,5	− 5	+ 21	+ 4,5	+ 27
(17,19)	+ 60,5	− 63,5	− 18	+ 27	0	+ 23,5
(19,21)	+ 53	− 73	− 33,5	+ 32,5	− 6,5	+ 20,5
(21,22)	+ 19	− 35,5	− 22,5	+ 19	− 6	+ 6,5

Die Gleichung der Ebene, welche durch den Coordinatenanfang O und die beiden Punkte $N_1^{(e)'}$ und $N_3^{(e)'}$, d. h. durch die drei Punkte mit den Coordinaten 0, 0, 0; x_1', y_1', z_1'; x_3', y_3', z_3' in Bezug auf jede der 11 Verrückungen geht, hat die Gleichung, wie die analytische Geometrie des Raumes lehrt:

$$(y_1' z_3' - y_3' z_1')\, x + (z_1' x_3' - z_3' x_1')\, y + (x_1' y_3' - x_3' y_1')\, z = 0\ ,$$



wo x, y, z die laufenden Coordinaten der Ebene bedeuten. Die durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Normale zu dieser Ebene besitzt die beiden Gleichungen:

$$y = \frac{z_1' x_3' - z_3' x_1'}{y_1' z_3' - y_3' z_1'} \, x$$

$$z = \frac{x_1' y_3' - x_3' y_1'}{y_1' z_3' - y_3' z_1'} \, x \, .$$

Man hat also nur die zu jeder der 11 Verrückungen gehörenden und in der Tabelle pag. 13 aufgezeichneten Werthe für x_1', y_1', z_1', x_3', y_3', z_3' einzusetzen und erhält dann aus den obigen beiden Gleichungen die Gleichungen für die zugehörige Rotationsachse, welche in diesem Fall durch den Coordinatenanfangspunkt gelegt ist.

Für die Ausdrücke $(y_1' \, z_3' - y_3' \, z_1')$, $(z_1' \, x_3' - z_3' \, x_1')$ und $(x_1' \, y_3' - x_3' \, y_1')$ berechnet man bei den 11 Verrückungen durch Einsetzen der Werthe der vorigen Tabellen folgende Grössen:

Verrückung	$y_1' z_3' - y_3' z_1'$	$z_1' x_3' - z_3' x_1'$	$x_1' y_3' - x_3' y_1'$
(1,3)	— 1005	— 1327	+ 1382,5
(3,5)	— 1365	— 1830,75	+ 1823,5
(5,7)	— 1253	— 1758	+ 1638
(7,9)	— 1116,75	— 1553	+ 1677
(9,11)	— 1608,5	— 2181,5	+ 2020
(11,13)	— 1626,75	— 2423,5	+ 1834,75
(13,15)	— 1564,25	— 2156	+ 1623,25
(15,17)	— 1422	— 1873,5	+ 1418,25
(17,19)	— 1492,25	— 1907,75	+ 1714,5
(19,21)	— 1714,25	— 2175,25	+ 2028
(21,22)	— 365,75	— 551	+ 560,5

Alle diese Rotationsachsen gehen durch den Coordinatenanfangspunkt. Man kann sie daher als Erzeugende eines Kegels auffassen, der seine Spitze im Coordinatenanfangspunkt besitzt. Dieser Kegel möge Achsenkegel heissen.

Zur besseren Darstellung des Achsenkegels bringen wir denselben mit einer Kugel zum Schnitt, deren Mittelpunkt ebenfalls mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfallen möge und deren Radius 200 mm gross sein soll; dieselbe besitzt die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 40000 \, .$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte jeder der 11 Rotationsachsen mit der Kugel sind die gemeinschaftlichen Wurzeln der drei Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 40000$$

$$y = \frac{z_1' x_3' - z_3' x_1'}{y_1' z_3' - y_3' z_1'} x$$

$$z = \frac{x_1' y_3' - x_3' y_1'}{y_1' z_3' - y_3' z_1'} x .$$

Da die erste dieser drei Gleichungen vom zweiten Grade ist, so giebt es zwei Lösungssysteme x_0, y_0, z_0, entsprechend dem zweiten Schnittpunkt der rückwärts über den Coordinatenanfangspunkt hinaus verlängerten Rotationsachse mit der Kugel. Auf das zweite Lösungssystem soll keine Rücksicht genommen werden, da das zugehörige Schnittpunktsystem nur das zum ersten Schnittpunktsystem symmetrische ist. Es berechnen sich als Coordinaten x_0, y_0, z_0 des ersten Schnittpunktsystems, d. h. als gemeinschaftliche Wurzeln der obigen drei Gleichungen:

$$x_0 = -\frac{200\,(y_1' z_3' - y_3' z_1')}{\sqrt{(y_1' z_3' - y_3' z_1')^2 + (z_1' x_3' - z_3' x_1')^2 + (x_1' y_3' - x_3' y_1')^2}}$$

$$y_0 = -\frac{200\,(z_1' x_3' - z_3' x_1')}{\sqrt{(y_1' z_3' - y_3' z_1')^2 + (z_1' x_3' - z_3' x_1')^2 + (x_1' y_3' - x_3' y_1')^2}}$$

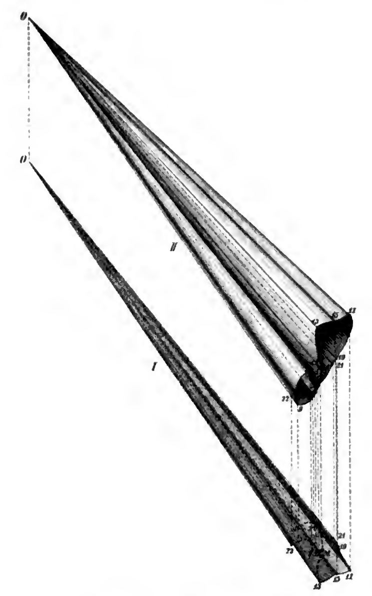
$$z_0 = -\frac{200\,(x_1' y_3' - x_3' y_1')}{\sqrt{(y_1' z_3' - y_3' z_1')^2 + (z_1' x_3' - z_3' x_1')^2 + (x_1' y_3' - x_3' y_1')^2}} .$$

Setzt man die Werthe x_1', y_1', z_1'; x_3', y_3', z_3' inbezug auf jede der 11 Verrückungen ein, so ergiebt sich für x_0, y_0, z_0 folgende Tabelle:

	x_0	y_0	z_0
(1,3)	+ 93	+ 122,6	— 128
(3,5)	+ 93,5	+ 126	— 124,5
(5,7)	+ 92,5	+ 130	— 121
(7,9)	+ 88	+ 121,5	— 131
(9,11)	+ 95	+ 129	— 119,5
(11,13)	+ 94,5	+ 140,5	— 106
(13,15)	+ 100	+ 137,5	— 104,5
(15,17)	+ 103,5	+ 136,5	— 102,5
(17,19)	+ 100	+ 128,5	— 115,5
(19,21)	+ 99	+ 125	— 118
(21,22)	+ 86	+ 128	— 128,5



Man hat somit durch die Kugel einen sphärisch begrenzten Kegel abgeschnitten, dessen Basis die durch x_0, y_0, z_0 definirte sphärische Curve und dessen Spitze der Coordinatenanfangspunkt ist. In der folgenden Figur ist die *XY*-Projection und die *XZ*-Projection, d. h. die Ansicht des Kegels von oben und von vorn bei der gewählten Lage unseres Coordinatensystems aufgezeichnet.



Figur 8. Auf $^2/_3$ verkleinert.

Achsenkegel beim ersten Versuch.

I ist die *XY*-Projection, d. h. die Ansicht von oben,
II die *XZ*-Projection, d. h. die Ansicht von vorn.
(Die Achsen sind mit der zur Endstellung jeder Verrückung gehörenden Nummer versehen worden.)

Um eine noch deutlichere Darstellung des Kegels zu gewinnen, die nicht nur einen besseren Einblick in die Gestalt desselben gewährt, sondern auch ohne Weiteres einen Vergleich mit dem beim zweiten Versuch resultirenden Achsenkegel gestattet, haben wir denselben noch ausserdem mit einer Ebene geschnitten, die senkrecht auf einer in gewissen Sinne ausgezeichneten Richtung, die wir Mittelstellung nennen wollen, steht. Diese Mittelstellung ist nämlich die Richtung der Rotationsachse, welche man erhält, wenn man die Bewegung der Ulna aus der extremen Streckstellung in die extreme Beugestellung als eine Rotation um eine Achse auffasst. Diese Mittelstellung deckt sich also mit der von den meisten Autoren angenommenen einzigen Bewegungsachse. Die Richtung der Mittelstellung wird auf genau dieselbe Weise gefunden, wie bei allen anderen Rotationsachsen, nur dass man hier als Anfangs- und Endstellung der Verrückung die extremen Stellungen der Ulna aufzufassen hat. Es ergab sich das zufällige Resultat, dass die Mittelstellung in ihrer Richtung mit der zur Verrückung (9,11) gehörenden Rotationsachse zusammenfällt, also die Gleichungen besitzt:

$$y = \frac{2423,5}{1626,75} x$$

$$z = -\frac{1834,75}{1626,75} x .$$

Der Punkt der Mittellinie, welcher 200 mm vom Coordinatenanfangspunkt entfernt ist, hat nach der Tabelle (pag. 16) die Coordinaten $x_0 = 95$, $y_0 = 129$, $z_0 = -119,5$.

Die in diesem Punkte auf der Mittellinie senkrecht stehende Ebene besitzt die Gleichung:

$$-1608,5\, x - 2181,5\, y + 2020\, z =$$

$$-1608,5 \,.\, 95 - 2181,5 \,.\, 129 - 2020 \,.\, 119,5$$

oder

$$1608,5\, x + 2181,5\, y - 2020\, z = 675611 .$$

Bringen wir nun die zehn anderen Rotationsachsen mit dieser Ebene zum Schnitt, so haben wir das gemeinschaftliche Lösungssystem ξ, η, ζ der drei Gleichungen:

$$1608{,}5\,x + 2181{,}5\,y - 2020\,z = 675611$$

$$y = \frac{z_1'\,x_3' - z_3'\,x_1'}{y_1'\,z_3' - y_3'\,z_1'}\,x$$

$$z = \frac{x_1'\,y_3' - x_3'\,y_1'}{y_1'\,z_3' - y_3'\,z_1'}\,x$$

aufzusuchen. Man berechnet

$$\xi = \frac{675611\,(y_1'\,z_3' - y_3'\,z_1')}{1608{,}5\,(y_1'z_3' - y_3'z_1') + 2181{,}5\,(z_1'x_3' - z_3'x_1') - 2020\,(x_1'y_3' - x_3'y_1')}$$

$$\eta = \frac{675611\,(z_1'\,x_3' - z_3'\,x_1')}{1608{,}5\,(y_1'z_3' - y_3'z_1') + 2181{,}5\,(z_1'x_3' - z_3'x_1') - 2020\,(x_1'y_3' - x_3'y_1')}$$

$$\zeta = \frac{675611\,(x_1'\,y_3' - x_3'\,y_1')}{1608{,}5\,(y_1'z_3' - y_3'z_1') + 2181{,}5\,(z_1'x_3' - z_3'x_1') - 2020\,(x_1'y_3' - x_3'y_1')}.$$

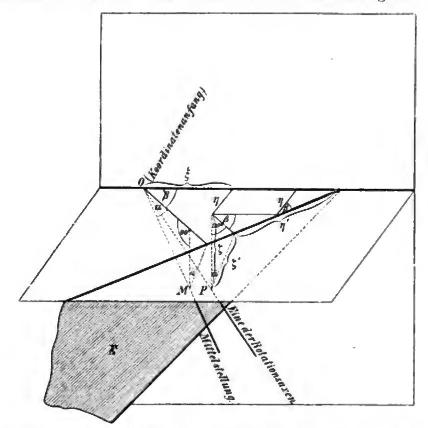
Die Werthe eingesetzt, ergiebt sich folgende Tabelle für ξ, η, ζ:

Verrückung	ξ	η	ζ
(1,3)	93	122,8	— 127,9
(3,5)	93,4	125,2	— 124,7
(5,7)	92,4	129,6	— 120,8
(7,9)	88	122,4	— 132,2
(9,11)	95	129	— 119,5
(11,13)	94,7	141,1	— 106,8
(13,15)	100,7	138,9	— 104,5
(15,17)	103,9	136,9	— 103,6
(17,19)	100,6	128,6	— 115,6
(19,21)	99,9	126,7	— 118,2
(21,22)	84,6	127,4	— 129,6

Diese Coordinaten ξ, η, ζ können in ihrer Grösse nur wenig verschieden sein von den früher berechneten x_0, y_0, z_0, weil die schneidende Ebene Tangentialebene im Schnittpunkte (9,11) an die Kugel ist.

Die Coordinaten ξ, η, ζ geben die Lage der Schnittpunkte des Achsenkegels mit der Ebene in unserem Coordinatensystem an. Es ist nun nöthig, diese ebene Schnittcurve nicht in ihren Projectionen, sondern in ihren wahren Dimensionen zu bestimmen. Dies erreicht man mit Hülfe der ξ, η, ζ, indem man noch den Winkel α hinzunimmt, den die Mittelstellung mit ihrer XY-Projection bildet und den Winkel β, um den diese Projection gegen die X-Achse geneigt ist.

Bezeichnet man mit η', ζ' zwei rechtwinklige Coordinaten in der Schnittebene E für den Punkt P des Achsenkegels mit den



Coordinaten ξ, η, ζ in allen Coordinatensystemen, so hat man, wie aus der Figur ersichtlich ist:

$$\eta' = -\frac{\eta}{\cos\beta} + \zeta \cdot \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta$$

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\cos\alpha} .$$

Nun berechnet sich $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\beta$ aus den Coordinaten $\xi_{(9,11)} = 95$, $\eta_{(9,11)} = 129$, $\zeta_{(9,11)} = -119{,}5$ des Schnittpunktes M der Mittellinie mit der Ebene E folgendermassen. Es ist, da M 200 mm von O entfernt ist:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\xi^2_{(9,11)} + \eta^2_{(9,11)}}}{200} = \frac{\sqrt{95^2 + 129^2}}{200} ,$$

$$\cos\beta = \frac{\xi_{(9,11)}}{\sqrt{\xi^2_{(9,11)} + \eta^2_{(9,11)}}} = \frac{95}{\sqrt{95^2 + 129^2}} ,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-\zeta_{(9,11)}}{\sqrt{\xi^2_{(9,11)} + \eta^2_{(9,11)}}} = \frac{119{,}5}{\sqrt{95^2 + 129^2}} ,$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\eta_{(9,11)}}{\xi_{(9,11)}} = \frac{129}{95} .$$

Daraus berechnet sich

$$\frac{1}{\cos\alpha} = 1,248 \;,$$

$$\frac{1}{\cos\beta} = 1,686 \;,$$

$$\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta = 1,013 \;,$$

und wir erhalten die Coordinatentransformationsformeln:

$$\eta' = -\,1,686\,\eta + 1,013\,\zeta$$

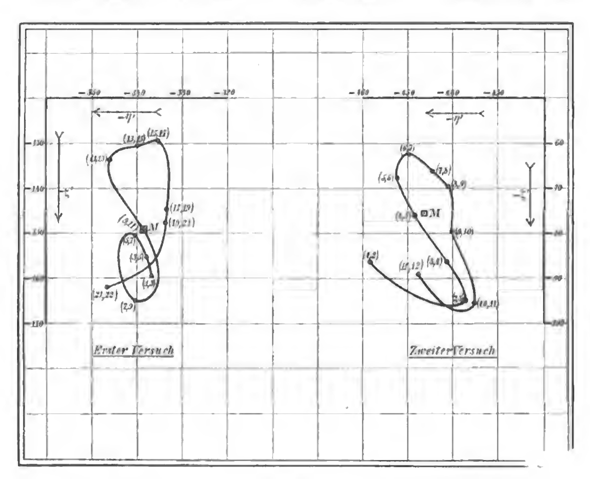
$$\zeta' = \quad 1,248\,\zeta \;.$$

Setzt man nun der Reihe nach die Werthe für η und ζ aus der Tabelle von pag. 18 ein, so erhält man entsprechend den elf Verrückungen als Coordinaten η', ζ' der ebenen Schnittcurve des Achsenkegels in der Entfernung 200 mm von der Spitze:

Verrückung	η'	ζ'
(1,3)	— 336,5	— 159,6
(3,5)	— 337,5	— 155,7
(5,7)	— 340,7	— 150,7
(7,9)	— 340,2	— 164,9
(9,11)	— 338,5	— 149,1
(11,13)	— 346	— 133,3
(13,15)	— 340	— 130,5
(15,17)	— 335,7	— 129,3
(17,19)	— 333,8	— 144,2
(19,21)	— 333,4	— 147,2
(21,22)	— 346,1	— 161,7

Die zugehörige Curve findet sich in Figur 4 aufgezeichnet (pag. 22). Die Lage des gemeinsamen Schnittpunktes der Achsen, d. h. der Spitze des Achsenkegels inbezug auf diese ebene Curve findet man, indem man in dem mit (9,11) oder M bezeichneten Schnittpunkt

der Mittelstellung ein Loth nach rückwärts errichtet. Die Spitze des Achsenkegels ist dann auf diesem Loth in der Entfernung von



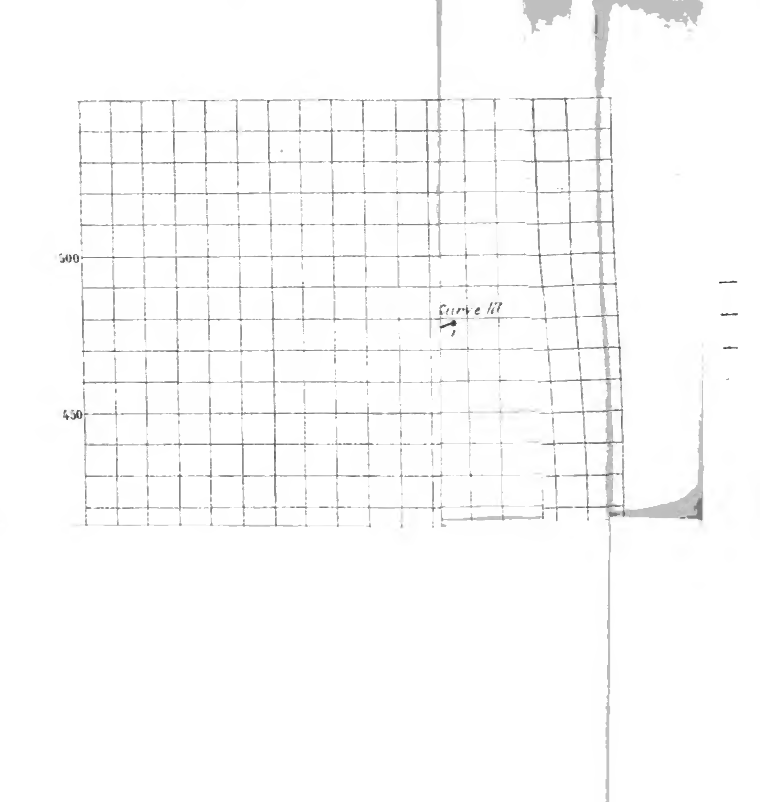
Figur 4.

200 mm zu finden.

Zweiter Versuch.

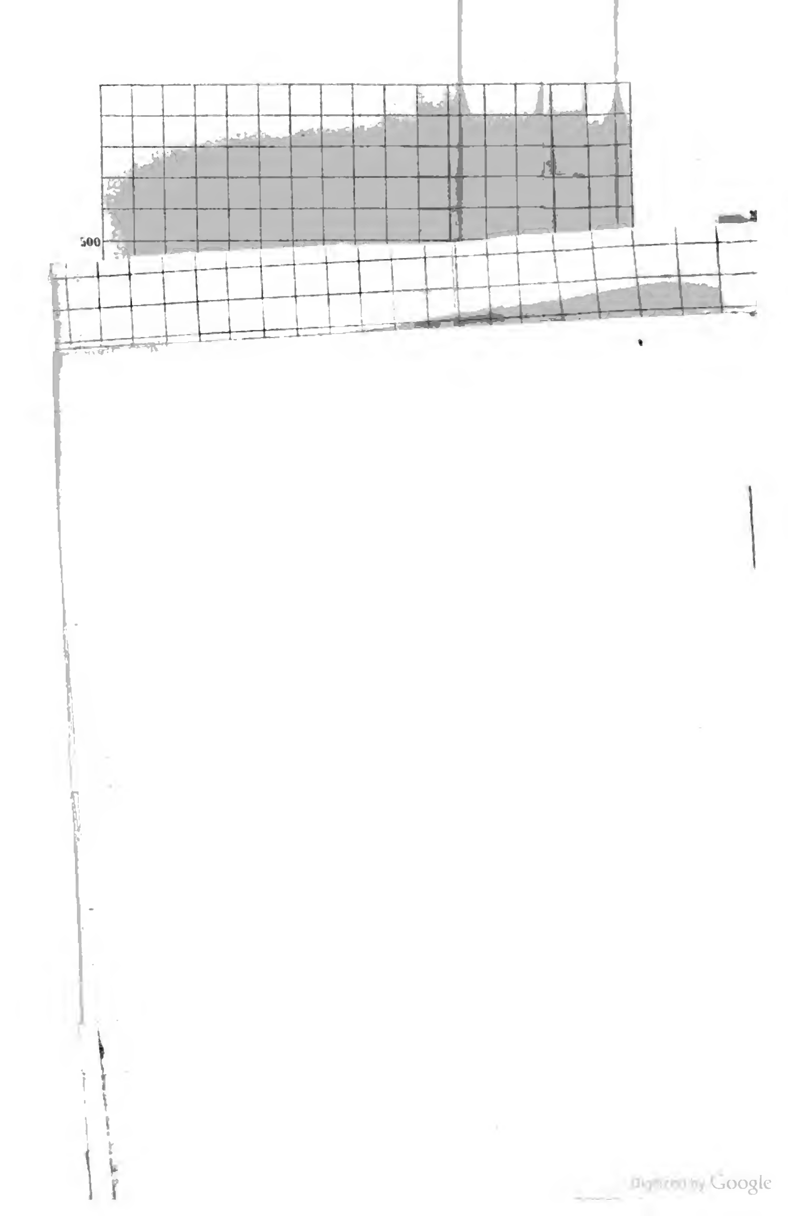
Der zweite Versuch wurde auf genau dieselbe Weise wie der erste angestellt. Da auch genau dieselben Bezeichnungen verwendet werden, so kann die Darstellung, ausser der Anführung der gewonnenen Resultate, sich auf einige Angaben der Messungsgrössen beschränken.

Es wurden für zwölf Stellungen der Ulna während der successiven Überführung derselben aus der extremen Streckstellung in die extreme Beugestellung die Coordinaten der drei Nadelspitzen N_1, N_2, N_3 gemessen und daraus wiederum die Coordinaten für einen Punkt a auf der medialen Aussenfläche der Trochlea berechnet. Diese Coordinaten sind in folgender Tabelle anfgezeichnet.


500
450
Curve III
1

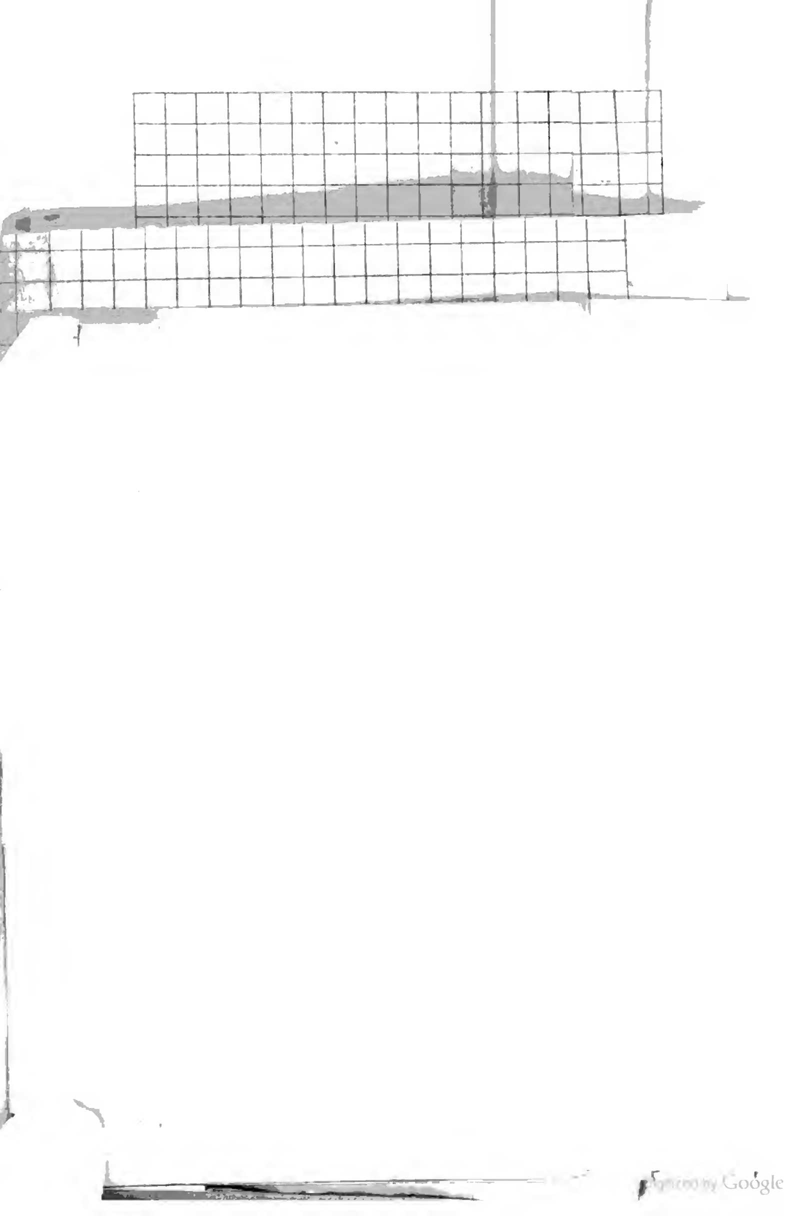
No.	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3		x_a	y_a	z_a
1	10	179	319	239	289,5	288	412	478	6	[illegible]	468	400	257
2	28,5	162,5	370	248	281	313,5	384,5	465	10		467,5	399,5	257




500

No.	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3		x_a	y_a	z_a
1	10	179	319	239	289,5	288	112	178	6	[illegible]	168	100	257
2	28,5	162,5	370	218	281	313,5	384,5	165	10	[illegible]	167,5	399,5	257

200



No.	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3		x_a	y_a	z_a
1	10	179	319	239	289,5	288	112	178	6	Hieraus infolge der Formeln: $x_a = 2x_2 - x_1$, $y_a = 2y_2 - y_1$, $z_a = 2z_2 - z_1$	468	400	257
2	28,5	162,5	370	248	281	313,5	384,5	465	10		467,5	399,5	257
3	85	137,5	470,5	276	268,5	364	311	433	24		467	399,5	257,5
4	175,5	131	579	321	265,5	419	291	391	57,5		466,5	400	259
5	284	146	662,5	375,5	273,5	461,5	254,5	354	105,5		467	401	260,5
6	394,5	176,5	714	431	289	487,5	234	325	159		467,5	401,5	261
7	497	216	737	482,5	309	499,5	227	304	212,5		468	402	262
8	583	257,5	738	526	330	500	230	288	260,5		469	402,5	262
9	661	301	727	565,5	352	494,5	242	276	306,5		470	403	262
10	760	370,5	682,5	616,5	387	472	269	265	362		473	403,5	264,5
11	821	428	634,5	647,5	416	448	299	260	401		474	404	264,5
12	888	506	543	681,5	455	402	351	261	447		475	404	261

Zwei Punkte α, β der Humerusachse besassen in dem jetzt verwendeten Coordinatensystem die Coordinaten:

$$x_\alpha = 468 \qquad x_\beta = 673$$
$$y_\alpha = 400 \quad \text{und} \quad y_\beta = 508$$
$$z_\alpha = 257 \qquad z_\beta = 257 \,.$$

In Figur 5 und 6 sind die zugehörigen Curven aufgezeichnet.

Die analoge Tabelle für die x_1', y_1', z_1'; x_3', y_3', z_3' ist folgende:

Verrückung	x_1'	y_1'	z_1'		x_3'	y_3'	z_3'
(1,2)	+ 18,5	— 16,5	+ 51	und	— 27,5	— 13	+ 4
(2,3)	+ 56,5	— 25	+ 100,5		— 43,5	— 32	+ 14
(3,4)	+ 90,5	— 6,5	+ 108,5		— 50	— 42	+ 33,5
(4,5)	+ 108,5	+ 15	+ 83,5		— 36,5	— 37	+ 48
(5,6)	+ 110,5	+ 30,5	+ 54,5		— 20,5	— 29	+ 53,5
(6,7)	+ 102,5	+ 39,5	+ 23		— 7	— 21	+ 53,5
(7,8)	+ 86	+ 41,5	+ 1		+ 3	— 16	+ 48
(8,9)	+ 78	+ 43,5	— 11		+ 12	— 12	+ 46
(9,10)	+ 99	+ 69,5	— 44,5		+ 27	— 11	+ 55,5
(10,11)	+ 61	+ 57,5	— 48		+ 30	— 5	+ 39
(11,12)	+ 67	+ 78	— 91,5		+ 52	+ 1	+ 46

Die mathematische Discussion ergab dann wieder den Achsenkegel und eine zugehörige Mittelstellung, die diesmal nicht, wie früher, zufällig mit einer Achse zusammenfiel. Dieser Kegel wurde ganz

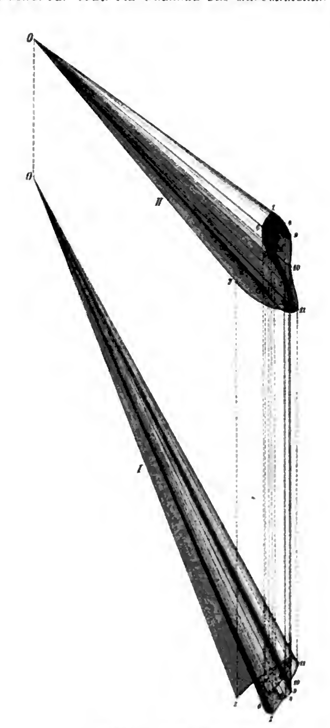
wie der erste mit einer Kugel, die die Spitze des Kegels als Mittelpunkt und den Radius 200 m besass, geschnitten. Als Coordinaten der Schnittpunkte x_0, y_0, z_0 wurde erhalten:

	x_0	y_0	z_0
(1,2)	+ 67,5	— 170	— 80,5
(2,3)	+ 85	— 157	— 87,5
(3,4)	+ 83,5	— 163	— 80
(4,5)	+ 78,5	— 169	— 71
(5,6)	+ 76,5	— 172,5	— 62,5
(6,7)	+ 79,5	— 174	— 58
(7,8)	+ 83,5	— 170	— 61,5
(8,9)	+ 85,5	— 168	— 64,5
(9,10)	+ 85,5	— 165	— 74,5
(10,11)	+ 87,5	— 158	— 89
(11,12)	+ 77	— 165	— 83
Mittelstellung	+ 80,5	— 168,5	— 70,5

Die nebenstehende Figur 7 giebt eine Darstellung dieses sphärisch begrenzten Kegels, indem die obere Figur die XZ-Projection, d. h. die Ansicht von vorn, und die untere Figur die XY-Projection, also die Ansicht von oben bietet.

Auf der Mittelstellung wurde wieder in der Entfernung von 200 mm eine senkrechte Ebene errichtet. Die Schnittpunkte dieser Ebene mit den gemessenen Erzeugenden des Achsenkegels sollen wiederum die Coordinaten ξ, η, ζ besitzen, dann erhält man die Tabelle:

Verrückung	ξ	η	ζ
(1,2)	+ 67,5	— 170	— 80,5
(2,3)	+ 86	— 158,5	— 88,5
(3,4)	+ 83,5	— 163	— 80,5
(4,5)	+ 78,5	— 169	— 71
(5,6)	+ 77	— 173,5	— 63
(6,7)	+ 79,5	— 174	— 57,5
(7,8)	+ 84	— 170,5	— 62
(8,9)	+ 86	— 168,5	— 65
(9,10)	+ 85	— 164,5	— 74
(10,11)	+ 87	— 157,5	— 89
(11,12)	+ 77	— 164,5	— 83
Mittelstellung	+ 80,5	— 168,5	— 70,5



Figur 7. Auf ²/₃ verkleinert

Achsenkegel beim zweiten Versuch.

I ist die *XY*-Projection, d. h. die Ansicht von oben,
II die *XZ*-Projection, d. h. die Ansicht von vorn.

(Die Achsen sind mit der zur Endstellung jeder Verrückung gehörenden Nummer versehen worden. *M* ist die Mittelstellung.)

Diese Coordinaten können natürlich wiederum nur sehr wenig von den Coordinaten x_0, y_0, z_0 verschieden sein.

Für die Coordinaten η', ζ' dieser Schnittpunkte inbezug auf ein Coordinatensystem innerhalb der Schnittebene hat man wiederum die Formeln:

$$\eta' = \frac{\eta}{\cos\beta} + \zeta \cdot \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta$$

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\cos\alpha} \, .$$

In der ersten Formel erscheint diesmal das erste Glied positiv, weil von Anfang an beim zweiten Versuch zufälliger Weise die entgegengesetzte Richtung als beim ersten Versuch positiv genommen war. Deshalb findet sich auch in allen Tabellen für den zweiten Versuch jedesmal die zweite Coordinate, mag sie y, y_0 oder η heissen, mit entgegengesetztem Vorzeichen als beim ersten Versuch vor. Dies hat natürlich durchaus keinen Einfluss auf den Verlauf der mathematischen Discussion.

Es ergaben sich in diesem Falle die Werthe für

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{200}{\sqrt{80,5^2 + 168,5^2}} = 1,07$$

$$\frac{1}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{80,5^2 + 168,5^2}}{80,5} = 2,32$$

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta = \frac{70,5 \cdot 168,5}{80,5 \cdot \sqrt{80,5^2 + 168,5^2}} = 0,79 \, .$$

Also lauten die Transformationsformeln:

$$\eta' = 2,32 \cdot \eta + 0,79 \cdot \zeta$$

$$\zeta' = 1,07 \cdot \zeta \, .$$

Durch Einsetzen der verschiedenen Werthe für η, ζ gewinnt man die Tabelle:

Verrückung	η'	ζ'
(1,2)	— 158	— 86,1
(2,3)	— 137,6	— 94,7
(3,4)	— 141,7	— 86,1
(4,5)	— 148,2	— 76
(5,6)	— 152,3	— 67,4
(6,7)	— 149,9	— 62,6
(7,8)	— 144,5	— 66,3
(8,9)	— 141,1	— 69,6
(9,10)	— 140,1	— 79,2
(10,11)	— 135,7	— 95,2
(11,12)	— 147,2	— 88,8
Mittelstellung	— 146,6	— 75,4

Die zugehörige Figur ist mit in die Figur 4 auf pag. 22 eingezeichnet worden, um besser einen Vergleich der bei den beiden Versuchen gewonnenen Gestalten des Achsenkegels anstellen zu können.

Man sieht, diese Curven weichen zwar im Einzelnen, namentlich an den äussersten Punkten, etwas von einander ab, zeigen aber doch im Wesentlichen dieselbe Gestalt.

Wir haben somit folgendes Resultat gewonnen:

> Die Bewegung der Ulna ist eine Zwangsbewegung, d. h. eine Bewegung von nur einem Grade der Freiheit. Sie ist aber nicht eine einfache Charnierbewegung, da in diesem Falle jeder Punkt des Knochens sich in einer einzigen Ebene bewegen müsste, sondern die Bewegung findet so statt, dass die Ebene, in der ein kleines Stück der Bewegung eines Knochenpunktes mit grosser Annäherung stattfindet, im Verlaufe der Beugung und Streckung fortwährend ihre Lage im Raume ändert, entsprechend der fortwährenden Aenderung der Richtung der momentanen Rotationsachse.

Ist der Humerus fixirt, was bei unseren Versuchen der Fall war, so kann die Ulna eben nur die beschriebene Bewegung ausführen, die ihre Normalbewegung genannt werden soll. Eine jede andere Bewegung der Ulna gegen den Humerus ist nur dann möglich, sofern die Längsrichtung des Humerus dieselbe bleiben soll, wenn der Humerus gleichzeitig eine Rotation um seine Längsachse ausführt. Je mehr die Bewegung der Ulna gegen den Humerus von der beschriebenen Normalbewegung abweicht, um so grösser muss die Rotation des Humerus sein. Dem Humerus sind aber in Bezug auf seine Rotationsmöglichkeit bestimmte Grenzen gesetzt. Daher wird die Bewegung der Ulna gegen den Humerus in einer von der Normalbewegung abweichenden Art nur so lange möglich sein, als die dadurch hervorgerufene Rotation des Humerus ihre Grenzen nicht überschreitet. Aus diesem Grunde kann man z. B. die Ulna in einer von der Normalbewegung lateralwärts sehr abweichenden Richtung nicht so weit beugen, als in der Nähe der Normalbewegung.

Behält man die Richtung der Längsachse des Humerus bei, so wird mit wenig Ausnahmen jede Bewegung der Ulna sich aus einer

Beugung im Ellenbogengelenk und einer Rotation des Humerus um seine Längsachse zusammensetzen. Ausgenommen ist nur einmal die Normalbewegung, bei der die Rotation des Humerus ausgeschlossen ist, und dann die Bewegung der Ulna von irgend einer Beugestellung aus um die Längsachse des Humerus. Bei letzterer ist nämlich jede Bewegung im Ellenbogengelenk ausgeschlossen und die Bewegung ist eine reine Rotation des Humerus um seine Längsachse.

Hält man die Längsachse des Humerus fest, so hat derselbe in seiner Bewegung nur noch einen Grad der Freiheit, nämlich nur noch die Möglichkeit der Rotation um seine Längsachse. Die Ulna, welche zum Humerus 1 Grad der Freiheit besitzt, hat im Allgemeinen 4 Grade der Freiheit gegenüber der Scapula. Hält man aber die Längsachse des Humerus fest, so besitzt die Ulna nur noch 2 Grade der Freiheit der Scapula gegenüber.

II. Theil.

Ueber den Antheil, den jedes der beiden Handgelenke an den Gesammtflexionen der Hand besitzt

von

WILHELM BRAUNE und OTTO FISCHER.

Das Handgelenk des Menschen, obwohl schon vielfach untersucht, wie unter andern namentlich die Arbeiten von GÜNTHER, HENKE und MEYER zeigen, bildet den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, und zwar handelt es sich dabei nicht um eine Beschreibung der einzelnen Bestandtheile des Gelenks, sondern um eine Feststellung der Bewegungsgrenzen der Hand, wie sie durch die beiden Handgelenke gegeben sind. Unter diesen beiden Gelenken sind verstanden das Radiocarpalgelenk (erstes Gelenk) und das Intercarpalgelenk (zweites Gelenk). Die Untersuchung war geboten nicht nur durch den Mangel genauer Messungen, sondern auch durch die directen Widersprüche der beiden Hauptuntersucher auf diesem Gebiete. Von einer vollständigen Wiedergabe der Literatur wird abgesehen, was ausdrücklich bemerkt sein soll, erstens deshalb, weil sich beim Durchsehen der zahlreichen Handbücher durchaus nicht erkennen lässt, ob die Angaben der Autoren auf Grund eigner Untersuchungen gemacht sind, oder blosse Citate darstellen, zweitens, weil nur eine vollständige Literaturangabe genügen kann, wenn man überhaupt sich darauf einlässt, und ausserordentlich leicht einzelne Arbeiten übersehen werden können.

Während MEYER das erste Gelenk (Radio-Carpalgelenk) als ein zweiachsiges Gelenk bezeichnet (Form des eiförmigen Ginglymus)

und das zweite als ein Charniergelenk, nimmt Henke an, dass es sich hier um zwei Charniergelenke mit sich kreuzenden Achsen handelt, nebst zwei Arthrodieen.

Nach den Angaben von Hermann Meyer (Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes, Leipzig 1873, pag. 167) ist das Gelenk zwischen Os lunatum und Radius als ein zweiachsiges Gelenk, von der Art des eiförmigen Ginglymus, zu bezeichnen. Die Articulation zwischen Lunatum und Capitatum nebst Hamatum ist ein Ginglymus mit Schraubencharakter. In beiden Gelenken ist also Volar- und Dorsalflexion möglich, Radial- und Ulnarflexion dagegen nur in dem ersten Handwurzelgelenk, zwischen Radius und Meniscus.

Er giebt ferner an (pag. 172): In dem Gelenke zwischen Meniscus und Unterarm bilden die drei Knochen des Meniscus eine als eiförmig zu bezeichnende gemeinsame Gelenkfläche, wenn auch ihre Gestalt keine absolut festgestellte ist, weil sie, aus mehreren beweglich unter einander verbundenen Stücken bestehend, eine gewisse Wandelbarkeit besitzt. Eiförmiger Ginglymus ist also nach Meyer der Charakter des ersten Handgelenkes, welches deswegen die Flexion nach den bekannten vier Hauptrichtungen gestattet. Aber auch hier soll der Meniscus auf dem Radius sich in einem Schraubengange bewegen.

Henke (Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig, 1863, pag. 160 u. ff.)

Nach Henke sind die beiden Handgelenke einachsige, die Achsen stehen aber nicht nur schief zu einander, sondern auch schief zur Handfläche, so dass Flächenbewegung und Ränderbewegung, d. h. Flexion in der Dorsal-Volarrichtung und der Radial-Ulnarrichtung nur durch Betheiligung beider Gelenke zu Stande kommt.

Pag. 178 und 180 giebt er an, dass der Gesammtmechanismus der Handwurzel aus vier Elementen besteht, zwei einfachen Charnieren, nämlich die Verbindung des Lunatum mit dem Radius und Verbindung des Naviculare mit den drei anstossenden Knochen der zweiten Reihe, und zwei Arthrodieen, nämlich die Verbindung des Naviculare mit Radius und die Verbindung des Kopfes vom Capitatum mit der Pfanne des Lunatum. Die Achsen beider Charniere schneiden sich in einem Punkte, der zugleich der Mittelpunkt der beiden Arthrodieen ist und im Innern des Capitatum liegt. Es wäre somit

eine allseitige Beweglichkeit der Hand möglich um den gemeinsamen Drehpunkt, der mitten in der Handwurzel im Kopf des Capitatum liegt.

Langer (Lehrbuch der Anatomie, II. Auflage, Wien 1882, pag. 75) nimmt für die beiden Handgelenke zwei Charniergelenke, deren Achsen sich im Köpfchen des Capitatum kreuzen, und vergleicht die Einfügung der Hand gegenüber dem Vorderarm mit einer Cardanischen Aufhängung, eine Ansicht, die, wie der Verlauf der Untersuchung zeigen wird, am wenigsten das Richtige trifft.

Die Untersuchung ging darauf hinaus, die Grenzen, welche der Hand bei ihren Flexionen gestellt sind, zu ermitteln und damit die Maximalgrösse der Flexionen, sowohl für den Gesammtmechanismus der Hand als für die einzelnen ihn zusammensetzenden Gelenke. Es war durchaus nicht die Absicht der vorliegenden Untersuchungen, die Art der Bewegungen im Handgelenk, d. h. also die Lage der successiven Bewegungsachsen u. s. w. festzustellen. Aus diesem Grunde war es auch nicht nöthig, wie eine derartige Untersuchung erfordern würde, die Bewegungscurven dreier starr mit dem Handgelenk verbundenen Punkte zu messen, sondern es genügt zur Ermittelung der Grenzen der Flexionen ein einziger solcher Punkt, also eine einzige Holznadel. Eine spätere Untersuchung wird auf die Art der Bewegungen im Handgelenk gerichtet sein.

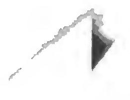
Die Darstellung des mathematischen Theils der Abhandlung ist absichtlich breit und ausführlich gehalten, um dieselbe dadurch einem grösseren Leserkreis zugänglich zu machen.

Um den Antheil, den das Antibrachio-Carpalgelenk und das Intercarpalgelenk an den Gesammtflexionen der Hand nehmen, und um ferner den Einfluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe auf die Flexionen der beiden Gelenke zu ermitteln, wurden folgende zwei Versuchsreihen an den beiden oberen Extremitäten ein und desselben Individuums angestellt. Das Individuum war ein vollständig gesunder, normalgebauter, kräftiger Mann, der im Alter von etwa 45 Jahren hingerichtet wurde. Der blutleere Leichnam wurde in der kalten Jahreszeit nach der Anatomie gesandt und daselbst sofort zu unseren Versuchen verwandt. Um die Bewegungen in dem Gelenksystem zwischen Metacarpus und Carpus möglichst auszuschalten und doch nicht durch darauf gerichtete Eingriffe den

Gelenkapparat zu schädigen, wurde bei der ersten Versuchsreihe der dritte Metacarpusknochen als Träger für die Nadel genommen, der so fest mit dem Capitatum verbunden ist, dass er ohne grösseren Fehler als starr mit demselben verbunden angesehen werden kann. Bei der zweiten Versuchsreihe, bei welcher die Nadel in den Radius eingebracht war, wurde nicht nur der dritte Metacarpusknochen sorgfältig fixirt, sondern auch der zweite, vierte und fünfte. Der Kürze der Darstellung halber wollen wir daher das Handgelenk aus zwei Gelenken, nämlich aus dem Antibrachio-Carpalgelenk und dem Intercarpalgelenk, bestehend ansehen und letztere beiden Gelenke als erstes und zweites Handgelenk bezeichnen.

Für die erste Versuchsreihe wurde der rechte Unterarm benutzt, indem der Radius desselben so an dem schon früher beschriebenen Messapparat durch zwei Schrauben unverrückbar fixirt war, dass die Handfläche eine möglichst horizontale Lage annahm. In den Metacarpus des dritten Fingers wurde vom Köpfchen aus der Länge nach eine Holznadel eingesteckt, deren Spitze von dem Mittelpunkt des Capitatum ca. 240 mm entfernt war, die also eine beträchtliche Verlängerung des Knochens in seiner Längsrichtung bildete.

Wie aus früheren von uns angestellten Versuchen am Handgelenk hervorgeht und wie wir auch noch im Verlaufe dieser Darstellungen beweisen werden, kann man mit grosser Annäherung die Gesammtheit der Handgelenke in Bezug auf die Art der resultirenden Bewegung als ein einziges Kugelgelenk ansehen, dessen Mittelpunkt in der Mitte des Köpfchens vom Capitatum liegt. Die Kenntniss dieser Thatsache ermöglicht es eben, bei der Untersuchung nicht, wie im Allgemeinen nöthig, (vgl. unsere frühere Arbeit) drei, sondern nur eine Nadelspitze zu verwenden, die sich dann bei allen möglichen Flexionen auf einer Kugelfläche bewegen muss. Es handelt sich nun zunächst darum, erstens die genaue Lage des Mittelpunktes dieser Kugel inbezug auf unsern Messapparat, d. h. seine drei räumlichen Coordinaten, und zweitens eine Mittelstellung der Hand aufzufinden, von der aus wir die Flexionen der Hand in jeder beliebigen Richtung messen werden. Der Begriff der Radial-, Ulnar-, Volar- und Dorsalflexion ist bisher noch nicht genau definirt worden, indem man noch nicht eine Mittelstellung oder vielmehr eine Anfangsstellung



+100 +150mm

Figur

(Normalstellung der Hand angegeben hat, von der aus diese Flexionen und auch alle Zwischenflexionen zu rechnen sind. Natürlich wird sich die Grösse aller Flexionen verschieden herausstellen, je nachdem man die eine oder die andere Stellung der Hand als Ausgangsstellung benutzt. Es ist aber wichtig, eine solche Stellung der Hand zu nehmen, die sich bei den verschiedensten Extremitäten mit derselben Genauigkeit wiederfinden lässt. Als eine solche nehmen wir die Stellung an, von der aus Ulnar- und Radialflexion einerseits sich gleich gross gestalten und ebenso Volar- und Dorsalflexion; dieser Stellung ist dann mit Recht der Name Mittelstellung der Hand (Normalstellung) beizulegen.

Da der Radius so fixirt war, dass die Handfläche eine annähernd horizontale Stellung einnahm, so wird die Bewegung der Nadelspitze in der Horizontalebene, welche durch die Mitte des Capitatum geht, annähernd der Radial-Ulnarflexion entsprechen. Annähernd nur deshalb, weil man sich bei der horizontalen Orientirung der Handfläche zunächst nur auf den Augenschein verlassen kann. Man wird im Verlaufe der Beschreibung der Versuche ein Mittel kennen lernen, mit Hilfe dessen aus den aufgezeichneten Curven die Ebene der Radial-Ulnarflexion genau bestimmt werden kann.

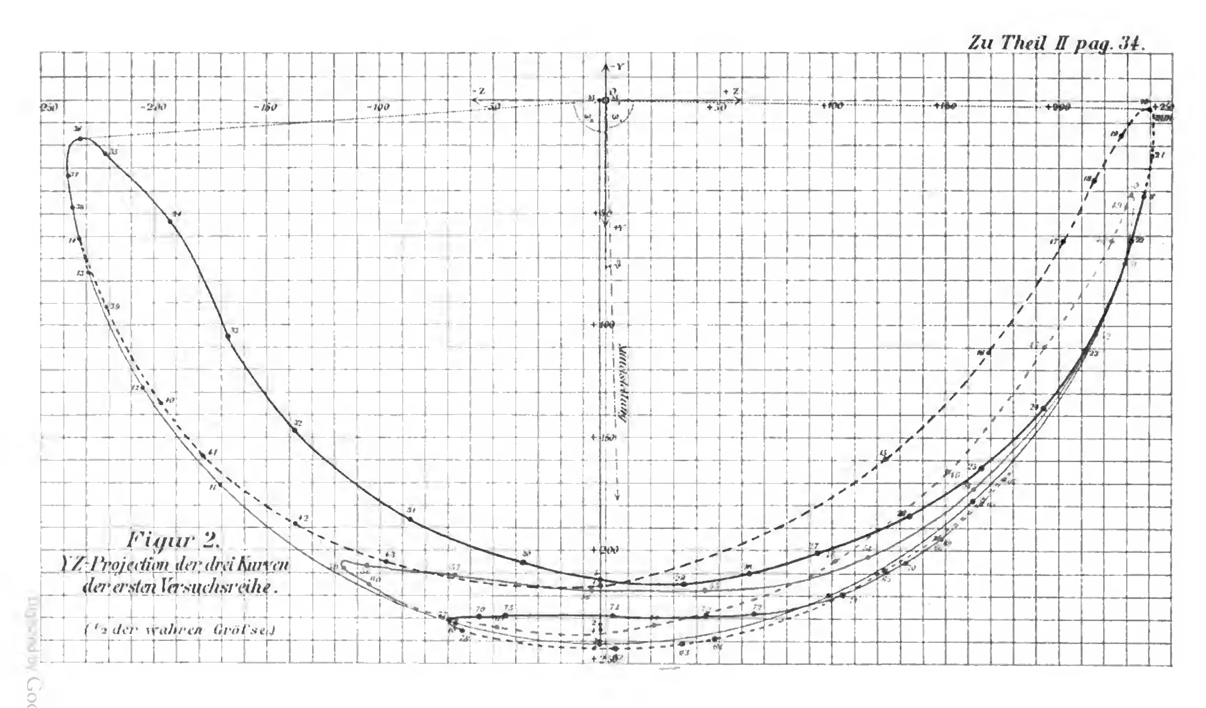
Wenn wir also die Nadelspitze in constanter Höhe, und zwar in der Höhe des Mittelpunktes vom Köpfchen des Capitatum, über unserer horizontalen mit Papier überspannten Glasplatte des Messapparates bewegen, so muss dabei die Projection der Nadelspitze auf die horizontale Messplatte einen Kreisbogen beschreiben, dessen Mittelpunkt zwei Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel liefert, indem ersterer senkrecht unter letzteren zu liegen kommt und indem der Halbirungspunkt des Kreisbogens in seinem zugehörigen Radius die Horizontal-Projection der Mittelstellung ergiebt. Von dieser Curve wurden fünf Punkte gemessen, die wir in Figur 1 mit den Zahlen 1 bis 5 versehen haben. Durch diese fünf Punkte lässt sich in der That mit grosser Annäherung ein Kreisbogen legen, wie aus der Figur ersichtlich ist. Der Mittelpunkt des Kreises, dem dieser Bogen angehört, ist mit M_1 und der Mittelpunkt des Kreisbogens mit der Zahl 9 versehen worden.

Wenn wir nun die Nadelspitze in der auf dem Radius $\overline{M_1 9}$ stehenden Verticalebene bis zu den Grenzstellungen bewegen, so werden wir mit derselben Annäherung wie vorhin die Radial-Ulnar-

flexion jetzt die Dorsal-Volarflexion ausführen und die Nadelspitze wird einen verticalen Kreis beschreiben müssen, dessen zugehöriger Kreismittelpunkt (M_2 in Figur 2) uns die Höhe des Mittelpunktes der Kugel über der Horizontalprojection M_1, und dessen Mittelradius uns die wahre Lage der Mittelstellung in der auf $\overline{M_1\ 9}$ errichteten Verticalebene liefert. Von diesem Kreisbogen wurden ausser dem schon vorhandenen Punkt 9 noch 8 Punkte gemessen, die wir in Figur 2 mit den Zahlen 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 versehen haben. Aus der Figur ist wiederum ersichtlich, mit wie grosser Annäherung der gezeichnete Kreis durch die experimentell gefundenen Punkte läuft. Beide Kreisbögen besassen den Radius 241 mm, welcher als Radius der Kugel anzusehen ist.

Bevor wir in der Beschreibung unserer Versuche fortfahren, soll eine Bemerkung über die zweckmässige Wahl des Coordinatensystems hier Platz finden. Die Wahl des räumlichen Coordinatensystems, auf das wir alle gemessenen Punkte beziehen, ist zunächst beliebig; hat man aber einmal eine Wahl betreffs des Coordinatensystems getroffen, so muss man zunächst dieses Coordinatensystem beibehalten, also alle gemessenen Punkte in diesem Coordinatensystem ausdrücken, weil sonst eine Ermittelung der gegenseitigen Lage der Punkte zu einander mit Hülfe ihrer Coordinaten unmöglich wird.

Die Rechnung und ebenso die Construction vereinfacht sich wesentlich, wenn man das Coordinatensystem zweckmässig annimmt. Da wir später alle Flexionen auf die Mittelstellung der Hand beziehen, so ist es für unsern Fall am zweckmässigsten, diese Mittelstellung selbst zu einer der Coordinatenaxen zu machen. Dies ist jedoch zunächst nicht ganz zu erreichen, da eine Projectionsebene bei unserem Messapparat schon in Bezug auf ihre Richtung festgelegt ist, nämlich die horizontale Glasplatte. Wir sind daher gezwungen, einer unserer Coordinatenebenen eine horizontale Lage zu geben, es sei die XY-Ebene. Es ist nicht nöthig, die horizontale Glasplatte selbst als XY-Ebene anzunehmen, sondern nur eine ihr parallele ebenfalls horizontale Ebene, dann wird doch die Projection auf die Glasplatte uns die XY-Projection liefern, da dieselbe von der Höhe, d. h. der verticalen dritten Coordinate unabhängig ist. Wir nehmen daher die durch den Mittelpunkt M_1, M_2 gehende Horizontalebene als XY-Ebene an, und geben der Y-Axe die Rich-



Figur 2.
YZ-Projection der drei Kurven der ersten Versuchsreihe.

(½ der wahren Gröfse.)

tung des Mittelradius $\overline{M_1\ 9}$. Dies ist bei der Uebertragung der experimentell gefundenen, auf das Papier der Glasplatte aufgezeichneten Horizontalprojectionen auf das zur weiteren Construction zu verwendende Millimeterpapier leicht zu erreichen, indem man das von der Glasplatte abgenommene Papier so auf das Millimeterpapier auflegt, dass der Punkt M_1 auf den Coordinatenanfangspunkt O und die Richtung $\overline{M_1\ 9}$ in die Richtung der Y-Axe des vorher auf das Millimeterpapier aufgezeichneten Coordinatensystems fällt, und dann die einzelnen Punkte durchsticht. Dann liest man erst die X- und Y-Coordinaten von dem Millimeterpapier ab. Die dritte Coordinate Z, die bei horizontaler Lage der XY-Ebene vertical ausfällt, ist dann gleich dem direct gemessenen Abstand des betreffenden Punktes über oder unter der durch den Mittelpunkt der Kugel, dessen Projectionen M_1, M_2 sind, gelegten Horizontalebene. Es ergab sich die Erhebung von M_2 über unserer horizontalen Glasplatte als 246,5 mm. Demnach ist die Z-Coordinate jedes einzelnen Punktes in unserm angenommenen Coordinatensystem (mit dem Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt) gleich dem gemessenen senkrechten Abstand jedes einzelnen Punktes über der horizontalen Glasplatte vermindert um 246,5 mm. Die Z-Coordinate wird als positiv angenommen, sobald die Höhe über der Messplatte mehr als 246,5 mm, und als negativ, sobald dieselbe weniger als 246,5 mm betrug. Die Mittelstellung der Hand liegt dabei in der YZ-Ebene.

Für dieses Coordinatensystem sind die Coordinaten der Punkte 1 bis 14, wie aller später beobachteten in der Tabelle I und II (pag. 37 u. 39) niedergelegt.

Die Punkte 1 bis 5 bezogen sich auf die horizontale Kreislinie, die die Nadelspitze in der Höhe des Mittelpunktes des Capitatum beschreibt. Da wir diese Höhe nur ungefähr messen konnten, ohne das Gelenk selbst zu zerstören, so war vorauszusehen, dass diese Höhe etwas ungenau wurde, so dass wir die Curve der Nadelspitze in einer Horizontalebene etwas über oder unter dem Kugelmittelpunkt bekommen würden. In der That ergiebt sich die Z-Coordinate für alle diese Punkte als —2,5 mm, so dass wir in dieser Kreislinie durch 1 bis 5 den Schnitt der Kugel, auf der sich die Nadelspitze bewegt, mit der Ebene haben, die parallel der XY-Ebene 2,5 mm unter derselben verläuft. Die Kreislinie der Punkte 6 bis 14 ist die

Schnittcurve der YZ-Ebene mit der Kugel, so dass für alle diese Punkte $X = 0$ ist.

Nun wurde die Curve bestimmt, welche für die Grenzstellungen der Hand bei allen möglichen Flexionen die Nadelspitze auf der Kugel beschreibt. Um nicht durch ungleichmässigen Druck auf die Hand Ungenauigkeiten in die Messung zu bringen, brachten wir in jedem einzelnen Fall die Grenzstellung dadurch hervor, dass wir an einem 65 mm vom Mittelpunkt des Capitatum im dritten Metacarpus befestigten Faden, der über eine Rolle lief, ein Gewicht von 1 Kgr. ziehen liessen und die Grenzstellung der Flexion durch den Zug des Gewichts hervorriefen, und zwar so, dass bei der äussersten Stellung der Faden senkrecht zur Längsaxe des dritten Metacarpus zog, also in der Richtung der Tangente der Bahn, um immer mit demselben statischen Moment zu arbeiten. Von dieser Grenzcurve wurden die in Figur 1 und Figur 2 mit 15 bis 43 bezeichneten Punkte gemessen, deren Coordinaten sich in Tabelle I (pag. 37) aufgezeichnet finden. Die Curve lief nach beendigter Messung so genau in sich selbst zurück, dass dadurch ein Beweis geliefert wurde für die vollständige Intactlassung des Gelenkes bei dem angewendeten Zug. Die durch diese Punkte gehende Curve, die wir kurz Grenzcurve für die Gesammtflexionen der Hand nennen wollen, gehören natürlich auch die äussersten Punkte der beiden vorher gemessenen Kreisbögen, also die Punkte 1, 5, 6, 14 an. (Tabelle I.) Sie fanden sich, wie aus der Figur 1 und Figur 2 ersichtlich ist, genau auf der Curve wieder; darin liegt aber ein weiterer Beweis für die Genauigkeit des Versuchs, nämlich erstens für die vollständige Intacthaltung des Gelenkes und zweitens für die vollständige Gleichmässigkeit des angewandten Zuges. Verbindet man alle Punkte der Grenzcurve mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entsteht ein Kegelmantel, dessen Mittellinie (Achse) die Mittelstellung bildet. Die Grösse des Winkels, den jeder einzelne Erzeugende des Kegels mit der Mittellinie bildet, liefert dann direct die Grösse der Flexion in der betreffenden Richtung, die wir später unten berechnen werden.

Tabelle I.

(Coordinatenanfangspunkt ist der Mittelpunkt der Kugel, auf der sich die Nadelspitze bewegt. Der Radius der Kugel ist 241 mm gross.)

Schnittcurve der Kugel mit der Ebene $z = -2,5$.

	x	y	z
1	+ 112	+ 214	— 2,5
2	+ 68,5	+ 232	— 2,5
3	— 6,5	+ 241	— 2,5
4	— 55	+ 233	— 2,5
5	— 113	+ 212,5	— 2,5

Schnittcurve der Kugel mit der Ebene $x = 0$.

	x	y	z
6	0	+ 40,5	+ 238,5
7	0	+ 178,5	+ 161,5
8	0	+ 219	+ 98
9	0	+ 241	— 2,5
10	0	+ 231	— 67
11	0	+ 171	— 170,5
12	0	+ 127,5	— 204
13	0	+ 77	— 228,5
14	0	+ 61	— 234

Grenzcurve für die Gesammtflexionen der Hand.

	x	y	z
15	+ 139	+ 159	+ 123
16	+ 130,5	+ 141	+ 169
17	+ 125	+ 52	+ 202
18	+ 110	+ 33,5	+ 215,5
19	+ 86,5	+ 16	+ 227,5
20	+ 46	+ 4	+ 239
21	+ 12,5	+ 24,5	+ 240,5
22	— 15	+ 62	+ 234
23	— 40,5	+ 111	+ 213,5
24	— 54	+ 136	+ 193,5
25	— 67	+ 163	+ 166,5
26	— 78,5	+ 184,5	+ 135
27	— 92	+ 200,5	+ 93
28	— 100,5	+ 209	+ 63
29	— 106	+ 213,5	+ 32,5
30	— 117	+ 205,5	— 37,5
31	— 122	+ 185	— 87,5
32	— 127,5	+ 146	— 138
33	— 130	+ 105,5	— 167,5
34	— 127,5	+ 52,5	— 193
35	— 92	+ 22	— 221,5
36	— 56	+ 17,5	— 231,5
37	— 29,5	+ 31,5	— 236,5
38	— 11	+ 48	— 235,5
39	+ 18	+ 92	— 221,5
40	+ 38,5	+ 134	— 198
41	+ 46,5	+ 157,5	— 178
42	+ 65	+ 188,5	— 237,5
43	+ 86	+ 205	— 97,5

Nachdem die Grenzcurve für die Gesammtflexion ermittelt war, wurde von aussen das Lunatum auf ein direct unter dem Handgelenk angebrachtes Brettchen durch einen Nagel fixirt. Unter Gesammtflexion verstehen wir die durch beide Gelenke gegebenen Flexionen, und zwar nach der Radial-, Dorsal-, Ulnar-, Volarrichtung und allen

dazwischen liegenden Richtungen. Das Brettchen, an welchem das Lunatum befestigt war, war so schmal, dass dadurch die Flexionen, welche nach Fixation des Lunatum nur noch im zweiten Handgelenk stattfinden konnten, indem dadurch das erste Handgelenk vollständig ausgeschieden war, nicht beeinträchtigt wurden. Dadurch, dass wir das Lunatum allein fixirten, schieden wir zwar das erste Handgelenk vollständig aus, erhielten aber den Knochen der ersten Handwurzelreihe die Beweglichkeit zu einander, welche, wie man sich von vornherein sagen kann, einen nicht unbeträchtlichen Einfluss auf die Grösse der Flexionen im zweiten Handgelenk ausübt. Während der Fixation des Lunatum wurde die Hand, soweit dies möglich war, in der Mittelstellung mittelst eines untergestellten Stativs festgehalten, damit wir die Flexionen des zweiten Handgelenks auch auf die Mittelstellung beziehen konnten. Wir werden sehen, in welcher Weise man später die dadurch, dass die Stellung der Hand durch das Einschlagen des Nagels etwas verändert wird, hervorgerufene Ungenauigkeit bis zu gewissem Grade corrigiren kann. Nun wurden von Neuem die Coordinaten mehrerer Punkte (die in Figur 1 und 2 roth gezeichneten und mit den Zahlen 44 bis 61 versehenen) der Curve für die Grenzstellungen beim zweiten Handgelenk gemessen. Dieselben finden sich in Tabelle II (pag. 39) aufgezeichnet und die sie verbindende Curve wurde in allen Figuren roth gezeichnet.

Darauf wurden, während wieder die Hand in der Mittelstellung festgehalten war, noch das Naviculare und das Triquetrum auf dieselbe Weise wie das Lunatum fixirt und von Neuem die Curve der Grenzstellungen experimentell ermittelt. Die gemessenen Punkte und desgleichen die sie verbindende Curve sind in Figur 1 und 2 blau eingezeichnet worden. Die Punkte tragen die Nummern 62 bis 78; ihre Coordinaten finden sich ebenfalls in Tabelle II vor.

Nach Fixation der sämmtlichen bei den Gelenken in Frage kommenden Knochen der ersten Handwurzelreihe erhält man die Flexionen, welche das zweite Handgelenk zulässt bei fester Lage der Knochen der ersten Handwurzelreihe zu einander. Aus dem Unterschied der Flexionen des vorigen und des letzten Versuchs ergiebt sich daher der Einfluss, den die Beweglichkeit der ersten Handwurzelreihe auf die Flexionen im zweiten Handgelenk ausübt.

Tabelle II.

Grenzcurve für die Flexionen der Hand bei fixirtem Radius und fixirtem Lunatum.

	x	y	z
44	+ 65	+ 232	+ 22,5
45	+ 83,5	+ 204	+ 103
46	+ 98	+ 162	+ 153
47	+ 94,5	+ 109,5	+ 196,5
48	+ 73,5	+ 61	+ 224,5
49	+ 59,5	+ 45	+ 231
50	+ 44	+ 40	+ 234,5
51	— 4	+ 70,5	+ 232
52	— 21	+ 101,5	+ 219
53	— 54	+ 172	+ 163,5
54	— 66	+ 201,5	+ 118
55	— 96	+ 215	+ 44
56	— 104	+ 215,5	— 3,5
57	— 84,5	+ 211,5	— 65,5
58	— 53,5	+ 207	— 102,5
59	— 30,5	+ 207,5	— 112,5
60	— 9,5	+ 215	— 102,5
61	+ 39	+ 233,5	— 47,5

Grenzcurve für die Flexionen der Hand bei fixirtem Radius, fixirtem Lunatum, Naviculare u. Triquetrum.

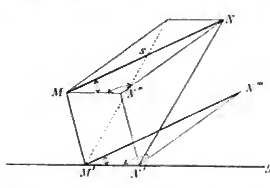
	x	y	z
62	+ 28,5	+ 239,5	+ 4
63	+ 41	+ 237	+ 33
64	+ 48	+ 232,5	+ 48
65	+ 52	+ 203,5	+ 123
66	+ 48	+ 187	+ 147
67	+ 31	+ 162,5	+ 176
68	+ 5,5	+ 175	+ 164
69	— 3	+ 189,5	+ 148
70	— 22	+ 201	+ 132
71	— 44,5	+ 214,5	+ 103
72	— 66	+ 223	+ 63
73	— 73,5	+ 225	+ 43
74	— 79	+ 227	+ 2
75	— 65,5	+ 226	— 46,5
76	— 46,5	+ 227,5	— 57,5
77	— 18	+ 229	— 69,5
78	— 1,5	+ 231	— 66,5

Wie wir früher bemerkten, tritt eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung wie der Construction ein, wenn in diesem Falle das Coordinatensystem so gewählt wird, dass die Mittelstellung, von der aus wir alle Flexionen rechnen wollen, mit einer der drei Coordinatenaxen zusammenfällt. Durch geeignete Lage des Millimeterpapiers, auf welches die gemessenen Coordinaten der beobachteten Stellungen der Nadelspitze aufgetragen werden, erreichten wir es schon, dass der Coordinatenanfangspunkt mit dem Mittelpunkt der für unser Gelenk charakteristischen Kugelfläche zusammenfiel und ausserdem die Mittelstellung in die *YZ*-Ebene zu liegen kam. Um die Mittelstellung mit einer Coordinatenaxe z. B. der *Y*-Axe zur Deckung zu bringen, haben wir daher nur die Kugel um die *X*-Axe des Coordinatensystems um den Winkel ϑ zu drehen, den die Mittelstellung in der *YZ*-Ebene mit der *Y*-Axe bildet. Dieses lässt sich auf dem Wege der Construction wie auf dem Wege der Transformation eines Coordinatensystems in ein anderes erreichen, indem wir ein

zweites Coordinatensystem x', y', z' einführen, dessen Axen X', Y', Z' so gegen dies alte Coordinatensystem liegen, dass die X'-Achsen mit der alten X-Achse zusammenfällt, während die Y'-Achse resp. Z'-Achse zwar in die alte YZ-Ebene fallen aber mit der alten X-Achse resp. Z-Achse den Winkel ϑ bilden. In diesem neuen Coordinatensystem drücken wir dann alle beobachteten Punkte aus.

Da uns im Verlaufe der mathematischen Discussion unserer Versuchsreihen noch öfter die Aufgabe entgegentreten wird, an Stelle des ursprünglich gewählten Coordinatensystem aus Zweckmässigkeitsgründen ein neues einzuführen, so wollen wir dieselbe gleich allgemein erledigen, jedoch unter der hier immer auftretenden Beschränkung, dass die Anfangspunkte des alten und neuen Coordinatensystems zusammenfallen.

Zum Verständniss der folgenden mathematischen Ableitungen ist nur der Satz der Elementar-Mathematik nöthig, »dass die rechtwinklige Projection einer Strecke von der Länge s auf eine beliebige Gerade g im Raume durch das Product $s \cdot \cos(gs)$ dargestellt wird, wo unter (sg) der Winkel zu verstehen ist, den zwei durch irgend einen Punkt gehende Parallele zu den beiden Geraden s und g mit einander bilden würden. Die rechtwinklige Projection von s auf g wird dadurch hergestellt, dass man durch die Endpunkte der Strecke s Ebenen legt, welche auf der Geraden g senkrecht stehen. Das zwischen diese beiden Projectionsebenen fallende Stück der Geraden g ist dann die rechtwinklige Projection von s auf g.



Anm. 1. Bezeichnet man mit M und N Anfangspunkt und Endpunkt der Strecke s (siehe nebenstehende Figur) und mit M', N' die Schnitte der beiden durch M und N gehenden Projectionsebenen mit der Geraden g, zieht ferner durch M eine Parallele zu g, welche die durch N gehende Projectionsebene in N'' schneidet, so ist $MN'' = M'N'$, weil sowohl $M'N'$ als MN'' die Entfernung der beiden zu g normalen Projectionsebenen darstellt. Da NN'' in die Projectionsebene von N' fällt, so beträgt der Winkel $\widehat{MN''N}$ 90°,

während der Winkel $\widehat{N''MN}$ nach der obigen Definition den Winkel (sg) darstellt. Es ist also $MN''N$ ein rechtwinkliges Dreieck und folglich:

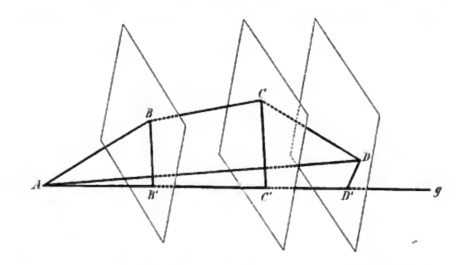
$$MN'' = s \,.\cos\,(gs,) \quad \text{oder, da} \quad MN'' = M'N' \text{ ist,}$$

$$M'N' = s\,\cos\,(gs)\;.$$

(Schlömilch, Anal. Geom. d. R. Cap. IV § 21.)

Da man durch irgend einen Punkt des Raumes immer nur eine Normalebene zu einer Geraden g legen kann, so ist auch der folgende Satz ohne Weiteres einzusehen, dass

»die rechtwinklige Projection einer gebrochenen Linie $ABCD$ im Raume auf eine Gerade g, die der Ein-



fachheit halber durch A gehen möge, gleich ist der Projection der Geraden AD, welche Anfangspunkt und Endpunkt der gebrochenen Linie mit einander verbindet«, d. h.

$$AD.\cos\,(g, AD) = AB.\cos\,(g, AB) + BC.\cos\,(g, BC) + CD.\cos\,(g, CD).$$

Anm. 2. Bezeichnen wir mit B', C', D' die rechtwinkligen Projectionen von B, C, D auf g, so ist nämlich

$$AD' = AB' + B'C' + C'D'. \quad \text{Da}$$

$$AD' = AD.\cos\,(g, AD),\;\; AB' = AB.\cos\,(g, AB),\;\; B'C' = BC.\cos\,(g, BC)$$

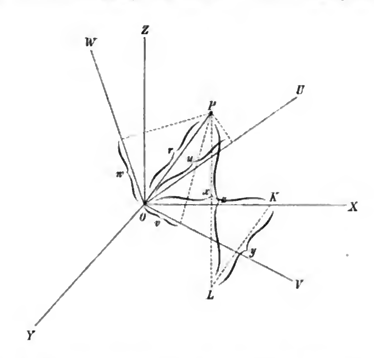
$$C'D' = CD.\cos\,(g, CD),$$

unter (g, AD), (g, AB), (g, BC), (g, CD) die natürlich immer nach ein und derselben Drehungsrichtung genommenen Winkel verstanden, welche bezüglich die Strecken AD, AB, BC, CD mit g bilden, so folgt:

$$AD.\cos\,(g, AD) = AB.\cos\,(g, AB) + BC.\cos\,(g, BC) + CD.\cos\,(g, CD).$$

Die einzelnen Glieder der Summe rechts fallen positiv oder negativ aus, je nachdem der Winkel im 1. und 4. oder im 2. und 3. Quadranten liegt.

Mit Hülfe dieses Satzes gewinnt man nun die Transformationsformeln für den Übergang aus einem Coordinatensystem x, y, z in



ein anderes u, v, w, das mit dem ersten gleichen Anfangspunkt besitzt, und dessen Axen u, v, w mit den Axen des ersteren bezüglich die Winkel

$$\begin{array}{ccc} (u,x)\ , & (u,y)\ , & (u,z) \\ (v,x)\ , & (v,y)\ , & (v,z) \\ (w,x)\ , & (w,y)\ , & (w,z) \end{array}$$

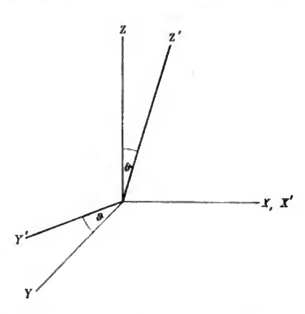
bilden.

Wir verwenden zu diesem Zweck für einen beliebigen Punkt P mit den Coordinaten x, y, z die gebrochene Linie $OKLP$ (siehe obenstehende Figur), deren auf einander folgende Strecken die Grössen x, y, z besitzen. Der Punkt P möge den Abstand r vom gemeinschaftlichen Anfangspunkt O besitzen, dann sind $r \cdot \cos(r,u)$, $r \cdot \cos(r,v)$ und $r \cdot \cos(r,w)$ die Projectionen von r auf die neuen Coordinatenaxen U, V, W. Diese Projectionen bedeuten aber gerade die Coordinaten u, v, w des Punktes P inbezug auf das neue Coordinatensystem.

Man hat daher die Transformationsformeln:

$$(1)\ldots\begin{cases} u = x\,.\cos(u,x) + y\,.\cos(u,y) + z\,.\cos(u,z) \\ v = x\,.\cos(v,x) + y\,.\cos(v,y) + z\,.\cos(v,z) \\ w = x\,.\cos(w,x) + y\,.\cos(w,y) + z\,.\cos(w,z)\,. \end{cases}$$

Die Kenntniss dieser Formeln wollen wir nun zunächst für die Einführung eines neuen Coordinatensystems verwerthen, bei dem eine Coordinatenachse mit der Mittelstellung zusammenfällt. Bei unserem alten Coordinatensystem lag die Mittelstellung in der YZ-Ebene. Führen wir nun ein neues Coordinatensystem X', Y', Z' ein, dessen $Y'Z'$-Ebene mit der YZ-Ebene des alten, und dessen Y'-Achse mit der Mittelstellung zusammenfällt, so wird dasselbe durch eine Drehung um die X-Achse um den Winkel ϑ zwischen Mittelstellung und Y-Achse des alten Systems bewirkt, so dass die X'-Achse die alte X-Achse geblieben ist. Wir haben daher die Winkel zwischen den neuen und alten Coordinatenaxen:



$$\begin{array}{lll} (x',x) = 0^\circ, & (x',y) = 90^\circ\ , & (x',z) = 90^\circ \\ (y',x) = 90^\circ, & (y',y) = \vartheta\ , & (y',z) = 90^\circ - \vartheta \\ (z',x) = 90^\circ, & (z',y) = 90^\circ + \vartheta\,, & (z',z) = \vartheta, \end{array}$$

woraus folgt, da $\cos 0^\circ = +1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos(90^\circ - \vartheta) = \sin\vartheta$, $\cos(90^\circ + \vartheta) = -\sin\vartheta$ ist:

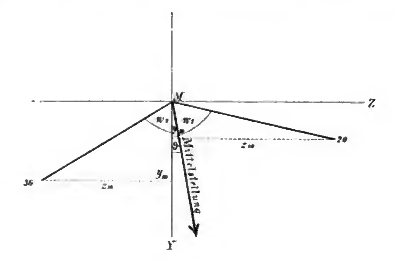
$$(2)\ \ldots\ldots\begin{cases} x' = x \\ y' = y\,.\cos\vartheta + z\,.\sin\vartheta \\ z' = -y\,.\sin\vartheta + z\,.\cos\vartheta\,, \end{cases}$$

Um den Winkel ϑ zu bestimmen, berücksichtigen wir, dass in Figur 2, welche die Projection unserer Curven auf die alte XZ-Ebene darstellt, die Punkte 20 und 36 die beiden äussersten sind. Verbinden wir dieselben mit dem Anfangspunkt und halbiren den dadurch entstehenden Winkel, so erhalten wir die Mittelstellung, die den Winkel ϑ mit der Y-Achse bildet.

Der Strahl M 20 möge den Winkel w_1, der Strahl M 36 den Winkel w_2 mit der Y-Achse bilden, dann ist, wie man aus der Figur sieht.

$$\vartheta = \frac{w_1 + w_2}{2} - w_2 = \frac{w_1 - w_2}{2} .$$

Bezeichnen wir mit y_{20}, z_{20} resp. y_{36}, z_{36} den absoluten Werth der zum Punkte 20 resp. 36 gehörenden y- und z-Coordinate, so ist



$$\text{tang } w_1 = \frac{z_{20}}{y_{20}} = \frac{239}{4} = 59,75 \text{ ; also } w_1 = 89^\circ ,$$

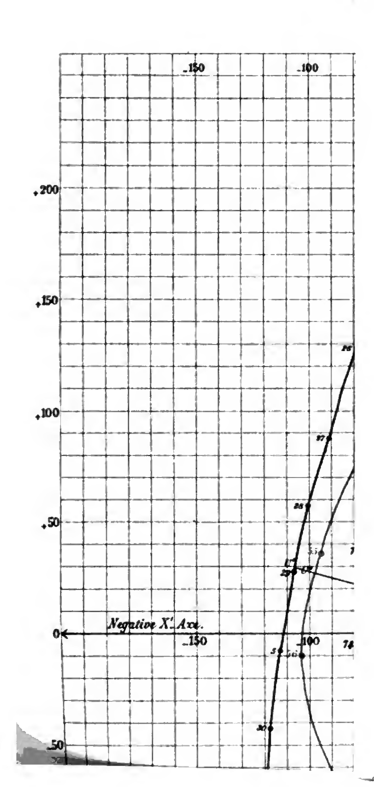
$$\text{tang } w_2 = \frac{z_{36}}{y_{36}} = \frac{231,5}{17,5} = 13,23 \text{ , also } w_2 = 85^\circ\ 40' ,$$

woraus folgt $\vartheta = 1^\circ\ 40'$.

Da nun sin $(1^\circ\ 40') = 0,029$ und cos $(1^\circ\ 40') = 1$ (auf 3 Decimalstellen abgerundet), so haben wir die Transformationsformeln:

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 0,029 \, . \, z \\ z' = - \, 0,029 \, . \, y + z \, . \end{cases}$$

Auf diese Weise berechnet man die in Tabelle III und IV (pag. 45) niedergelegten Coordinaten x', y', z' der beobachteten Punkte. In Figur 3 sind die Projectionscurven aufgezeichnet für die neue $x'z'$-Ebene, welche nunmehr senkrecht auf der Mittelstellung steht, so dass die Projection der Mittelstellung sich auf den Coordinatenanfangspunkt O reducirt.



-150
-100
+200
+150
+100
+50
0
Negative X'. Axis.
-150
-100
-50

Tabelle III.

Coordinaten der Punkte der Grenzcurven für ein neues Coordinatensystem x', y', z', bei dem die y'-Achse mit der Mittelstellung zusammenfällt.

Für die schwarze Curve:

	x'	y'	z'
1	+ 112	+ 214,5	— 8
15	+ 139	+ 163	+ 118,5
16	+ 139,5	+ 115,5	+ 165
17	+ 125	+ 68	+ 190
18	+ 110	+ 40	+ 212,5
19	+ 86,5	+ 22	+ 224
20	+ 46	+ 11	+ 235
21	+ 12,5	+ 34,5	+ 238
6	0	+ 46	+ 235,5
22	— 15	+ 68	+ 230,5
23	— 40,5	+ 116,5	+ 208,5
24	— 54	+ 142	+ 188
25	— 67	+ 167,5	+ 161
26	— 78,5	+ 188	+ 128,5
27	— 92	+ 202	+ 87
28	— 100,5	+ 210,5	+ 56,5
29	— 106	+ 214	+ 26,5
3	— 113	+ 213	— 8,5
30	— 117	+ 204	— 43,5
31	— 122	+ 182	— 92,5

	x'	y'	z'
32	— 127,5	+ 141,5	— 141,5
33	— 130	+ 99,5	— 169,5
34	— 127,5	+ 46,5	— 193
35	— 92	+ 15,5	— 221
36	— 56	+ 11	— 232
37	— 29,5	+ 24	— 236
38	— 11	+ 40	— 235
14	0	+ 52,5	— 235,5
39	+ 18	+ 84,5	— 223
40	+ 38,5	+ 127,5	— 200
41	+ 46,5	+ 151,5	— 181,5
42	+ 65	+ 184	— 142
43	+ 86	+ 202	— 103

Tabelle IV.

Coordinaten der Punkte der Grenzcurven für ein neues Coordinatensystem x', y', z', bei dem die Y'-Achse mit der Mittelstellung zusammenfällt.

Für die rothe Curve:

	x'	y'	z'
44	+ 65	+ 233,5	+ 46,5
45	+ 83,5	+ 207	+ 97
46	+ 98	+ 166,5	+ 147,5
47	+ 94,5	+ 115	+ 192
48	+ 73,5	+ 68	+ 221
49	+ 59,5	+ 52	+ 228
50	+ 44	+ 46,5	+ 231,5

Für die blaue Curve:

	x'	y	z
62	+ 28,5	+ 239	— 3
63	+ 41	+ 238	+ 26
64	+ 48	+ 233,5	+ 44
65	+ 52	+ 207	+ 116,5
66	+ 48	+ 191	+ 141,5
67	+ 31	+ 167,5	+ 170
68	+ 5,5	+ 181	+ 158,5

	x'	y'	z'
51	— 4	+ 77	+ 230,5
52	— 21	+ 108	+ 214,5
53	— 54	+ 176,5	+ 157,5
54	— 66	+ 205	+ 111,5
55	— 96	+ 216,5	+ 37,5
56	— 104	+ 216,5	— 10
57	— 84,5	+ 209	— 71,5
58	— 53,5	+ 204	— 108
59	— 30,5	+ 204	— 117,5
60	— 9,5	+ 211,5	— 108,5
61	+ 39	+ 230,5	— 54

	x'	y'	z'
69	— 3	+ 193,5	+ 144,5
70	— 22	+ 207	+ 125,5
71	— 44,5	+ 217,5	+ 96,5
72	— 66	+ 224,5	+ 56
73	— 73,5	+ 227	+ 36
74	— 79	+ 227	— 5
75	— 65,5	+ 223,5	— 52,5
76	— 46,5	+ 225	— 63
77	— 18	+ 227	— 75,5
78	— 1,5	+ 228,5	— 73,5

Die schwarze Curve in Figur 3, d. h. die Curve, welche die Grösse der Gesammtflexionen von der Mittelstellung aus nach jeder beliebigen Richtung veranschaulicht, insofern sie, wie wir sehen werden, den Sinus der Flexionen liefert, stellt sich als ein Oval dar, welches in Bezug auf zwei durch die Mitte gehende Achsen mit grosser Annäherung Symmetrie aufweist. Die beiden sich rechtwinklig schneidenden Achsen sind gegen die X'- resp. Z'-Achse um einen Winkel α im Sinne der Uhrzeigerdrehung geneigt, dessen Tangente, wie man aus den Coordinaten eines beliebigen Punktes a auf einer der Achsen berechnet (siehe Figur) die Grösse $\frac{56}{200} = 0{,}28$ besitzt. Demnach ist der Winkel

$$\alpha = 15^{\circ}\ 40' \ .$$

Wie wir früher (pag. 2) andeuteten, wollen wir uns eine genaue Definition der vier Begriffe Dorsal-, Volar-, Radial- und Ulnarflexion vorbehalten.

Bezeichnen wir als Radial-, Dorsal-, Ulnar- und Volarflexion die Flexionen, welche in den durch die beiden Symmetrieachsen des Ovals gegebenen vier Richtungen von der Mittelstellung aus stattfinden, so haben wir damit eine Definition dieser vier Hauptflexionsrichtungen geschaffen, die aller Willkür entkleidet ist. Diese Definition ist insofern noch von weitergehender Bedeutung, als, wie wir später noch genauer berechnen werden, sie uns die Richtungen von Radial-Ulnarflexion resp. Dorsal-Volarflexion als die Richtungen be-

zeichnet, in der von der Mittelstellung aus die Flexionen unter allen anderen ein Minimum resp. Maximum betragen.

Für die übersichtliche und knappe Form der Darstellung ist es wesentlich, an Stelle des zuletzt eingeführten Coordinatensystems $x'\ y'\ z'$ abermals ein neues mit den Achsen ξ, η, ζ einzuführen, bei dem wie früher die η-Achse mit der Mittelstellung zusammenfällt, dagegen die ξ-Achse die Richtung der Radial-Ulnarflexion und die ζ-Achse die Richtung der Dorsal-Volarflexion besitzt. Zu diesem Zwecke haben wir nur das zuletzt benutzte Coordinatensystem unter Beibehaltung des Anfangspunktes um die alte Y'-Achse im entgegengesetzten Sinne der Uhrzeigerdrehung um den Winkel α zu drehen, was den Transformationsformeln entspricht*):

$$(4)\ldots\ldots\ldots\begin{cases}\xi = x'.\cos\alpha - z'.\sin\alpha\\ \eta = y'\\ \zeta = x'.\sin\alpha + z'.\cos\alpha\ .\end{cases}$$

Diese Drehung denken wir uns bei allen drei Curven ausgeführt, was man sich mit Hülfe der Fig. 3 ohne Weiteres veranschaulichen kann.

Die Flexionen, welche die rothe und blaue Curve liefern, lassen nur dann einen Vergleich mit den durch die schwarze Curve dargestellten Gesammtflexionen zu, wenn sie auf dieselbe Ausgangsstellung, also nach unserer getroffenen Wahl derselben auch auf die Mittelstellung bezogen werden. Zu diesem Zwecke hatten wir schon während der Fixirung des Lunatum versucht, die Hand in der Mittelstellung festzuhalten. Man sieht aber leicht ein, dass dies nicht genau möglich ist, weil durch das Einschlagen des Nagels in das Lunatum die Hand im letzten Moment doch eine etwas veränderte Stellung einnimmt. Man ist daher genöthigt, auf andere Weise, durch Versuche an anderen Präparaten, so weit es erreichbar ist, die genaue Lage der rothen und blauen Curve innerhalb der schwarzen zu ermitteln, so dass alle drei Curven sich auf ein und dieselbe Ausgangsstellung, nämlich unsere Mittelstellung beziehen. Hierin liegt eine Schwierigkeit bei unseren Versuchen, welche sich nur bis zu gewissem Grade beseitigen lässt, indem die individuellen Verschiedenheiten der oberen Extremitäten eine Fehlerquelle bedingen, die nicht zu vermeiden ist. Aus diesem Grunde haben wir am Schluss bei der Angabe des Procentsatzes, nach dem jedes der beiden Hand-

*) Vergl. Formel (1) auf pag. 43.

gelenke sich an der Gesammtflexion betheiligt, letzteren nur bis auf 5% abgerundet angegeben.

Abgesehen von dieser Ungenauigkeit, die sich bei der Vergleichung der Flexionen unter einander einstellt, behalten, wenn man nach der Grösse der Flexionen in jedem einzelnen Handgelenk fragt, die betreffenden Curven für sich ihren genauen Werth, den wir auf ganze Winkelgrade abgerundet haben.

Um die richtige Lage der rothen Curve innerhalb der schwarzen festzustellen, ist nur nöthig, für die Flexionen im zweiten Handgelenk einerseits den Antheil zu ermitteln, der von der gesammten Radial-Ulnarflexion der Radialflexion und der Ulnarflexion einzeln zukommt, und andererseits den Antheil, der von der gesammten Dorsal-Volarflexion der Dorsalflexion und der Volarflexion einzeln zuzuweisen ist.

Um den Antheil für Radial- und Ulnarflexion zu messen, machten wir mehrere Male den Versuch, dass wir bei einem Vorderarm, dessen Radius so fixirt war, dass die Handfläche eine horizontale Lage erhielt, die Gelenkkapsel frei präparirten und dann in dieselbe zwei kleine Schnitte führten, dass man sowohl in das Lunatum als in das Capitatum einen dünnen Holzstift eintreiben konnte, die bei der Radial-Ulnarflexion nicht an die Ränder der Kapselschnitte antrafen, so dass sie nicht während der Bewegung gelockert werden konnten. An beiden Holzstiften befestigten wir je einen sehr dünnen Draht, dessen Gewicht unmöglich einen Einfluss auf die Lage von Lunatum oder Capitatum ausüben konnte. Die Spitzen dieser beiden Drähte beschreiben während der Radial-Ulnarflexion in ihren Projectionen auf die Horizontalebene je einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Innern des Köpfchens des Capitatum liegt. Sehr interessant war, dabei zu beobachten, dass die beiden Drahtspitzen, hauptsächlich die mit dem Lunatum verbundene, neben ihrer Bewegung in horizontaler Richtung noch eine Erhebung über der Horizontalebene zeigten, was auf eine dem entsprechende Bewegung des Lunatum und Capitatum um eine horizontale Achse schliessen lässt, neben ihrer Bewegung um die eine Verticalachse. Dies Verhältniss genauer zu untersuchen behalten wir uns noch vor.

Die Grösse der horizontalen Winkelexcursion der mit dem Capitatum verbundenen Nadelspitze liefert die Gesammtflexion der Hand in der Radial-Ulnarrichtung, die Differenz der horizontalen

Winkelexcursionen beider Nadelspitzen die Grösse der dem zweiten Handgelenk zuzuschreibenden Gesammtflexion in derselben Richtung. Beträgt die Excursion der ersteren Nadelspitze a^0, so ist die Mittelstellung dadurch definirt, dass von ihr aus die Winkelexcursionen der ersten Drahtspitze nach beiden Seiten $\frac{a^0}{2}$ betragen. Von dieser Mittelstellung gingen wir aus und beobachteten die Grösse der Winkelexcursion der zweiten, mit dem Lunatum verbundenen Drahtspitze einmal in der Radialrichtung, das andere Mal in der Ulnarrichtung; dann ist, wenn dieselben r^0 resp. u^0 betrugen:

$\left(\frac{a}{2} - r\right)^0$ die Grösse der Radialflexion im zweiten Handgelenk,

$\left(\frac{a}{2} - u\right)^0$ » » » Ulnarflexion » » » ,

beide von der Mittelstellung aus gerechnet.

Als Durchschnitt mehrerer Messungen an verschiedenen Präparaten ergab sich bei einer Gesammtflexion des zweiten Handgelenkes in der Radial-Ulnarrichtung von 28°

für die Radialflexion im zweiten Handgelenk 17°
» » Ulnarflexion » » » 11° .

Auf möglichst einfache Bruchtheile abgerundet kommt daher auf die Radialflexion $\frac{3}{5}$ und auf die Ulnarflexion $\frac{2}{5}$ der Gesammtflexion in der Radial-Ulnarrichtung.

Auf ganz analoge Weise bestimmten wir durch mehrere Versuche den durchschnittlichen Bruchtheil, der auf Dorsal- und Volarflexion für die Gesammtflexion in der Dorsal-Volarrichtung von der Mittelstellung aus gerechnet kommt. Wir hatten nur den Einschnitt in die Kapsel so zu führen, dass die Holzstifte im Capitatum und Lunatum während der Dorsal-Volarflexion nicht gelockert wurden.

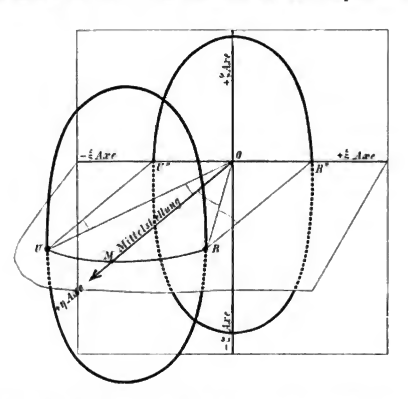
Als Mittel der angestellten Versuche ergab sich bei einer Gesammtflexion des zweiten Handgelenks in der Dorsal-Volarrichtung von 77°

für die Dorsalflexion im zweiten Handgelenk 58° ,
» » Volarflexion » » » 19° .

Auf kleinste Bruchtheile abgerundet kommt daher auf die Dor-

salflexion $\frac{3}{4}$ und auf die Volarflexion $\frac{1}{4}$ der Gesammtflexion in der Dorsal-Volarrichtung.

Die Grösse der Radial- und Ulnarflexion des zweiten Handgelenks bei der Lage der rothen Curve gegen das ξ, η, ζ-Coordinatensystem berechnet sich aus dem Abstand der Schnittpunkte R'' resp.



U'' der rothen Curve mit der positiven, resp. negativen ξ-Achse vom Anfangspunkt O. Es ist nämlich

$\measuredangle MOR$, die Grösse der Flexion in Radialrichtung $= \measuredangle R''RO$
$\measuredangle MOU$, » » » » » Ulnarrichtung $= \measuredangle U''UO$

und folglich, da $OR = OU =$ Radius der Kugel $= 241$ mm,

$$OR'' = 241 \ . \sin \widehat{MOR} \ ; \quad OU'' = 241 \ . \sin \widehat{MOU} \ .$$

Nun ergiebt sich aus Figur 3: $OR'' = 55$ mm, $OU'' = 105$ mm, daher ist:

$$\sin \widehat{MOR} = \frac{55}{241} = 0{,}228 \ , \quad \text{also} \quad \measuredangle \widehat{MOR} = 13^\circ \ 10',$$

$$\sin \widehat{MOU} = \frac{105}{231} = 0{,}435 \ , \quad \text{also} \quad \measuredangle \widehat{MOU} = 25^\circ \ 50'.$$

Bei der jetzigen Lage der rothen Curve würden also auf Radialflexion 13° 10′, auf Ulnarflexion 25° 50′ kommen. Nun verhalten sich aber die Grössen der Radialflexion und Ulnarflexion beim zweiten Hand-

gelenk wie 3 zu 2. Dreht man daher die rothe Curve innerhalb des $\xi\eta\zeta$-Coordinatensystems bei festbleibender schwarzer Curve um die ζ-Achse um 10° in der Ulnar-Radialrichtung und bezieht die rothe Curve in der neuen Lage auf die alte Mittelstellung, so beträgt jetzt, da in der Ulnar-Radialrichtung gedreht wurde, die Radialflexion 10° mehr, also 23° 10′, die Ulnarflexion dagegen 10° weniger, also 15° 50′, und jetzt verhalten sich in der That mit genügender Annäherung die Radialflexionen und Ulnarflexionen wie 3 : 2.

Nach dieser Drehung schneidet die Curve in der neuen Lage die + ζ-Achse in D, die — ζ-Achse in V, zwei Punkte, die 233,5 mm resp. 102 mm vom Anfangspunkt O entfernt sind. Diese Entfernungen liefern aber die mit 241 multiplicirten Sinus der Dorsalflexion resp. Volarflexion, so dass der

Sinus der Dorsalflexion $\frac{233,5}{241} = 0,969$, also die Dorsalflexion selbst 75° 40,

» » Volarflexion $\frac{102}{241} = 0,423$, » » Volarflexion » 25°

beträgt. Da diese beiden Flexionen sich in der That mit genügender Annäherung wie 3 : 1 verhalten, was wir als Regel für die von der Mittelstellung aus gerechneten Flexionen in der Dorsal-Volarebene beim zweiten Handgelenk gefunden hatten, so brauchen wir die rothe Curve nicht noch in verticaler Richtung zu verschieben, sondern haben nach der Drehung um die ζ-Achse um 10° mit der nöthigen Annäherung die wahre Lage der rothen Curve innerhalb der schwarzen.

Bei der Fixation der beiden anderen Knochen der ersten Handwurzelreihe hielten wir ebenfalls die Hand in der Mittelstellung fest. Da die Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe nur auf die Grenze der Flexionen Einfluss haben kann, während sie, wie man auch bei den Zwischenversuchen mit zum Theil geöffneter Gelenkkapsel konstatiren konnte, während der Bewegung der Hand in der Nähe der Mittelstellung beinahe nicht in Frage kommt, so können wir ohne Bedenken annehmen, dass die blaue Curve innerhalb der rothen die richtige Lage besitzt, denn die Basis des zweiten Gelenkes behielt ja in beiden zugehörigen Versuchsreihen ihre Lage bei, und wir hatten die Hand während der Fixation des Naviculare und Triquetrum in der Nähe der zur rothen Curve gehörenden Mittelstellung festgehalten. Aus diesem Grunde müssen wir die

blaue Curve denselben Verschiebungen unterwerfen, als die rothe Curve.

Um von der Lage der drei Curven innerhalb des X' Y' Z'-Coordinatensystems auf die Lage zu kommen, bei der die eine horizontale Coordinatenachse (η) mit der Mittelstellung, die andere (ξ) mit der Ulnar-Radialflexionsrichtung, und die senkrechte Achse (ζ) mit der Dorsal-Volarflexionsrichtung zusammenfällt und dabei die rothe und blaue Curve die richtige Lage in Bezug auf die schwarze Curve besitzen, müssen wir die schwarze Curve um die Y'-Achse im umgekehrten Sinne der Uhrzeigerdrehung um den Winkel $\alpha = 15^\circ\,40'$ (pag. 46) drehen, was, da $\sin\alpha = 0{,}27$ und $\cos\alpha = 0{,}963$ ist, mit Hülfe der Transformationsformeln (pag. 47)

$$(5)\ldots\quad \begin{cases} \xi = 0{,}963\,.\,x' - 0{,}27\,.\,z' \\ \eta = y' \\ \zeta = 0{,}27\,.\,x' + 0{,}963\,.\,z' \end{cases}$$ erreicht wird.

Die Punkte der rothen und blauen Curve müssen zunächst derselben Transformation unterworfen werden, deren Coordinaten wir nicht mit ξ, η, ζ, sondern als Zwischencoordinaten mit ξ', η', ζ' bezeichnen wollen, obgleich sie auf dieselbe Weise aus x', y', z' entstehen, wie oben ξ, η, ζ. Darauf müssen wir die Curven von oben gesehen im umgekehrten Sinne der Uhrzeigerdrehung um die ζ'-Achse durch den Winkel $\beta = 10^\circ$ drehen. Letzteres entspricht der Transformation

$$(6)\ldots\quad \begin{cases} \xi = \xi'\,.\,\cos\beta + \eta'\,.\,\sin\beta \\ \eta = -\xi'\,.\,\sin\beta + \eta'\,.\,\cos\beta \\ \zeta = \zeta' \end{cases},$$

denn die Winkel $(\xi\zeta')$, $(\eta\zeta')$, $(\zeta\xi')$, $(\zeta\eta')$ betragen 90°, $(\zeta\zeta') = 0^\circ$ und $(\xi\xi') = (\eta\eta') = \beta$, $(\xi\eta') = 90^\circ - \beta$, $(\eta\xi') = 90^\circ + \beta$.

Da nun nach (4)

$$\begin{aligned} \xi' &= x'\,.\,\cos\alpha - z'\,.\,\sin\alpha \\ \eta' &= y' \\ \zeta' &= x'\,.\,\sin\alpha + z'\,.\,\cos\alpha, \end{aligned}$$ so folgt für die rothe und blaue Curve, wenn wir diese Werthe für ξ', η', ζ' einsetzen:

$$(7)\ldots\begin{cases} \xi = x'\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta + y'\,.\,\sin\beta - z'\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\beta \\ \eta = -x'\,.\,\cos\alpha\,.\,\sin\beta + y'\,.\,\cos\beta + z'\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\beta \\ \zeta = x'\,.\,\sin\alpha + z'\,.\,\cos\alpha\,, \end{cases}$$

wo $\alpha = 15^\circ\,40'$ und $\beta = 10^\circ$. Da

$\sin\alpha = 0{,}27$, $\cos\alpha = 0{,}963$, $\sin\beta = 0{,}174$, $\cos\beta = 0{,}985$, so folgt:

$$(8)\ldots \begin{cases} \xi = 0{,}949 \,.\, x' + 0{,}174 \,.\, y' - 0{,}266 \,.\, z' \\ \eta = -0{,}168 \,.\, x' + 0{,}985 \,.\, y' + 0{,}47 \,.\, z' \\ \zeta = 0{,}27 \,.\, x' + 0{,}963 \,.\, z' \,. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Formeln (5) für die schwarze und (8) für die rothe und blaue Curve berechnet man die in Tabelle V niedergelegten Coordinaten ξ, ζ. Die η-Coordinaten haben für die Auswerthung der Versuche keine grössere Bedeutung und sind daher nicht mit berechnet worden.

Tabelle V.

Die drei Curven sind auf ein Coordinatensystem ξ, η, ζ bezogen, dessen η-Achse mit der Mittelstellung, dessen ξ-Achse mit der Radial-Ulnarrichtung und dessen ζ-Achse mit der Dorsal-Volarrichtung zusammenfällt, wobei die rothe und blaue Curve die richtige Lage innerhalb der schwarzen besitzen.

Schwarze Curve:

	ξ	ζ
1	+ 110,5	+ 21,5
13	+ 102	+ 151
16	+ 91	+ 196,5
17	+ 67,5	+ 225,5
18	+ 49,5	+ 234,5
19	+ 23	+ 239
20	— 18,5	+ 239,5
21	— 52	+ 233
6	— 63	+ 228
22	— 76	+ 219
23	— 95	+ 191
24	— 102	+ 167,5
25	— 107	+ 137,5
26	— 110	+ 103,5
27	— 112	+ 59
28	— 112	+ 28
29	— 109	— 2,5
5	— 106	— 38,5
30	— 100,5	— 73
31	— 92	— 121,5
32	— 84,5	— 170
33	— 80	— 198
34	— 71	— 220
35	— 29	— 238
36	+ 8	— 239
37	+ 35,5	— 235,5
38	+ 53	— 230
14	+ 63	— 225
39	+ 78	— 210
40	+ 91	— 183
41	+ 94	— 162,5
42	+ 101	— 120
43	+ 111	— 77

Rothe Curve:

	ξ	ζ
44	+ 97	+ 41,5
45	+ 93	+ 123,5
46	+ 94	+ 174,5
47	+ 80,5	+ 210,5
48	+ 52,5	+ 232
49	+ 37,5	+ 235,5
50	+ 22,5	+ 236
51	— 24,5	+ 222,5
52	— 38	+ 205,5
53	— 55	+ 144,5
54	— 55,5	+ 98
55	— 65,5	+ 19
56	— 64	— 29
57	— 22,5	— 83,5
58	+ 17,5	— 110
59	+ 43	— 114
60	+ 59	— 98,5
61	+ 90,5	— 33

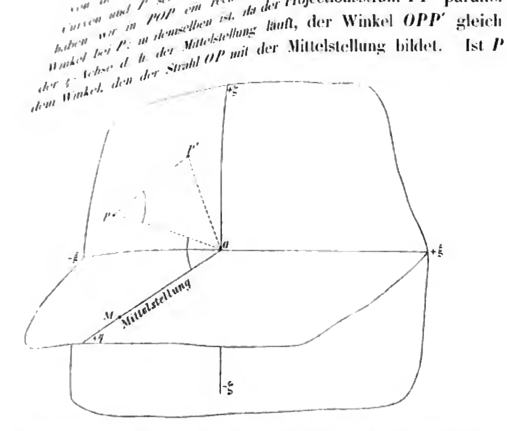
Blaue Curve:

	ξ	ζ
62	+ 67,5	+ 13,5
63	+ 71,5	+ 45
64	+ 74,5	+ 61,5
65	+ 58,5	+ 134
66	+ 49	+ 156
67	+ 25	+ 179,5
68	+ 4	+ 161
69	— 0,5	+ 143
70	— 14,5	+ 123,5
71	— 29	+ 90
72	— 40	+ 45
73	— 42	+ 24
74	— 37	— 17
75	— 9	— 60
76	+ 11,5	— 65
77	+ 43	— 69
78	+ 57,5	— 63

blaue Curve densel... Curve.

Un... Coordi... horiz... (ξ) ... mi... rc... (

... Projectionscurven finden sich in Figur 4 auf- ... Dieselben liefern uns nun ohne grosse Rechnung die ... den dazu gehörenden Flexionen in jeder beliebigen Richtung von der Mittelstellung aus. Sei P ein Punkt auf einer der drei Curven und P' seine Projection auf die $\xi\zeta$-Ebene (siehe Figur), so haben wir in POP' ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P'; da der Projectionsstrahl PP' parallel der η-Achse d. h. der Mittelstellung läuft, der Winkel OPP' gleich dem Winkel, den der Strahl OP mit der Mittelstellung bildet. Ist P



ein Punkt einer der Curven, so ist aber der Winkel zwischen OP und der Mittelstellung die zugehörige Flexion. Aus dem rechtwinkligen Dreieck folgt nun, wenn wir die Grösse des Flexionswinkels mit F bezeichnen:

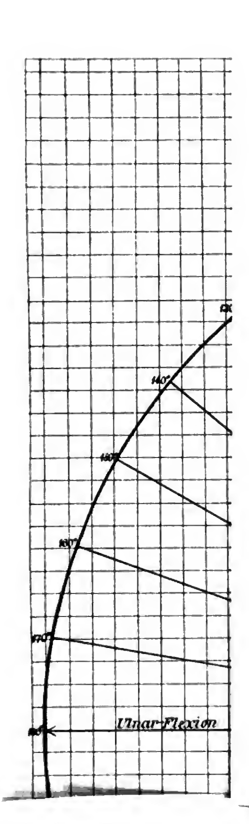
$$OP' = OP \,.\, \sin F \,,$$

oder, da alle Punkte der Curven auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 241 mm liegen:

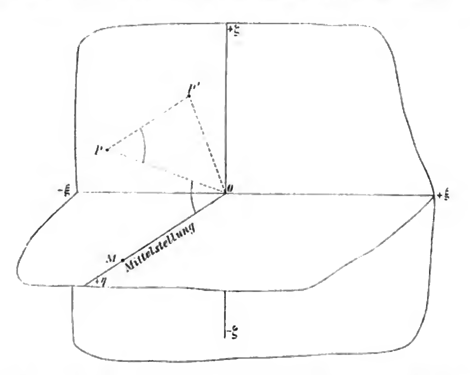
$$OP' = 241 \,.\, \sin F \,,$$

d. h. der Abstand aller Punkte der Projectionscurven in der $\xi\zeta$-Ebene vom Anfangspunkt O giebt das 241-fache des Sinus des Flexionswinkels in der Richtung OP' an.

Um einen Einblick in die Grösse der Flexionen in den ver-


140°
160°
Ulnar Flexion

Die zugehörigen Projectionscurven finden sich in Figur 4 aufgezeichnet. Dieselben liefern uns nun ohne grosse Rechnung die zu den drei Curven gehörenden Flexionen in jeder beliebigen Richtung von der Mittelstellung aus. Sei P ein Punkt auf einer der drei Curven und P' seine Projection auf die $\xi\zeta$-Ebene (siehe Figur), so haben wir in POP' ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P'; in demselben ist, da der Projectionsstrahl PP' parallel der η-Achse d. h. der Mittelstellung läuft, der Winkel OPP' gleich dem Winkel, den der Strahl OP mit der Mittelstellung bildet. Ist P



ein Punkt einer der Curven, so ist aber der Winkel zwischen OP und der Mittelstellung die zugehörige Flexion. Aus dem rechtwinkligen Dreieck folgt nun, wenn wir die Grösse des Flexionswinkels mit F bezeichnen:

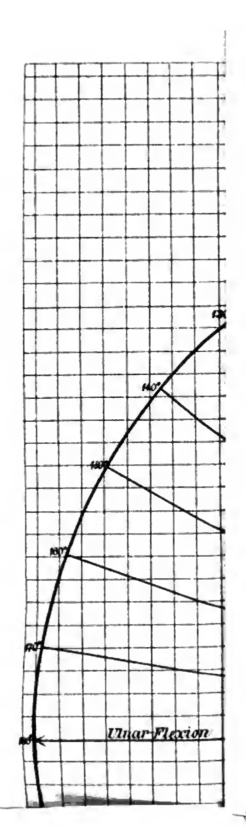
$$OP' = OP \cdot \sin F\,,$$

oder, da alle Punkte der Curven auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 241 mm liegen:

$$OP' = 241 \cdot \sin F\,,$$

d. h. der Abstand aller Punkte der Projectionscurven in der $\xi\zeta$-Ebene vom Anfangspunkt O giebt das 241-fache des Sinus des Flexionswinkels in der Richtung OP' an.

Um einen Einblick in die Grösse der Flexionen in den ver-


140°
Ulnar Flexion

Figur 5.

Verkleinerung der Figur 4 im Massstab 1 : 2,41, so dass jeder einzelne Abstand eines Punktes der drei Kurven von O in Decimetern ausgedrückt direkt die Grösse des Sinus der zugehörigen Flexion liefert. Der äusserste Kreis hat den Radius 1 dm. *)

Dorsal-Flexion

Ulnar-Flexion

Radial-Flexion

Volar-Flexion

*) Da Figur 5, ebenso wie später Figur 10 und 11, in ihrer wahren Grösse nicht in das Format der Abhandlungen passen würden, so sind dieselben nur in $^3/_4$ ihrer Grösse eingezeichnet; dem entsprechend findet sich unter diesen drei Figuren ein Decimetermassstab in derselben Verkleinerung vor.



Massstab ($^3/_4$ der wahren Grösse).

schiedenen Richtungen zu bekommen, haben wir von der Radialrichtung, d. h. der Richtung der positiven ξ-Achse, aus in Figur 4 in Winkelabständen von 10° Strahlen von O aus gezogen und auf denselben die Abstände der Schnittpunkte der drei Curven von O gemessen. Die verschiedenen Richtungen haben wir von der Radialrichtung aus im umgekehrten Sinne der Uhrzeigerdrehung mit den Winkelabständen bezeichnet, dann hat man z. B. in den Richtungen 0°, 90°, 180°, 270° bezüglich die Richtungen der Radial-, Dorsal-, Ulnar- und Volarflexion. Diese Abstände sind in Tabelle VI niedergelegt. Die darauf folgende Tabelle VII enthält dieselben Abstände durch 241 dividirt, d. h. direct die Sinus der Flexionen, und die Figur 5 (eine Verkleinerung der Figur 4) die Sinus in einen Kreis mit dem Radius 1 dm so eingezeichnet, dass jeder Abstand in Decimetern ausgedrückt direct den Sinus der zugehörigen Flexion liefert. Tabelle VIII (pag. 57) endlich enthält die Grössen der Flexionen selbst.

Tabelle VI.

Abstände der Punkte der Projectionscurven in der $\xi\zeta$-Ebene vom Coordinatenanfangspunkt O in 36 um 10° verschiedenen Richtungen. In den Richtungen 0°, 90°, 180°, 270° findet bezüglich Radial-, Dorsal-, Ulnar-, Volarflexion statt. Bezeichnet F die Grösse jeder einzelnen Flexion, so ist jeder dieser Abstände gleich $241 . \sin F$.

Richtung der Flexion	für die schwarze Curve*)	für die rothe Curve	für die blaue Curve	Richtung der Flexion	für die schwarze Curve	für die rothe Curve	für die blaue Curve
0°	109,5	95	66,5	*180°*	109,5	65,5	40,5
10°	112	98	68,5	*190°*	109,5	65	40
20°	117,5	103	72,5	*200°*	113	66	40
30°	127,5	110	81,5	*210°*	119	68	41
40°	142	122	97	*220°*	128,5	70	43
50°	164,5	143,5	111	*230°*	145,5	72,5	45,5
60°	196,5	187,5	130	*240°*	174,5	76	49
70°	229,5	227	155,5	*250°*	223	82,5	54
80°	240,5	238,5	178,5	*260°*	239	90,5	59,5

*) Die schwarze Curve liefert die Gesammtflexionen der Hand, die rothe die Flexionen im zweiten Handgelenk bei Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe und die blaue Curve dieselben bei Ausschluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe.

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve
90°	239,5	233,5	143
100°	239,5	211	115
110°	231	159	90
120°	201	110,5	73,5
130°	168	91	62
140°	143,5	80	53,5
150°	128,5	73	48
160°	118,5	69	44
170°	112,5	66,5	41,5

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve
270°	239,5	102	63,5
280°	237,5	112,5	66
290°	225,5	122	72
300°	187,5	115,5	80
310°	157	107	84,5
320°	140,5	101	82
330°	128	97,5	75,5
340°	116,5	96	70,5
350°	110,5	94,5	67,5

Tabelle VII.

Sinus der Flexionen.

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve
0°	0,454	0,394	0,276
10°	0,465	0,407	0,284
20°	0,488	0,427	0,301
30°	0,529	0,456	0,338
40°	0,589	0,506	0,402
50°	0,683	0,595	0,460
60°	0,815	0,778	0,539
70°	0,952	0,942	0,645
80°	0,998	0,990	0,741
90°	0,994	0,969	0,593
100°	0,994	0,875	0,477
110°	0,958	0,660	0,373
120°	0,834	0,458	0,305
130°	0,697	0,378	0,257
140°	0,595	0,332	0,222
150°	0,533	0,303	0,199
160°	0,492	0,286	0,183
170°	0,467	0,276	0,172

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve
180°	0,454	0,272	0,168
190°	0,454	0,270	0,166
200°	0,469	0,274	0,166
210°	0,494	0,282	0,170
220°	0,533	0,290	0,178
230°	0,604	0,301	0,189
240°	0,724	0,315	0,203
250°	0,925	0,342	0,224
260°	0,992	0,376	0,247
270°	0,994	0,423	0,263
280°	0,985	0,467	0,274
290°	0,936	0,506	0,299
300°	0,778	0,479	0,332
310°	0,651	0,444	0,351
320°	0,583	0,419	0,340
330°	0,531	0,405	0,313
340°	0,483	0,398	0,293
350°	0,459	0,392	0,280

Tabelle VIII.

Die Flexionen

(auf 10′ abgerundet).

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve	Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **rothe** Curve	für die **blaue** Curve
0°	27° —	23° 10′	16° —	*180°*	27° —	15° 50′	9° 40′
10°	27° 40′	24° —	16° 30′	*190°*	27° —	15° 40′	9° 30′
20°	29° 10′	25° 20′	17° 30′	*200°*	28° —	15° 50′	9° 30′
30°	32° —	27° 10′	19° 50′	*210°*	29° 40′	16° 20′	9° 50′
40°	36° 10′	30° 20′	23° 40′	*220°*	32° 10′	16° 50′	10° 20′
50°	43° —	36° 30′	27° 20′	*230°*	37° 10′	17° 30′	11° —
60°	54° 40′	51° —	32° 40′	*240°*	46° 20′	18° 20′	11° 40′
70°	72° 10′	70° 20′	40° 10′	*250°*	67° 40′	20° —	13° —
80°	86° 20′	81° 50′	47° 50′	*260°*	82° 40′	22° 10′	14° 20′
90°	83° 40′	75° 40′	36° 20′	*270°*	83° 40′	25° —	15° 10′
100°	83° 40′	61° —	28° 30′	*280°*	80° —	27° 50′	15° 50′
110°	73° 20′	41° 20′	21° 50′	*290°*	69° 20′	30° 20′	17° 30′
120°	56° 30′	27° 20′	17° 50′	*300°*	51° —	28° 40′	19° 20′
130°	44° 10′	22° 10′	14° 50′	*310°*	40° 40′	26° 20′	20° 30′
140°	36° 30′	19° 20′	12° 50′	*320°*	35° 40′	24° 50′	19° 50′
150°	32° 10′	17° 40′	11° 30′	*330°*	32° 10′	23° 50′	18° 10′
160°	29° 30′	16° 40′	10° 30′	*340°*	28° 50′	23° 30′	17° —
170°	27° 50′	16° —	10° —	*350°*	27° 20′	23° —	16° 20′

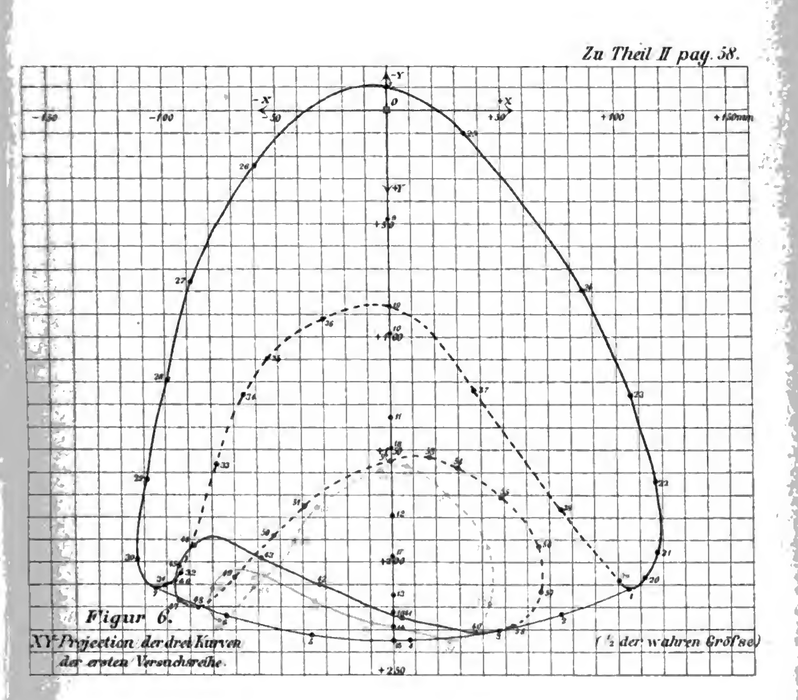
Für die zweite Versuchsreihe verwendeten wir den linken Unterarm desselben Individuums, an dessen rechten Arm wir die erste Versuchsreihe angestellt hatten. Diesmal fixirten wir die horizontal gelegte Hand, indem wir in jeden der vier Metacarpusknochen mit Ausnahme des ersten je zwei Nägel möglichst weit von einander entfernt eintrieben und dadurch die einzelnen Metacarpusknochen unverrückbar fest mit ihrer Unterlage verbanden. Von einer besonderen Befestigung der zweiten Handwurzelreihe musste abgesehen werden, da die Anbohrung der einzelnen Knochen zu viel Zerstörung der Weichtheile gegeben hätte und infolge dessen der Gelenkmechanismus verändert worden wäre. Die Gelenke also zwischen den Basen der Metacarpalknochen und der zweiten Handwurzelreihe sind demnach nicht ausgeschieden, sie wurden aber zunächst ausser Betracht gelassen, was auch zulässig war, da sie doch nur geringe

Verschiebung gestatten. Der Rücken der Hand lag oben, so dass wie bei den früheren Versuchen von vorn gesehen nach rechts Radial-, nach oben Dorsal-, nach links Ulnar- und nach unten Volarflexion stattfand. In den in der Mitte des Unterarms abgesägten Radius befestigten wir jetzt wie früher die Holznadel, deren Spitze ca. 235 mm vom Mittelpunkt des Capitatum entfernt war, um auch hier eine Verlängerung des Radiusknochenabschnittes zu erzielen, wodurch infolge der grösseren Ausschläge der Nadelspitze an Genauigkeit gewonnen wird.

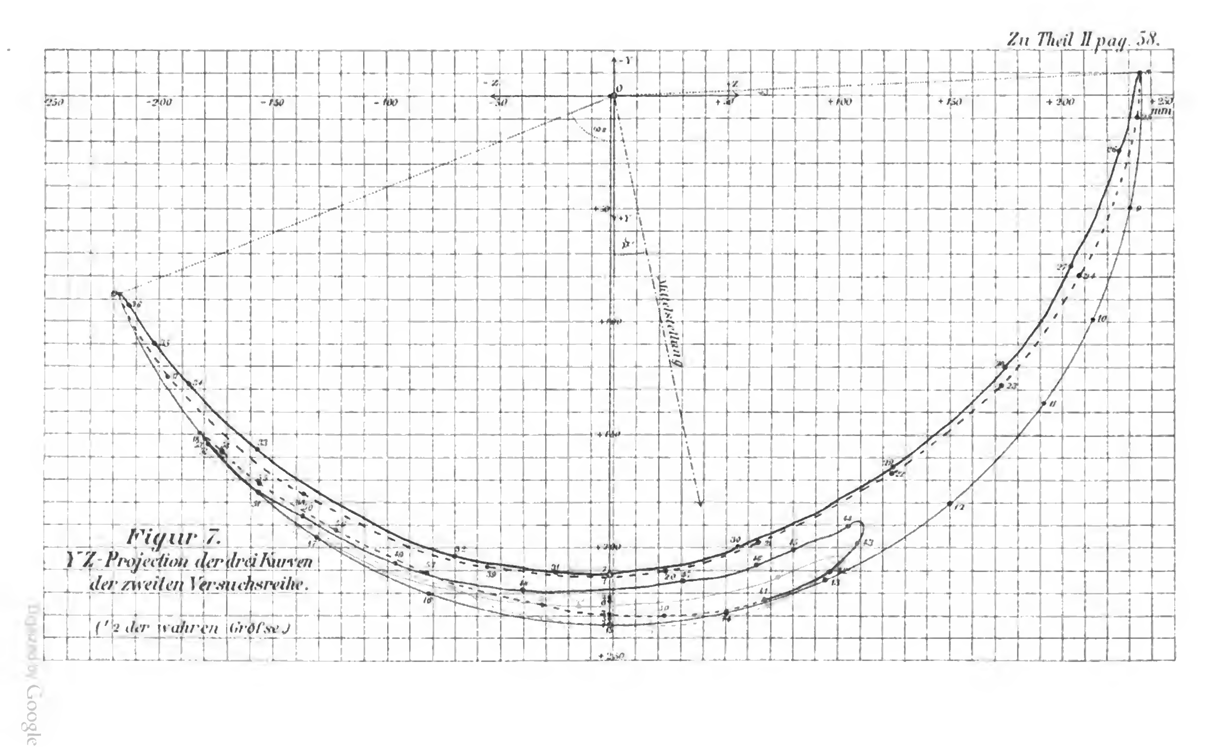
Um die genaue Lage des Mittelpunktes der Kugel und der Mittelstellung in unserem Coordinatensystem zu fixiren, den wir dann wie früher zum Coordinatenanfang stempeln, haben wir zunächst einige Punkte (1 — 7 in Tabelle IX und Figur 6) in der durch die Mitte des Capitatum gehenden Horizontalebene, hieraus die Horizontalprojection der Mittelstellung und dann einige Punkte (8—19) in der durch die Horizontalprojection der Mittelstellung gehenden Verticalebene gemessen (Fig. 7) und durch die entsprechenden Kreise verbunden. Für den Radius der Kugel ergab sich die Grösse von 235,5 mm.

Den Mittelpunkt der Kugel nahmen wir dann wieder als Coordinatenanfang, die durch ihn gehende Horizontalebene als XY-Ebene und in letzterer die Projection der Mittelstellung als Y-Achse. Auf dieses Coordinatensystem beziehen sich die in Tabelle IX und X aufgezeichneten Coordinaten der 72 gemessenen Punkte.

Zunächst wurde wieder die bei einer ganz gleichen Kraft wie bei der ersten Versuchsreihe, nämlich einer am Hebelarm 65 mm angreifenden Kraft von 1 kg, entstehende Grenzcurve für die Gesammtflexionen durch 20 beobachtete Punkte (20—39) gemessen; derselben gehören auch die mit 1, 7, 8, 19 bezeichneten Punkte an. Die Coordinaten der Punkte 1—39 befinden sich in Tabelle IX.



Figur 6.
XY-Projection der drei Kurven der ersten Versuchsreihe.
(½ der wahren Größe)



Figur 7.
YZ-Projection der drei Kurven der zweiten Versuchsreihe.
(½ der wahren Größe)

Tabelle IX.

Coordinatenanfangspunkt ist der Mittelpunkt der Kugel, auf welcher sich die Nadelspitze bewegt; der Radius beträgt 235,5 mm.

Schnittcurve der Kugel mit der Ebene $z = -1{,}5$.

	x	y	z
1	+ 106	+ 211	— 1,5
2	+ 75,5	+ 223	— 1,5
3	+ 48,5	+ 230	— 1,5
4	+ 7,5	+ 235	— 1,5
5	— 35,5	+ 232	— 1,5
6	— 73	+ 224	— 1,5
7	— 105	+ 211,5	— 1,5

Schnittcurve der Kugel mit der Ebene $x = 0$.

	x	y	z
8	0	— 10,5	+ 236
9	0	+ 49	+ 230
10	0	+ 98,5	+ 213
11	0	+ 136	+ 191
12	0	+ 180	+ 150
13	0	+ 214,5	+ 94,5
14	0	+ 229	+ 50,5
15	0	+ 235,5	— 1,5
16	0	+ 221	— 81,5
17	0	+ 197	— 131
18	0	+ 150	— 181
19	0	+ 87	— 219

Grenzcurve für die Gesammtflexionen der Hand.

	x	y	z
20	+ 111,5	+ 209	+ 24
21	+ 118,5	+ 196	+ 64,5
22	+ 118	+ 165	+ 124,5
23	+ 105,5	+ 127	+ 172,5
24	+ 85,5	+ 79,5	+ 207
25	+ 33,5	+ 10,5	+ 233,5
26	— 59,5	+ 24,5	+ 226,5
27	— 88	+ 76	+ 203
28	— 99	+ 119	+ 176
29	— 109	+ 163,5	+ 125
30	— 112	+ 199,5	+ 54,5
31	— 100	+ 210,5	— 26
32	— 93,5	+ 204	— 71
33	— 78	+ 156,5	— 156,5
34	— 66,5	+ 126,5	— 186,5
35	— 53,5	+ 109,5	— 201,5
36	— 30,5	+ 91,5	— 214,5
37	+ 38	+ 124	— 196,5
38	+ 75	+ 176	— 136,5
39	+ 100,5	+ 207,5	— 56

Darauf wurde in derselben Weise wie bei der ersten Versuchsreihe unter Beibehaltung der Mittelstellung der Hand von aussen her das Lunatum fixirt und von Neuem die Grenzcurve gemessen (die Punkte 40—58 in Tabelle X und die braun gezeichnete Curve in Figur 6 und 7). Während wir früher durch Fixation des Lunatum das erste Handgelenk ausschieden, hatten wir jetzt, weil die Hand umgedreht war, das zweite Handgelenk eliminirt, so dass die braune Curve die Flexionen des ersten Handgelenkes liefert.

Um auch den Einfluss der Beweglichkeit der ersten Handwurzelreihe auf das erste Handgelenk zu ermitteln, fixirten wir endlich noch das Naviculare und Triquetrum und bestimmten von der jetzt noch vorhandenen Grenzcurve 14 Punkte (die Punkte 59—72 in Tabelle X, welche in Figur 6 und 7 durch eine grüne Curve verbunden sind). Der Einfluss der Beweglichkeit der ersten Handwurzelreihe auf das erste Handgelenk ist dann aus der Differenz der Flexionen des vorhergehenden und des letzten Versuches ersichtlich.

Tabelle X.

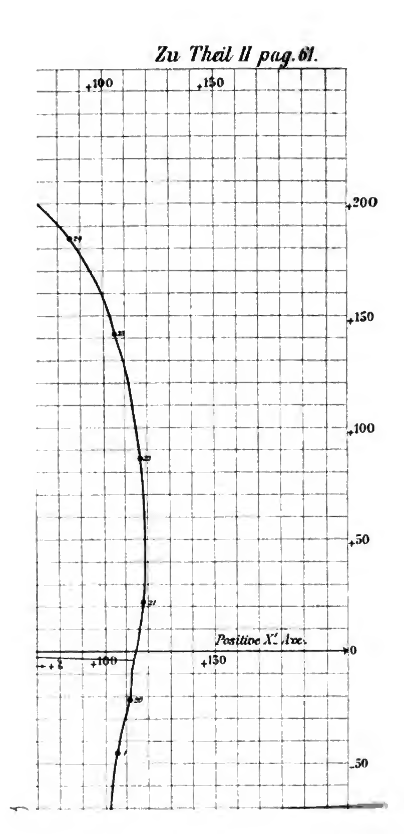
Grenzcurve für die Flexionen der Hand bei fixirtem Metacarpusknochen und fixirtem Lunatum.

	x	y	z
40	+ 36,5	+ 232	+ 22
41	+ 2,5	+ 224	+ 69
42	— 32,5	+ 211	+ 97,5
43	— 59	+ 199	+ 108,5
44	— 87,5	+ 191,5	+ 105
45	— 93,5	+ 201,5	+ 79,5
46	— 95	+ 208	+ 62
47	— 95,5	+ 215,5	+ 29
48	— 85,5	+ 219	— 40,5
49	— 69,5	+ 207,5	— 96
50	— 52,5	+ 188	— 136,5
51	— 39	+ 175	— 156,5
52	0	+ 154,5	— 178
53	+ 16,5	+ 152,5	— 179,5
54	+ 30	+ 159	— 172,5
55	+ 49,5	+ 171	— 156,5
56	+ 65,5	+ 193	— 122
57	+ 67	+ 212	— 81
58	+ 54	+ 228,5	— 31

Grenzcurve für die Flexionen der Hand bei fixirtem Metacarpusknochen, fixirtem Lunatum, Naviculare und Triquetrum.

	x	y	z
59	+ 35	+ 233	+ 18
60	— 1	+ 225	+ 69
61	— 27,5	+ 214	+ 94
62	— 49	+ 204	+ 104
63	— 71,5	+ 210,5	+ 74,5
64	— 69	+ 225	— 16
65	— 54,5	+ 210	— 101
66	— 34,5	+ 189	— 139
67	— 25	+ 174	— 159
68	+ 3,5	+ 157	— 176
69	+ 14,5	+ 155,5	— 177,5
70	+ 33	+ 168	— 163
71	+ 54	+ 192	— 134
72	+ 54	+ 217,5	— 70

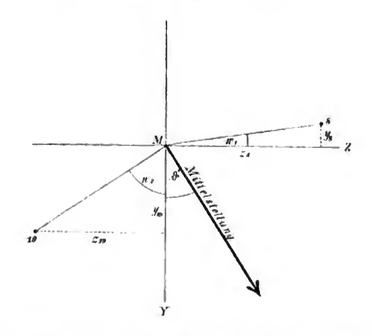
Zur Einführung eines neuen Coordinatensystemes x', y', z', welches durch Drehung um die alte X-Achse um den Winkel ϑ', den die Mittelstellung mit der alten Y-Achse bildet, mit dem alten Coordinatensystem zur Deckung kommt, müssen wir wieder die Formel (2) von pag. 43 verwenden.


+100
+150
+200
+150
+100
+50
Positive X'. Axe.
0
+100
+150
-50

In Figur 7 sind 8 und 19 die äussersten Punkte der Projection. Der Strahl $\overline{M\,8}$ möge den Winkel ω_1 mit der positiven Richtung der Z-Achse, der Strahl $\overline{M\,19}$ den Winkel ω_2 mit der positiven Richtung der Y-Achse bilden, dann ist

$$\vartheta' = \frac{\omega_1 + 90^0 + \omega_2}{2} - \omega_2 = 45^0 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} .$$

Bezeichnen wir mit y_8, z_8; y_{19}, z_{19} die absoluten Beträge der



y- und z-Coordinaten der Punkte 8 und 19, so ergiebt sich, wie aus obiger Figur ersichtlich ist:

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{y_8}{z_8} = \frac{10,5}{236} = 0,0445 \text{; also } \omega_1 = \ \ 2^0\ 35' ,$$

$$\operatorname{tang} \omega_2 = \frac{z_{19}}{y_{19}} = \frac{229}{87} = 2,517 \ \text{; also } \omega_2 = 68^0\ 20' ,$$

woraus folgt $\quad \vartheta' = 12^0\ 10'$.

Nun ist $\sin \vartheta' = 0,211$, $\cos \vartheta' = 0,978$; daher gehen die alten Coordinaten in die neuen x', y', z' über durch die Formeln

$$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & 0,978 \,.\, y + 0,211 \,.\, z \\ z' = & - 0,211 \,.\, y + 0,978 \,.\, z \,. \end{cases}$$

In diesem neuen Coordinatensystem fällt die Mittelstellung mit der y'-Achse zusammen. Fig. 8 enthält die Projectionen der drei Curven auf die $x'z'$-Ebene und die Tabellen XI und XII die zugehörigen Coordinaten.

Tabelle XI.

Coordinaten der Punkte der Grenzcurven für das Coordinatensystem x', y', z', bei dem die Mittelstellung mit der y'-Achse zusammenfällt.

Für die schwarze Curve:

	x'	y'	z'
1	+ 106	+ 207	— 45,5
20	+ 114,5	+ 210,5	— 21
21	+ 118,5	+ 205	+ 21,5
22	+ 118	+ 187,5	+ 86,5
23	+ 105,5	+ 160	+ 141
24	+ 85,5	+ 121,5	+ 184,5
25	+ 33,5	+ 59,5	+ 224
8	0	+ 39,5	+ 234
26	— 59,5	+ 74	+ 214,5
27	— 88	+ 116,5	+ 181
28	— 99	+ 153	+ 145
29	— 109	+ 186	+ 87

	x'	y'	z'
30	— 112	+ 207	+ 11
7	— 105	+ 206,5	— 46
31	— 100	+ 201	— 69,5
32	— 93,5	+ 185,5	— 112
33	— 78	+ 121,5	— 185
34	— 66,5	+ 85,5	— 208
35	— 53,5	+ 66	— 219
36	— 30,5	+ 45,5	— 228
19	0	+ 39,5	— 231
37	+ 38	+ 81	— 216
38	+ 75	+ 145	— 169
39	+ 100,5	+ 192	— 98

Tabelle XII.

Coordinaten der Punkte der Grenzcurven für das Coordinatensystem x', y', z', bei dem die Mittelstellung mit der y'-Achse zusammenfällt.

Für die braune Curve:

	x'	y'	z'
40	+ 36,5	+ 232	— 27,5
41	+ 2,5	+ 234	+ 20
42	— 32,5	+ 226,5	+ 50,5
43	— 59	+ 217,5	+ 63,5
44	— 87,5	+ 209	+ 61,5
45	— 93,5	+ 213,5	+ 34,5
46	— 95	+ 217	+ 16,5
47	— 95,5	+ 217	— 17
48	— 85,5	+ 206,5	— 85,5
49	— 69,5	+ 183,5	— 136,5
50	— 52,5	+ 156,5	— 172
51	— 39	+ 140	— 189
52	0	+ 115	— 205
53	+ 16,5	+ 113	— 206,5
54	+ 30	+ 120,5	— 201
55	+ 49,5	+ 136	— 188
56	+ 65,5	+ 164	— 159
57	+ 67	+ 191,5	— 123
58	+ 54	+ 217	— 78

Für die grüne Curve:

	x'	y'	z'
59	+ 35	+ 232	— 31,5
60	— 1	+ 234	+ 20
61	— 27,5	+ 228	+ 43
62	— 49	+ 221	+ 58
63	— 71,5	+ 221,5	+ 27,5
64	— 69	+ 217	— 62,5
65	— 54,5	+ 184,5	— 143
66	— 34,5	+ 156,5	— 175
67	— 25	+ 137,5	— 194
68	+ 3,5	+ 117,5	— 204,5
69	+ 14,5	+ 115	— 204,5
70	+ 33	+ 134,5	— 193,5
71	+ 51	+ 160,5	— 170
72	+ 51	+ 199,5	— 115,5



Aus der $X'Z'$-Projection (Fig. 8) erkennt man wieder die beiden Symmetrieachsen der schwarzen Curve. Dieselben bilden hier noch mit den beiden Coordinatenachsen einen Winkel α, dessen Tangente den Werth $\frac{7,5}{200} = 0,0375$ besitzt, so dass

$$\alpha = 2^0\,10' \; .$$

Es war bei der zweiten Versuchsreihe, da wir die Hand selbst fixirten, besser gelungen, die Hand horizontal zu legen, als bei der ersten Versuchsreihe, daher ist α hier beträchtlich kleiner.

Wir führen nun, um dieselben Verhältnisse wie bei der ersten Versuchsreihe zu haben, endlich wieder ein Coordinatensystem ξ, ζ, η ein, auf das wir die schwarze Curve ohne Weiteres beziehen und die beiden anderen Curven erst, nachdem wir sie in die richtige Lage innerhalb der schwarzen gebracht haben.

Für die schwarze Curve haben wir, da $\sin \alpha = 0,038$ und $\cos \alpha = 0,999$ ist, die Transformationsformeln:

$$\xi = 0,999 \, . \, x' - 0,038 \, . \, z'$$
$$\eta = y'$$
$$\zeta = 0,038 \, . \, x' + 0,999 \, . \, z' \; .$$

Um den Antheil zu bestimmen, der bei den Flexionen im ersten Handgelenk in der Radial-Ulnarrichtung und Dorsal-Volarrichtung der Radial- und Ulnarflexion, resp. Dorsal- und Volarflexion zuzuschreiben ist, stellten wir wieder eine Reihe von Versuchen an anderen Präparaten in genau derselben Weise an, wie früher (pag. 48 ff.) beschrieben wurde. Die von der Mittelstellung aus in den vier verschiedenen Richtungen bestimmten Winkelexcursionen der mit dem Lunatum verbundenen Drahtspitze liefern dann direct das Verlangte.

Es ergab sich als Durchschnittsresultat einer Reihe von Versuchen, dass im ersten Handgelenk

1) bei einer Gesammtflexion von 29° in der Radial-Ulnarrichtung

12° der Radialflexion und 17° der Ulnarflexion

zuzuweisen sind, so dass die Radialflexion abgerundet $\frac{2}{5}$ und die Ulnarflexion $\frac{3}{5}$ der Gesammtflexion ausmacht.

2) bei einer Gesammtflexion von 81° in der Dorsal-Volarrichtung

20° der Dorsalflexion und 61° der Volarflexion

zuzuschreiben sind, so dass die Dorsalflexion abgerundet $\frac{1}{4}$ und die Ulnarflexion $\frac{3}{4}$ der Gesammtflexion beträgt.

Es ist dies also merkwürdiger Weise gerade das umgekehrte Verhältniss, als beim zweiten Handgelenk.

Wie man durch mehrfaches Probiren an den Curven in Figur 8 herausfindet, tritt diese Vertheilung der Flexionen für die braune Curve ein, wenn man, nachdem man dieselbe der obigen Transformation

$$\begin{aligned} \xi' &= 0{,}999 \,.\, x' - 0{,}038 \,.\, z' \\ \eta' &= y' \\ \zeta' &= 0{,}038 \,.\, x' + 0{,}999 \,.\, x' \end{aligned}$$

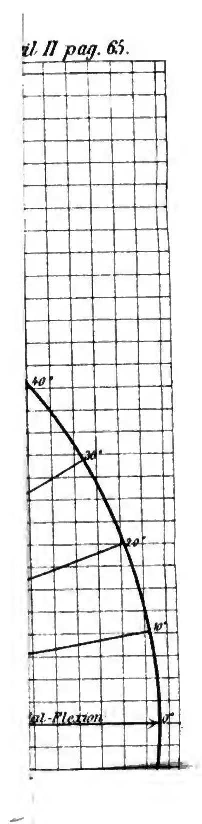
unterworfen hat, zunächst um die ζ'-Achse von oben gesehen in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers um den Winkel 5° dreht, was, da sin 5° = 0,087 und cos 5° = 0,996 ist, der Transformation entspricht:

$$\begin{aligned} \xi'' &= 0{,}996 \,.\, \xi' + 0{,}087 \,.\, \eta' \\ \eta'' &= -0{,}087 \,.\, \xi' + 0{,}996 \,.\, \eta' \\ \zeta'' &= \zeta', \end{aligned}$$

und darauf um die ξ''-Achse von der positiven Seite derselben aus gesehen in der Richtung des Uhrzeigers um 4° dreht. Da nun sin 4° = 0,07 und cos 4° = 0,998, so entspricht dies der Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \xi'' \\ \eta &= 0{,}998 \,.\, \eta'' - 0{,}07 \,.\, \zeta'' \\ \zeta &= 0{,}07 \,.\, \eta'' + 0{,}998 \,.\, \zeta''. \end{aligned}$$

Drückt man in letzteren Transformationsformeln ξ'', η'', ζ'' mit Hülfe der vorhergehenden durch ξ', η', ζ' und dann diese wieder nach obigen Formeln durch x', y', z' aus, so erhält man schliesslich für die braune und daher auch für die grüne Curve zum Uebergang das $\xi\zeta\eta$-Coordinatensystem, wie man ohne Schwierigkeit berechnet, die Formeln:


il. II pag. 65.
40°
30°
20°
10°
al-Flexion
0°

$$\xi = \quad 0{,}995 \,.\, x' + 0{,}087 \,.\, y' - 0{,}038 \,.\, z'$$
$$\eta = -\,0{,}089 \,.\, x' + 0{,}994 \,.\, y' - 0{,}07 \,.\, z'$$
$$\zeta = \quad 0{,}032 \,.\, x' + 0{,}07 \,.\, y' + 0{,}997 \,.\, z'.$$

Dann vertheilen sich die vier Hauptflexionen im ersten Handgelenk, wie wir sehen werden, so, dass

auf die Radialflexion 14° 10′, auf die Ulnarflexion 19° 30′,
auf die Dorsalflexion 16° 50′, auf die Volarflexion 50° 40′

kommen.

In Tabelle XIII sind die neuen ξ- und ζ-Coordinaten angeführt; die zugehörigen Projectionscurven sind in Figur 9 aufgezeichnet.

Tabelle XIII.

Die drei Curven sind auf ein Coordinatensystem ξ, η, ζ bezogen, dessen η-Achse mit der Mittelstellung, dessen ξ-Achse mit der Radial-Ulnarrichtung und dessen ζ-Achse mit der Dorsal-Volarrichtung zusammenfällt, wobei die braune und grüne Curve die richtige Lage innerhalb der schwarzen besitzen.

Schwarze Curve:

	ξ	ζ
1	+ 107	— 42
20	+ 112	— 17
21	+ 117,5	+ 25,5
22	+ 115	+ 91
23	+ 100	+ 145
24	+ 79,5	+ 188
25	+ 25,5	+ 226
8	— 8,5	+ 231,5
26	— 67,5	+ 213
27	— 94,5	+ 178
28	— 104,5	+ 142
29	— 112	+ 83,5
30	— 112,5	+ 7
7	— 104	— 49,5
31	— 97	— 73
32	— 89	— 115,5
33	— 71,5	— 188
34	— 69	— 210,5
35	— 45,5	— 221
36	— 22,5	— 229
19	+ 8,5	— 231,5
37	+ 45,5	— 215
38	+ 81,5	— 167
39	+ 104	— 94,5

Braune Curve:

	ξ	ζ
40	+ 58	— 0,5
41	+ 22	+ 46
42	— 14,5	+ 76
43	— 41	+ 86
44	— 71	+ 82,5
45	— 75,5	+ 56
46	— 76,5	+ 38,5
47	— 78	+ 4,5
48	— 63	— 65
49	— 44,5	— 118
50	— 26,5	— 156
51	— 11	— 175
52	+ 29	— 191
53	+ 45	— 194
54	+ 57,5	— 185,5
55	+ 77	— 169
56	+ 91	— 138
57	+ 91	— 99
58	+ 80	— 52

Grüne Curve:

	ξ	ζ
59	+ 56,5	— 4,5
60	+ 19	+ 46
61	— 8,5	+ 66,5
62	— 31	+ 80
63	— 53	+ 50,5
64	— 47,5	— 41
65	— 29	— 124
66	— 8	— 158
67	+ 3	— 177
68	+ 33	— 190,5
69	+ 43	— 190,5
70	+ 61	— 177
71	+ 77	— 150
72	+ 75,5	— 89

In Figur 9 sind nun in derselben Weise wie früher bei Figur 4 vom Anfangspunkt *O* aus in der Entfernung von 10° Strahlen gezogen und die Abstände der Schnittpunkte eines jeden Strahls mit den drei Curven von *O* gemessen und in Tabelle XIV niedergelegt. Dieselben geben das 235,5 fache der Sinus der zugehörigen Flexionen. Die Sinus selbst findet man daher, indem man diese Abstände durch 235,5 theilt, was in Tabelle XV berechnet und in Figur 10 in gleicher Weise wie früher bei der ersten Versuchsreihe aufgezeichnet ist. Daraus finden sich dann die Flexionen selbst, wie sie in Tabelle XVI stehen.

Tabelle XIV.

Abstände der Punkte der Projectionscurven in der $\xi\zeta$-Ebene vom Coordinatenanfangspunkt *O* in 36 um 10° verschiedenen Richtungen. In den Richtungen 0°, 90°, 180°, 270° findet bezüglich Radial-, Dorsal-, Ulnar-, Volarflexion statt. Bezeichnet *F* die Grösse jeder einzelnen Flexion, so ist jeder dieser Abstände gleich 235,5 . sin *F*.

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve*)	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve	Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve
0°	112,5	57,5	53,5	*180°*	112,5	79	51,5
10°	118	52,5	49	*190°*	111,5	77,5	51,5
20°	125,5	48,5	45,5	*200°*	113	78,5	53
30°	135	46,5	43,5	*210°*	117	81	56
40°	148,5	46	43,5	*220°*	124	86	62
50°	165	47	44,5	*230°*	141	94	70,5
60°	186,5	50	46,5	*240°*	167	107	84,5
70°	209	53,5	50	*250°*	204	127,5	105
80°	223,5	59,5	54,5	*260°*	228	158	136,5
90°	231	67	60,5	*270°*	231,5	182	173,5
100°	229,5	77	70	*280°*	224	195,5	194
110°	219,5	88	84	*290°*	200,5	191,5	185
120°	195,5	102,5	90	*300°*	176,5	174	157
130°	165,5	109	79	*310°*	155	141,5	116,5
140°	144,5	97	69,5	*320°*	135	110	92,5
150°	130	88	61,5	*330°*	121	88,5	77,5
160°	120	82	56	*340°*	114	74,5	67,5
170°	114,5	79	53	*350°*	113	65	59

*) Die schwarze Curve liefert die Gesammtflexionen der Hand, die braune Curve die Flexionen im ersten Handgelenk bei Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe und die grüne Curve dieselben bei Ausschluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe.

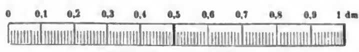


Figur 10.

Verkleinerung der Figur 9 im Massstab 1 : 2,355 so dass jeder einzelne Abstand eines Punktes der drei Kurven von O in Decimetern ausgedrückt direkt die Grösse des Sinus der zugehörigen Flexion angiebt. Der äusserste Kreis hat den Radius 1 dm. *)



***) Vgl. die Bemerkung zu Figur 5.**



Massstab ($^{2}/_{5}$ der wahren Grösse).

Tabelle XV.
Sinus der Flexionen.

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve	Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve
0°	0,478	0,244	0,227	*180°*	0,478	0,335	0,219
10°	0,501	0,223	0,208	*190°*	0,473	0,328	0,219
20°	0,533	0,206	0,193	*200°*	0,480	0,333	0,225
30°	0,573	0,197	0,185	*210°*	0,497	0,344	0,238
40°	0,634	0,195	0,185	*220°*	0,526	0,365	0,263
50°	0,701	0,200	0,189	*230°*	0,599	0,399	0,299
60°	0,792	0,212	0,197	*240°*	0,709	0,454	0,359
70°	0,888	0,227	0,212	*250°*	0,866	0,541	0,446
80°	0,949	0,253	0,231	*260°*	0,968	0,671	0,580
90°	0,983	0,289	0,257	*270°*	0,983	0,773	0,737
100°	0,975	0,327	0,297	*280°*	0,951	0,830	0,824
110°	0,932	0,374	0,357	*290°*	0,851	0 813	0,786
120°	0,830	0,435	0,382	*300°*	0,749	0,735	0,667
130°	0,703	0,463	0,335	*310°*	0,658	0,601	0,495
140°	0,614	0,412	0,295	*320°*	0,573	0,467	0,393
150°	0,552	0,374	0,262	*330°*	0,514	0,376	0,329
160°	0,510	0,348	0,238	*340°*	0,484	0,316	0,287
170°	0,486	0,335	0,225	*350°*	0,480	0,276	0,251

Tabelle XVI.
Die Flexionen (auf 10′ abgerundet).

Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve	Richtung der Flexion	für die **schwarze** Curve	für die **braune** Curve	für die **grüne** Curve
0°	28° 30′	14° 10′	13° 10′	*180°*	28° 30′	19° 30′	12° 40′
10°	30° —	12° 50′	12° —	*190°*	28° 10′	19° 10′	12° 40′
20°	32° —	11° 50′	11° 10′	*200°*	28° 40′	19° 30′	13° —
30°	35° —	11° 20′	10° 40′	*210°*	29° 50′	20° 10′	13° 50′
40°	39° —	11° 10′	10° 40′	*220°*	31° 40′	21° 20′	15° 10′
50°	44° 30′	11° 30′	10° 50′	*230°*	36° 50′	23° 30′	17° 20′
60°	52° 20′	12° 10′	11° 20′	*240°*	45° 10′	27° —	21° —
70°	62° 40′	13° 10′	12° 10′	*250°*	60° —	32° 50′	26° 30′
80°	71° 40′	14° 40′	13° 20′	*260°*	75° 30′	42° 10′	35° 30′
90°	79° 30′	16° 50′	14° 50′	*270°*	79° 30′	50° 40′	47° 30′
100°	77° 10′	19° 10′	17° 20′	*280°*	72° —	56° 10′	55° 30′
110°	68° 50′	22° —	20° 50′	*290°*	58° 20′	54° 20′	51° 50′
120°	56° 10′	25° 50′	22° 30′	*300°*	48° 30′	47° 20′	41° 50′
130°	44° 40′	27° 30′	19° 30′	*310°*	41° 10′	37° —	29° 40′
140°	37° 50′	24° 20′	17° 10′	*320°*	35° —	27° 50′	23° 10′
150°	33° 30′	22° —	15° 10′	*330°*	31° —	22° 10′	19° 10′
160°	30° 40′	20° 20′	13° 50′	*340°*	29° —	18° 30′	16° 40′
170°	29° —	19° 30′	13° —	*350°*	28° 40′	16° —	14° 30′

Wenn nun ein Vergleich der Curven der zweiten Versuchsreihe mit denen der ersten Versuchsreihe angestellt werden soll, so ist dazu nöthig, dass man entweder die drei Curven der zweiten Versuchsreihe so immer in demselben Verhältniss abändert, dass die schwarze Curve mit der schwarzen Curve der ersten der Grösse nach zusammenfällt, sobald sie auf die Kugel mit demselben Radius z. B. von 1 dm, wie in Fig. 5 und 10, bezogen sind, oder umgekehrt. Wir wählen das erstere, weil die erste Versuchsreihe an der rechten Extremität gemacht war und man die rechte Extremität in Folge des häufigeren Gebrauchs als die ausgebildetere ansehen muss. Zur Reduction hat man die Flexionen für die braune und grüne Curve jedes Mal mit dem Quotienten der Flexionen für die schwarzen Curven der ersten und zweiten Versuchsreihe zu multipliciren. Dieser Factor und die dadurch abgeänderten Flexionen der zweiten Versuchsreihe finden sich in Tabelle XVII vor. Tabelle XVIII giebt die zugehörigen hinterher aufgesuchten Sinus, die man zur graphischen Darstellung der abgeänderten braunen und grünen Curve innerhalb des Kreises von 1 dm braucht. Letzteres bietet Figur 11, wo in die Figur 5 die reducirte braune und grüne Curve in dem entsprechenden Maassstab eingezeichnet sind.

Tabelle XVII.

Die auf die Verhältnisse an der rechten Extremität reducirten Flexionen für die braune und grüne Curve. Spalte 1 enthält den betreffenden Reductionsfactor.

Richtung der Flexion	Reductionsfactor	braune Curve	grüne Curve	Richtung der Flexion	Reductionsfactor	braune Curve	grüne Curve
0°	0,95	13° 30′	12° 30′	*180°*	0,95	18° 30′	12° —
10°	0,92	11° 50′	11° —	*190°*	0,96	18° 20′	12° 10′
20°	0,91	10° 50′	10° 10′	*200°*	0,97	18° 50′	12° 40′
30°	0,91	10° 20′	9° 40′	*210°*	0,99	20° —	13° 40′
40°	0,93	10° 20′	9° 50′	*220°*	1,02	21° 50′	15° 30′
50°	0,96	11° —	10° 20′	*230°*	1,01	23° 40′	17° 20′
60°	1,04	12° 10′	11° 50′	*240°*	1,02	27° 30′	21° 30′
70°	1,13	14° 50′	13° 40′	*250°*	1,13	37° 10′	29° 40′
80°	1,205	17° 40′	16° —	*260°*	1,09	46° —	38° 40′
90°	1,05	17° 40′	15° 20′	*270°*	1,05	51° 50′	49° 50′
100°	1,08	20° 40′	17° 10′	*280°*	1,11	62° 20′	61° 40′
110°	1,07	23° 30′	22° 20′	*290°*	1,19	60° 10′	57° 30′
120°	1,01	26° 10′	22° 40′	*300°*	1,05	49° 40′	44° —



Figur 11.

Die drei Kurven der ersten Versuchsreihe sind so verkleinert, dass die Abstände jedes ihrer Punkte von O in Decimetern ausgedrückt die Sinus der zugehörigen Flexionen bilden (Figur 5); zugleich sind die auf die schwarze Kurve der ersten Versuchsreihe bezogenen Kurven (braun und grün) der zweiten Versuchsreihe in demselben Massstab eingezeichnet.*)

Dorsal-Flexion

Ulnar-Flexion *Radial-Flexion*

Volar-Flexion

Die schwarze Kurve ergiebt die Sinus der Gesammtflexionen der Hand,
die braune Kurve ergiebt die Sinus der Flexionen des ersten Handgelenks,
die rothe Kurve ergiebt die Sinus der Flexionen des zweiten Handgelenks,
die grüne Kurve ergiebt die Sinus der Flexionen im ersten Handgelenk
die blaue Kurve ergiebt die Sinus der Flexionen im zweiten Handgelenk
} bei Ausschluss der Beweglichkeit der Knochen der 1. Handwurzelreihe.

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 dm.



Massstab (²/₅ der wahren Grösse).

*) Vgl. die Bemerkung zu Figur 5.

Richtung der Flexion	Reductionsfactor	braune Curve	grüne Curve	Richtung der Flexion	Reductionsfactor	braune Curve	grüne Curve
130°	0,99	27° 10′	19° 20′	*310°*	0,99	36° 40′	29° 30′
140°	0,97	23° 40′	16° 40′	*320°*	1,02	28° 20′	23° 40′
150°	0,96	21° 10′	14° 30′	*330°*	1,03	22° 50′	19° 50′
160°	0,96	19° 30′	13° 20′	*340°*	0,99	18° 20′	16° 30′
170°	0,97	18° 50′	12° 40′	*350°*	0,95	15° 10′	13° 50′

Tabelle XVIII.

Die Sinus der in Tabelle XVII aufgezeichneten reducirten Flexionen.

Richtung der Flexion	für die braune Curve	für die grüne Curve	Richtung der Flexion	für die braune Curve	für die grüne Curve
0°	0,233	0,216	*180°*	0,317	0,208
10°	0,205	0,191	*190°*	0,315	0,211
20°	0,188	0,177	*200°*	0,323	0,219
30°	0,179	0,168	*210°*	0,342	0,236
40°	0,179	0,171	*220°*	0,372	0,267
50°	0,191	0,179	*230°*	0,401	0,298
60°	0,219	0,205	*240°*	0,462	0,367
70°	0,256	0,236	*250°*	0,604	0,495
80°	0,303	0,276	*260°*	0,719	0,625
90°	0,303	0,264	*270°*	0,786	0,764
100°	0,353	0,303	*280°*	0,886	0,880
110°	0,399	0,380	*290°*	0,867	0,834
120°	0,441	0,385	*300°*	0,762	0,695
130°	0,457	0,331	*310°*	0,597	0,492
140°	0,401	0,287	*320°*	0,475	0,401
150°	0,361	0,250	*330°*	0,388	0,339
160°	0,334	0,231	*340°*	0,315	0,284
170°	0,323	0,219	*350°*	0,262	0,239

Wie aus der Art der angestellten Versuche hervorgeht, ergeben die zur schwarzen Curve gehörigen Flexionen die Gesammtflexionen der Hand in den verschiedenen Flexionsrichtungen. Die Flexionen des Antibrachial-Carpalgelenkes, das wir als erstes Handgelenk bezeichnen, liefert die braune, die Flexionen des Intercarpal-Gelenkes (zweites Handgelenk) die rothe Curve. Dieselben finden sich in Tabelle VIII und Tabelle XVII vor. Die Differenz der Flexionen für die braune und grüne Curve (Tabelle XVII) ergiebt den Einfluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe auf das Antibrachial-Carpalgelenk, die Differenz der Flexionen für

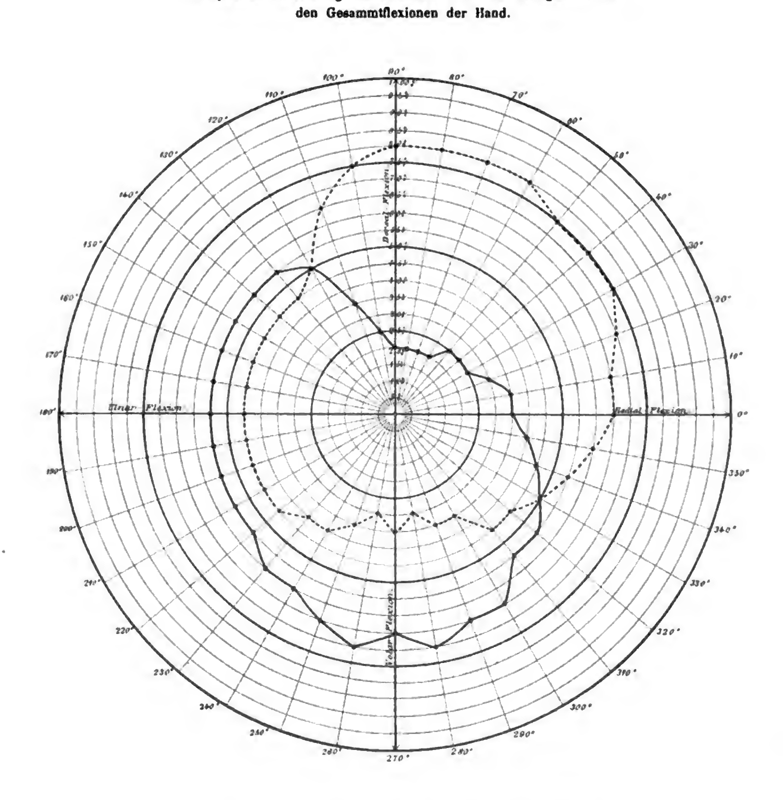
die rothe und braune Curve (Tabelle VIII) den Einfluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe auf das Intercarpalgelenk. In Tabelle XIX findet sich nun eine Zusammenstellung dieser Resultate vor, wobei die Flexionen auf 1 Grad abgerundet sind. Es muss ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die einzelnen Werthe, die durch isolirte Messung der beiden Handgelenke gefunden wurden, in ihrer Summation nicht übereinstimmen können mit den Werthen, die sich bei der Messung des gesammten intacten Gelenkapparates ergaben, denn der Eingriff, welcher nothwendig war, um das Gelenk auszuschalten, bedingt, wenn er auch noch so minimal und vorsichtig ausgeführt wurde, doch eine theilweise Störung der Hemmungsapparate. Es wurde vom Handrücken aus eingegangen bei dem Festnageln der einzelnen Theile, weil hier das Gelenk am zugänglichsten ist und somit weniger zerschnitten zu werden braucht; aber doch müssen Bänder zerschnitten werden, so dass eine Vergrösserung der Ausschläge die unausbleibliche Folge sein wird, die noch dadurch vermehrt wird, dass die einwirkende Kraft nahezu verdoppelt wurde, weil dasselbe Gewicht auf jedes einzelne Gelenk hier wirkte, während es früher beide Gelenke zusammen bewegte. Aber auch eine theilweise Verminderung des Ausschlags kann nicht von vornherein ausgeschlossen werden, weil durch das Einschlagen der Nägel vielleicht eine störende Fixirung der Weichtheile des Gelenkapparates auf der Volarseite hervorgebracht wurde. Aber eben alle solche Störungen lassen sich gar nicht vermeiden, wenn man darauf ausgeht, einen complicirten Gelenkapparat zu analysiren.

Da wir bei beiden Versuchen sorgfältig in ganz gleicher Weise vorgingen, so lässt sich annehmen, dass die Störungen durch die operativen Eingriffe auch möglichst gleichmässig ausfielen, so dass bei der Vergleichung der Flexionen der beiden Gelenke diese Fehler sich von selbst möglichst aufhoben und dadurch, wenn auch keine absoluten, so doch relativ sichere Werthe gefunden wurden. Auch aus diesem Grunde mit wurden die beiden Versuchsreihen an den beiden Extremitäten ein und desselben Individuums angestellt.

In Tabelle XX, die den Antheil der beiden Handgelenke an den Gesammtflexionen der Hand in Procenten ausdrückt, was in Figur 12 graphisch dargestellt ist, sind deshalb die Resultate auf 5% abgerundet worden.

Figur 12.

Graphische Darstellung des Antheils der beiden Handgelenke an den Gesammtflexionen der Hand.



——— bezieht sich auf das Antibrachial-Carpal-Gelenk,

- - - - - „ „ „ „ Intercarpal-Gelenk.

Tabelle XIX.

Die Gesammtflexionen der Hand, die Flexionen in jedem der beiden Handgelenke und der Einfluss der Beweglichkeit der Knochen der ersten Handwurzelreihe auf die beiden Handgelenke.

Richtung der Flexion	Gesammtflexion der Hand	Flexion des ersten Handgelenkes	Flexion des zweiten Handgelenkes	Einfluss der Beweglichkeit der 1. Handwurzelknochen auf das 1. Gelenk.	Einfluss der Beweglichkeit der 1. Handwurzelknochen auf das 2. Gelenk
0° 1)	27°	13°	23°	1°	7°
10°	28°	12°	24°	1°	8°
20°	29°	11°	25°	1°	7°
30°	32°	10°	27°	—	7°
40°	36°	10°	30°	—	6°
50°	43°	11°	37°	1°	10°
60°	55°	13°	51°	1°	18°
70°	72°	15°	70°	1°	30°
80°	86°	18°	82°	2°	34°
90° 2)	84°	18°	76°	3°	40°
100°	84°	21°	61°	3°	33°
110°	73°	24°	41°	2°	19°
120°	57°	26°	27°	3°	9°
130°	44°	27°	22°	8°	7°
140°	37°	21°	19°	7°	6°
150°	32°	21°	18°	7°	7°
160°	29°	19°	17°	6°	6°
170°	28°	19°	16°	6°	6°
180° 3)	27°	19°	16°	7°	6°
190°	27°	18°	16°	6°	6°
200°	28°	19°	16°	6°	6°
210°	30°	20°	16°	6°	6°
220°	32°	22°	17°	7°	7°
230°	37°	24°	18°	7°	7°
240°	46°	28°	18°	7°	6°
250°	68°	37°	20°	7°	7°
260°	83°	46°	22°	7°	8°
270° 4)	84°	52°	25°	2°	10°
280°	80°	62°	28°	—	12°
290°	69°	60°	30°	2°	13°
300°	51°	50°	29°	6°	10°
310°	41°	37°	26°	7°	5°
320°	36°	28°	25°	4°	5°
330°	32°	23°	24°	3°	6°
340°	29°	18°	23°	1°	6°
350°	27°	15°	23°	1°	7°

1) Richtung der Radialflexion. 2) Richtung der Dorsalflexion.
3) Richtung der Ulnarflexion. 4) Richtung der Volarflexion.

Tabelle XX.

Antheil der beiden Handgelenke an den Gesammtflexionen der Hand, in Procenten ausgedrückt (auf 5 % abgerundet).

Richtung der Flexion	Antibrachial-Carpalgelenk	Intercarpal-gelenk
0°	35 %	65 %
10°	35 %	65 %
20°	30 %	70 %
30°	25 %	75 %
40°	25 %	75 %
50°	25 %	75 %
60°	20 %	80 %
70°	20 %	80 %
80°	20 %	80 %
90°	20 %	80 %
100°	25 %	75 %
110°	35 %	65 %
120°	50 %	50 %
130°	55 %	45 %
140°	55 %	45 %
150°	55 %	45 %
160°	55 %	45 %
170°	55 %	45 %
180°	55 %	45 %
190°	55 %	45 %
200°	55 %	45 %
210°	55 %	45 %
220°	55 %	45 %
230°	60 %	40 %
240°	60 %	40 %
250°	65 %	35 %
260°	70 %	30 %
270°	65 %	35 %
280°	70 %	30 %
290°	65 %	35 %
300°	65 %	35 %
310°	55 %	45 %
320°	55 %	45 %
330°	50 %	50 %
340°	45 %	55 %
350°	40 %	60 %

DIE

BLUT- UND LYMPHWEGE

IM DÜNNDARM DES HUNDES

VON

DR. J. P. MALL.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Nº III.

MIT SECHS TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Aus dem physiologischen Institut in Leipzig.
Vorgetragen von dem Wirklichen Mitgliede C. Ludwig in der Sitzung vom 17. Mai 1887.
Zum Druck übergeben den 18. Mai 1887.
Der Abdruck vollendet den 30. August 1887.

DIE

BLUT- UND LYMPHWEGE

IM DÜNNDARM DES HUNDES

VON

DR. J. P. MALL.

Eine erschöpfende Beschreibung von Lichtung und Wand aller Blut- und Lymphbahnen eines abgeschlossenen Gebietes eröffnet uns Einsichten in die Eigenschaften eines dort bestehenden Stromes, welche kaum auf eine andre Weise zu gewinnen sind. Von den Werthen des Drucks und der Geschwindigkeit, mit welchen Blut und Lymphe strömen, erhalten wir durch die anatomische Zergliederung allerdings keine Auskunft, wohl aber Vorstellungen über das Verhältniss, nach welchem die dem Strom angehörigen Kräfte sich auf die verschiedenen Orte seines Verlaufs äussern und vertheilen. Unentbehrlich wird aber die Darstellung der Stromwege, wenn sich, wie beim Blut- und Lymphstrom, die physikalischen Hilfsmittel gegenwärtig und vielleicht für immer als ungenügend erweisen. — Von diesem vorzugsweise physiologischen Gesichtspunkt geleitet habe ich auf Anregung des Herrn Prof. C. Ludwig die Untersuchung des schon oft durchforschten Gebietes von Neuem unternommen.

I. Blutgefässe des Dünndarms.

Alle Abschnitte des Dünndarms können, obwohl sie nur von einer Arterie aus versorgt sind, gleichzeitig mit gleichviel Blut gespeist werden. Dass dieses, ungeachtet der Länge des Stromgebietes, möglich wurde, folgt aus der Art, wie sich das Darmrohr an das eigenthümlich gestaltete Mesenterium anheftet. Von einem schmalen Stiel an der Ursprungsstelle der a. mesaraica sup. aus verbreitert sich das Mesenterium zu einem Fächer, dessen dem Darme zugekehrter bogenförmiger Rand mehr als 360 Winkelgrade umkreist. Um an dem verhältnissmässig kurzen Umfang des Bogens Platz zu finden, muss sich der Darm in mehrfachen Windungen auf- und abkrümmen, deren Ebenen im Allgemeinen senkrecht zur Fläche des Mesenterium gelegen sind. Eine Anschauung von diesem Verhalten will Fig. 1, Taf. I

geben, welche nach einem Trockenpräparat des aufgeblasenen Darms gezeichnet ist.

Kurz nach ihrem Eintritt zwischen die Blätter des Mesenteriums beschreibt die Arterie einen erst weiteren dann engeren Bogen. Aus der concaven Seite desselben tritt zuerst ein Zweig für das Duodenum, dann aus der convexen eine Reihe von Zweigen für Jejunum und Ileum. Der Abstand zwischen dem Ursprung benachbarter, die Zahl und der Durchmesser der Aeste unterliegt mannigfachem Wechsel je nach der Länge des Darmstücks, in welchem sich jeder derselben ausbreitet. Die schmälern Aeste laufen unverzweigt bis in die Nähe des Darms, die stärkeren dagegen zerfallen bald nach ihrem Ursprung zwei- oder mehrfach. Wie verschieden die Ausstrahlungen sich auch anfänglich verhalten mögen, übereinstimmend spaltet sich jede nahe dem Ansatz des Mesenterium an den Darm in je zwei Zweige, von denen einer nach oben, der andere nach unten gewendet mit dem benachbarten je einen Bogen bildet. Aus den 10 bis 20 aus dem Stamm hervorgehenden Arterien können bis zu 50 Bogen entstehn. Von diesen Bogen ab gewinnt die weitere Vertheilung des Strombetts sehr an Regelmässigkeit. Aus ihnen erheben sich stets zwei Arten von Arterien, längere und kürzere. Da die längern in Abständen von nur wenig über oder unter 5 mm entspringen, so wird durch sie das Stromgebiet des Darms in eine Reihe von hydraulisch gleichwerthigen Stücken zerlegt, weshalb bei der Gleichartigkeit aller die Beschreibung nur eines genügt.

Von den längern Arterien entspringen je zwei nahe bei einander, eine von ihnen schlägt sich vor die andere hinter dem Darm her, so dass sich nahezu auf demselben Kreisumfang die beiden Halbbögen zu einem ganzen verbinden. — Ehe die langen Arterien sich an den Darm anlegen, noch innerhalb der freien Mesenterialblätter, giebt jede derselben zwei Aestchen, eins nach oben und eins nach unten ab, von denen jedes mit dem entsprechenden der nächsten langen Arterie eine Verbindung eingeht. Die hieraus erwachsenden Parallelbögen, einer dem hintern, der andere dem vordern Zinken des langen Arterienpaars angehörig, verbinden sich mehrfach durch Querarme, wodurch noch ausserhalb des Darms ein magerer Plexus entsteht. Aus diesem entspringen die kurzen Darmarterien.

Die kurzen Arterien durchsetzen gerade aufsteigend die Längs-

muskeln der Darmwand, geben jenseits derselben kleine Muskelzweige, verfolgen aber dann ihren Weg durch die Kreismuskeln und gelangen alsbald in die Tunica submucosa, wo jedes Stämmchen sternförmig auseinander fährt.

Nach dem Abgang der eben beschriebenen Aeste legen sich die langen Arterien der Darmwand, jedoch nur locker, an, sodass sie bei leerem Darm geschlängelt und bei stark aufgeblähtem gestreckt weiterschreiten können. Alsbald aber durchbohrt auch jede der langen Arterien die Längsmuskeln, giebt, wenn sie dieses gethan, Muskelzweige ab, setzt dann aber sogleich ihren Weg durch die Kreismuskeln auf die Submucosa fort. Weil ungefähr im gleichen Abstand von dem Mesenterialansatz alle langen Arterien die Muskeln durchspalten, so läuft der Länge des Darms hinab eine Reihe schlitzförmiger Oeffnungen. Der Abschnitt des Darms, welcher gegen das Mesenterium hin zwischen je zwei Schlitzen liegt, beträgt $^1/_4$ bis $^1/_3$ seines gesammten Umfangs.

Indem wir einstweilen die Strombahn nach den Muskeln hin ausser Acht lassen, folgen wir den Arterien auf die Submucosa. Auf dieser Haut fliessen die kurzen und die langen Arterien unter Bildung eines dichten Canalnetzes rasch auseinander. Von dem Netzwerk, dessen Bedeutung zuerst Heller erkannte, geben die Figuren 2 und 3 auf Taf. I eine Vorstellung. Die Zeichnungen sind nach Präparaten entworfen, an welchen die Submucosa von der Schleim- und Muskelhaut befreit war. — Der Schnitt, welchen die Ausbreitung der Haut in einer Ebene möglich machte, ist in Fig. 2 gegenüber, in Fig. 3 auf Seiten des Mesenterialansatzes geführt.

Das dichte Netz, zwischen welchem nur kleine stromfreie Inseln verbleiben, entsteht so, dass die mehrfachen Arme, welche sich zunächst von je einem stärkeren Zuflusse abzweigen, unter sich, zugleich aber auch mit den entsprechenden benachbarter Arterienstämme Verbindungen eingehen. Aus diesen Cirkeln erster entstehen auf ähnliche Weise solche zweiter, dritter und vierter Ordnung, wobei die Inseln immer kleiner und die sie umgrenzenden Gefässe fortschreitend enger werden, bis sie einen Durchmesser von weniger als 0,01 mm erreicht haben. Erst wenn die Vertheilung der Bahnen einen Grad erreicht hat, bei welchem jedes Aestchen von den verschiedensten Seiten her gespeist und die Stromstärke in jedem der-

selben voraussichtlich gleichmässig und gleich stark geworden ist, verlässt der Strom die Submucosa, um sich zum kleinern Theil in die Kreismuskeln der Darmwand, zum grössern aber in die Schleimhaut zu wenden.

Die Abzweigungen zur Schleimhaut sind von zweierlei Art. Unter Berücksichtigung ihres hauptsächlichsten Capillargebiets wären die tiefern als Cryptengefässe, die weiter empordringenden als Zottengefässe zu bezeichnen. Um Wiederholungen auszuweichen, werde ich die beiden Strombahnen von ihrem Ein- bis zu ihrem Austritt aus der Schleimhaut beschreiben.

a. Die zahlreichen und feinen Cryptenarterien, siehe Taf. III, Fig. 1, entspringen gesondert oder in Verbindung mit den Zottenarterien aus den Endnetzen auf der Submucosa, richten ihren Verlauf senkrecht gegen die Fläche der Muscularis mucosae, durchbrechen deren Faserung und lösen sich jenseits derselben in ein Capillarnetz auf, in dessen Maschen die blinden Enden der Crypten hineinragen, und das zugleich die später zu beschreibende granulirte Schicht der Schleimhaut durchzieht. Aus dem engen Netze gehen sogleich Venen hervor, welche in andre grössere, von den Zotten herabsteigende münden, so dass das Blut, welches auf verschiedenen Wegen durch die Muscularis mucosae eindrang, auf einem gemeinsamen zurückkehrt.

b. Zottenarterien. Siehe Tafel III, Fig. 1. In grössern Zwischenräumen als die kleinern zu den Crypten verlaufenden entspringen aus Heller's Netz andere weitere Arterien, welche ebenfalls die Muscularis mucosae rechtwinklig durchsetzen. Jenseits der letztern zerfällt jede in eine mehrfache Zahl von gerade aufsteigenden Reisern, von denen je eins, ohne sich mit den Nachbarn zu verbinden, in das Innere einer Zotte eindringt, und unter leichter Schlängelung bis zur Zottenspitze hinstreicht. Während des Verlaufs durch die Zotte ändert die Wand des Gefässes ihren Bau; sie verliert allmählich ihre Kreismuskeln, und auf dem Gipfel der Zotte angelangt, unmittelbar unter dem Epithelium löst sich das Gefäss plötzlich in 15 bis 20 Capillaren von etwa 0,008 mm Durchmesser auf. In der Zahl, in welcher sie entstanden, laufen die Capillaren stets möglichst nahe dem Epithelium gegen den Ursprung der Zotte zurück, wobei sich die benachbarten in regelmässiger Folge durch Ausläufer miteinander verbinden, welche schräg gegen die Zottenachse gestellt sind. Dadurch wird die obere

Hälfte der Zotte in einen Mantel von dichten Capillarnetzen eingehüllt.

Sind die Capillaren bis zur Hälfte der Zotte herabgestiegen, so mindert sich ihre Zahl dadurch, dass auf zwei entgegengesetzten Orten des Umfangs eine Reihe derselben zur Bildung einer Vene zusammenfliesst, die ohne Aufnahme und Abgabe von Aesten in das Innere der Schleimhaut eindringt. — Dem Verlust an Capillaren entsprechend wird die Zotte an ihrer untern Hälfte von einem Netz mit weiteren Maschen umsponnen, als an ihrer obern. Zu dieser Aenderung tritt die andere, dass der Durchmesser der Capillaren von 0,008 auf 0,005 herabsinkt.

Sämmtliche Capillaren, die an der Zottenbasis vorhanden sind, begeben sich in die Schleimhaut, wo sie der Reihe nach von Venenwurzeln aufgenommen werden. Regelmässig wird eine Anzahl der Capillaren näher, eine andere entfernter von der Zottenbasis zu Venen zusammengefasst, so dass der Raum, welcher den beiden obern Dritteln der Crypten entspricht, allmählich an Capillaren verarmt und von weiten Netzen durchzogen wird. Näher dem untern Drittel der Crypten verengt sich dagegen das Capillarnetz von Neuem, weil hier die Ausstrahlungen der Cryptenarterien mit den Resten der Capillaren zusammenstossen, welche aus den Zotten herabkommen.

Der gelieferten Beschreibung entsprechend entstehen die Wurzeln der Schleimhautvenen an verschiedenen Orten. Zuoberst noch in der Zotte, dann mehrfach untereinander gelegen im Bereich des zweiten Drittels und endlich an der obern Grenze des letzten Drittels der Crypten. Alle aus diesen Wurzeln hervorgegangenen Venen fliessen folgeweise zu einem Stämmchen nahe über der Muscularis mucosae zusammen. Das Gebiet, aus welchem ein solches Stämmchen seine Zuflüsse empfängt, entspricht also ebensowohl den Verbreitungsbezirken einer der grössern Arterien, von welchen aus mehrere, etwa 8 bis 10, Zotten versorgt werden, wie dem einer vielfachern Anzahl von kleinern zu den Crypten gehenden.

Obwohl sich jedes solcher Venenstämmchen nahe bei einer der grössern für einen Zottenhaufen bestimmten Arterie findet, so durchsetzt es doch nicht in unmittelbarer Berührung mit dem letztern die Muscularis mucosae. Unter Anwendung hoher Vergrösserungen lässt sich eine eigenthümliche Anordnung der Muskelzellen an den Stellen

erkennen, an welchen die Venen durchbrechen. Unmittelbar um die Vene und noch innerhalb der Kreisfaserung der Muscularis mucosae liegt ein geschlossener Muskelring (s. Taf. II, Fig. 1) aus drei umeinander gelagerten Zellen; ein Sphincter, dessen lichtungsverengende Wirkung deutlich hervortritt bei jeder starken Füllung der Vene nach einer während der Muskelstarre unternommenen Injection. Vor dem Sphincter und der eingeschlossenen Vene sind die Fasern beider Schichten der Muscularis mucosae auseinander gewichen.

c. Muskelarterien aus dem Netz der Submucosa. Ein Theil des Blutes, welches zu der Muskelwand des Darmes hinfliesst, stammt aus dem arteriellen Netzwerk auf der Submucosa. Von dem letztern aus wenden sich namentlich auf der dem Mesenterialansatz gegenüberliegenden Seite vielfache kleine Stämmchen nach der Muskelhaut hin, die entweder sich noch innerhalb der Kreismuskulatur in Capillaren auflösen oder dieses erst nach Durchbrechung der letztern vollführen. Nahe dem Wege, den die Arterien eingeschlagen hatten, kehren auch Venen in die Submucosa zurück. Sämmtliche soeben aufgezählte Gefässe stehen in vielfacher Verbindung mit dem selbständigen Stromgebiet der Muskelwand, wie bei dessen Beschreibung genauer zu erörtern ist.

Venengeflecht auf der Submucosa (Taf. II, Fig. 2 u. 3).

Aehnlich wie vor seinem Weggang aus der Submucosa formt sich das Blut sein Strombett nach der Wiederkehr dorthin. Die kleinen Venen, welche aus der Schleim- und Muskelhaut hervorgehen, vereinigen sich zur Bildung eines feinen durchweg zusammenhängenden Netzwerkes; an den Ecken desselben erwachsen stärkere Venen, welche mit gleichwerthigen anostomosirend grosse Felder umrahmen. Aus den Rändern und Winkeln der viereckig oder polygonal gestalteten Maschen fliessen noch breitere Venen hervor, welche in abermals stärkere Ströme einmünden, die wiederum in gekrümmtem oder geradlinigem Verlauf mit entsprechend entstandenen zusammentreten. Auf diese Weise mindert sich mit der Zunahme des Durchmessers der einzelnen Gefässe ihre Zahl, bis schliesslich nur ein Abzugskanal übrig bleibt. Je eine solcher stärkeren Venen folgt dem Verlauf, den die Arterie in das gleiche Gebiet genommen. Näher dem Mesenterialansatz dringt das Venenblut neben den kurzen, entfernter davon neben den langen Arterien durch die Muskelhaut.

Zwischen dem breit angelegten, nach allen Richtungen hin offenen Strombett, das vollauf genügt, um das von den Arterien hereingebrachte Blut wieder abzuführen, ist noch an sehr zahlreichen Orten eine besondere Art von Wundernetz eingeschaltet. Jedes dieser zahlreichen Gebilde, deren Bedeutung für den Blutstrom des Darms vorerst noch dunkel bleibt, stellt sich für das unbewaffnete Auge an einer sehr vollkommen von den Venen aus injicirten und isolirten Submucosa als ein farbiges Pünktchen dar. Unter der Lupe löst sich dasselbe in ein Bündel feiner Gefässe auf (Taf. II, Fig. 3), und bei stärkerer Vergrösserung gewähren sie das in Taf. II, Fig. 2 gezeichnete Bild. Aus benachbarten feinern und stärkern Venen strebt eine Anzahl von Zweigen aufeinander zu. Nach kurzem Verlauf spaltet sich jeder Zweig nach der Dicke und nach der Fläche der Submucosa; die entstehenden Reiser anastomosiren nach allen Richtungen hin und ballen sich zu einem ungemein dichten Röhrenwerk zusammen, das seinen Umrissen nach einer Kugel, Linse oder auch einem mehrseitigen Prisma gleicht. Solcher Plexus, welche ich als Venenbällchen bezeichnen will, finden sich nun, wie die angezogene Figur nachweist, in sehr grosser Zahl an allen Orten der Submucosa, ohne dass sich eine Beziehung ihres zu dem Vorkommen anderer Formbestandtheile finden liesse. Da sie häufig genug in das grössere Gezweig der Art eingeschaltet sind, dass man mit Sicherheit nicht einmal die Richtung anzugeben vermag, nach welcher das sie durchsetzende Blut fliessen muss, so wird man geneigt, ihre Entstehung mit Stauungen des Venenstroms in Verbindung zu bringen. Bei der geringfügigen Räumlichkeit der Gefässbälle wird allerdings die Menge des in ihnen anhäufbaren Blutes gegen den Inhalt auch nur einer der grössern Venen kaum in das Gewicht fallen, so dass, wenn sie sich bei Hindernissen des Hauptstroms füllen, sie nur den aus mikroskopischen Bezirken herkommenden Abfluss und auch diesen nur für kurze Zeit aufnehmen könnten.

Gefässe der Muskelhaut. Bevor und nachdem die langen und kurzen Arterien die Schicht der Kreismuskeln durchbrochen haben, geben sie zu der Muskelwand Zweige. Die erste Folge derselben, welche den Stamm verlässt, nachdem derselbe jenseits der Längsmuskeln auf der Ringfaserung angelangt ist, heisse das intermusculare System. — Das Gebiet, welches den Intermuscularzweigen der langen

Arterien zufällt, ist nicht für alle derselben ein gleiches, sie reichen zuweilen bis zum halben Umfang der Darmwand hinauf, öfter enden sie früher. Der von ihnen freigebliebene Bereich wird von der Submucosa aus versorgt. Ihr Verlauf wird ihnen von der Richtung der Muskelbündel vorgeschrieben; und da der intermusculare Raum von zwei aufeinander senkrechten Fasern begrenzt wird, so verfolgen auch die Arterien ebensowohl ihren Weg nach der Länge des Darms, wie nach der darauf senkrechten Richtung. Gleiches vollführen die Capillarnetze. Aus ihnen sammeln sich zwischen den Muskelbündeln feine Venen, deren Verlauf und Ende ohne weitere Beschreibung aus der Zeichnung Taf. II, Fig. 4 ersichtlich werden dürfte. Das Bild ist nach einem Präparate gezeichnet, an welchem die Submucosa und die Längsmuskeln vorsichtig entfernt waren, so dass nur die intermuscularen Venen und die der Ringsfaserhaut verblieben sind. Durch die engern Spalten am obern Rande der Zeichnung treten die Arterien und Venen der Submucosa hervor, welche mit den intermuscularen Gefässen anastomosiren. Die Spalten am untern Theile bilden die Thore für die kurzen Arterien und Venen. Die tiefblauen starken Gefässe geben den Verlauf der Sammelvenen ausserhalb der Darmwand.

Eingeschaltet zwischen den Capillarsystemen des Darms und der Leber ist den Mesenterialvenen eine doppelte Rolle zugewiesen. Von der einen Seite her sammeln sie das Blut und vertheilen es nach der andern hin gegen den Widerstand der Lebercapillaren. Darum kann es nicht auffallen, dass die Wand der Mesenterialvenen Ringmuskeln enthält. Unter der Anwendung von färbenden Mitteln lässt sich in den Wänden der Venenzweige, die zwischen den Mesenterialblättern liegen, eine zwar dünne aber durchaus vollständige Ringfaserschicht nachweisen (Krause). Doch nicht nur in den Stämmen, auch in den Zweigen bis zur Submucosa hin sind die Venen mit einer vollkommen ausgebildeten Ringsfaserung versehen, derart, dass man kleine Venen mit Arterien verwechseln könnte.

Aus der Vergleichung zweier in der Submucosa nebeneinander liegender Gefässe erkennt man jedoch sogleich, dass die Muskelwand der Arterien kräftiger, die der Venen schmächtiger entwickelt ist.

Von den Erscheinungen, welche zu Tage treten, wenn man an

einem verbluteten Hunde unmittelbar nach dem Tode eine Injection der Venen mit leichtflüssigen Massen vornimmt, lassen sich einige sicher, andere nur vielleicht aus der Wirkung der Kreismuskeln erklären. Zu den erstern ist die varicöse Gestalt zu rechnen, welche die Stämme der Venen häufig unter einem mässigen Injectionsdruck annehmen. Ausbuchtungen und Einschnürungen bestehen mehrfach hintereinander; erst nach längerer Beharrung des Injectionsdruckes lösen sich die letztern, wandelt sich die gekröpfte in eine glatte Röhre um. — Weit häufiger als die erwähnte beobachtet man bei der Einspritzung flüssigen Berlinerblaus in die Venen eines überlebenden Darms eine andere Thatsache. Von den Venen aus, welche sämmtlich bis zum Ansatz des Mesenteriums hin strotzend gefüllt sind, dringt die Masse, ich darf wohl sagen gewöhnlich, nicht überall gegen die feineren Aeste des Darms weiter. Einzelne Stücke des Darms nehmen eine tiefblaue Farbe an, andere unmittelbar angrenzende dagegen bleiben farblos, die Masse ist weder in die Muskel- noch in die Schleimhautgefässe gelangt.

Da der Muskel und die Schleimhaut ungefärbt bleibt, so muss das Hinderniss, welches dem Fortschreiten der Flüssigkeit entgegentritt, vor dem Uebergang der Vene in die Darmwand gesucht werden, also in einem Gerinnsel noch vorhandenen Blutes, oder in einer Zusammenziehung der Längs- und Quermuskeln, welche die Spalte umschliessen, aus der die Vene von der Submucosa herdringt, oder endlich in einer Einschnürung der Venenwand selbst. Von diesen drei Möglichkeiten sind sogleich zwei auszuschliessen. Am verbluteten Thier lassen sich die Darmvenen vollständig von Blut befreien, gewiss so weit, dass keine gröbern Gerinnsel zurückbleiben, auch zeigt der Augenschein, dass die Gefässe, an welchen die Masse Halt machte, blutfrei sind. Wäre die Muskelwand des Darmes in der Umgebung der Spalte bis zur Unwegsamkeit der Vene contrahirt, so würde auch die dort verlaufende Arterie verschlossen sein. Dass die Arterie aber offen ist, wird sogleich aus dem Erfolg erkannt, welchen die unmittelbar darauf ausgeführte Injection der Arterie mit einer andersgefärbten Masse nach sich zieht. Von der Arterie aus füllen sich unter schwachem Druck leicht und vollständig alle Darmstücke, die von der Vene aus versagten. Darum wird es wahrscheinlich, dass die Venenäste, von welchen aus das zuge-

hörige Darmstück nicht zu füllen war, durch ihre eignen Muskelringe verschlossen wurden.

Die zweite Figur der Tafel III giebt eine schematische Darstellung von dem Verlauf der Blutgefässe in einem der sich vielfach wiederholenden hydraulisch gleichwerthigen Abschnitte des Dünndarms. Die Arterien sind roth, die Venen blau gedruckt. Submucosa ist weiss gelassen, desgleichen die Crypten- und Zottenschicht der Mucosa, graugelb ist die Muscularis mucosae, röthlich die Kreisschicht, schwärzlichgelb die Längsfaserung der Muskelhaut gefärbt. Die Plexus auf der Submucosa sind dadurch zur Anschauung gebracht, dass einerseits ein grosses Rechteck aus der Muskelwand, anderseits ein kleineres aus der Schleimhaut ausgeschnitten wurde. Auf der Fläche des grossen Rechtecks ist die Verzweigung der langen Arterien und Venen eingetragen, auf der Fläche des kleinern die Ausbreitung der kurzen Arterien und Venen.

Wie für den Ort, an welchem der Strom seine Kräfte zur Geltung bringt, die Kenntniss des Verlaufs, so ist für das relative Maass seiner Leistungsfähigkeit die seiner veränderlichen Durchmesser nothwendig. Während die erste der beiden Forderungen sicher und ohne allzugrosse Schwierigkeit erfüllbar ist, stellen sich Bedenken ein, ob die zweite zu befriedigen sei. Dem Zweifel an der Durchführbarkeit der Aufgabe würde ohne Weiteres Recht zu geben sein, wenn eine ganz allgemein giltige Lösung verlangt würde, wobei die Durchmesser der Strombahn als Functionen des Blutdrucks angegeben werden müssten. Wenn man statt dessen sich nur auf die Angaben eines besondern Falles beschränken will, so liegt von vornherein kein Grund vor, daran zu zweifeln, dass die mit dem Fortschreiten der Bahn einhergehenden Aenderungen der Querschnitte ermittelbar seien.

Angenommen, es seien die bei einem gegebenen Blutdruck vorhandenen Durchmesser aller Bahnorte mit voller Sicherheit gefunden worden, so würde sich die Frage erheben, welche Bedeutung dem Ergebniss der Messungen zukomme. Gewiss nur eine beschränkte, aber trotzdem eine werthvolle, denn an der Hand des einen sicher ermittelten Falles werden sich Schätzungen für andere anreihen lassen.



Aus diesem Grunde halte ich die auf die Messungen verwendete Mühe für nutzbringend.

Maasse. Das Gewicht der Hunde, welchen die folgenden Angaben entnommen sind, betrug 5 bis 7 kg. Die Injection der Gefässe geschah unter einem Druck von 100 mm *Hg*. Jede der Messungen wurde 10 bis 20mal vorgenommen, und aus ihren Ergebnissen das Mittel gezogen. — Die Zahlen bedeuten Centimeter.

Darmlänge 180. — Umfang des Darms in der Submucosa 3,65 Darmfläche = 657 qcm.

Dicke der Wand 0,2171. Hiervon
Muscularis longitudin. 0,0144 — Musc. circular. 0,0333 — Submucosa 0,0137 — Muscularis mucosae 0,0067 — Tunica granulosa 0,0019 — Crypten 0,0761 — Zotten 0,0710.

Zahl der Krypten auf 1 qcm 25 600, für den ganzen Darm 16,75 Millionen.

Zahl der Zotten auf 1 qcm 1600, für den ganzen Darm 1,05 Millionen.

Gefässe.

	Durchm. in cm	Zahl	Fläche in qcm
Mesaraica	0,3	1	0,0707
Hauptzweige	0,1	15	0,1178
Endzweige	0,06	45	0,1272
Kurze Darmarterien	0,008	1440	0,0724
Lange Darmarterien	0,0192	459	0,1329
Kurze und lange Darmarterien			0,2053
Letzte Zweige d. kurzen Darmart.	0,005	8640	0,1696
Letzte Zweige d. langen Darmart.	0,0053	18 000	0,3971
Zu den Crypten	0,0008	4 000 000	2,0106
Zu den Zotten	0,0031	328 500	2,4794
Arterien der Zotten	0,00225	1 051 000	4,1797
Capillaren der Zotte oberes 2/3	0,0008	31 536 000	15,8517
Capillaren der Zotte unteres 1/3	0,0005	15 768 000	3,0960
Venen an der Zottenbasis	0,00265	2 102 400	11,5957
Venen vor dem Durchtritt in Submucosa	0,0075	131 400	5,8051
Letzte Zweige der Submucosa	0,0128	18 000	2,3162
Anastomos. der Submucosa	0,0032	2 500 000	20,1062

	Durchm. in cm	Zahl	Fläche in qcm
Letzte Zweige d. kurz. Darmvenen	0,0064	28 800	0,9265
Lange Darmvenen	0,0440	459	0,6979
Kurze Darmvenen	0,0112	1440	0,1419
Letzte Zweige d. Mesenterialvenen	0,15	45	0,7952
Zweige der Mesenterialvene . .	0,24	15	0,6756
Mesenterialvene	0,6	1	0,2827
Muskelschichten.			
Gerade Muskelarterien	0,003	1800	0,0127
Rückläufige Muskelarterien . .	0,004	3600	0,0254
Capillaren der Circularis . . .	0,003	27 000 000	1,9085
Capillaren der Longitudinalis . .	0,0003	9 000 000	0,6362
Venen	0,0112	3600	0,3546
Bauchfell.			
Arterien	0,0048	360	0,0065
Capillaren	0,0018	36 000	0,0916
Venen	0,0080	360	0,0181

Auf das Verhältniss der Geschwindigkeiten, mit welcher sich das Blut in den aufeinander folgenden Abschnitten seiner Bahn bewegt, und auf die Art, wie sich von der Mesaraica abwärts das Blut auf die verschiedenen Capillarsysteme vertheilt, lässt sich aus der gegebenen Beschreibung schliessen:

1. Die dem Stromgebiet des Dünndarms zur Verfügung stehende Energie ist allein von der Stromstärke in der Aorta abhängig, weil die Vertheilung des einzigen Zuflusses, den er empfängt, auch auf den Dünndarm beschränkt bleibt.

2. Der gleiche Abstand aller Endverzweigungen von dem Anfang der A. mesaraica aus gestattet die Möglichkeit, gleichzeitig alle Abschnitte des Dünndarms mit gleichviel Blut zu versorgen, so dass sich überall die von dem Druck und der Geschwindigkeit des Stroms abhängigen Leistungen gleich wirksam erweisen können.

3. Durch die Zerspaltung der Arteria mesaraica in mehrfache Aeste, und die jedes einzelnen in zahlreiche Zweige und Reiser, von welchen jeder einzelne Muskelringe besitzt, ist jedoch die Ausschal-

tung bez. die Bevorzugung einzelner Bezirke andern gegenüber erlaubt, bis zu sehr beschränkten Bruchtheilen des Gesammtgebietes hinab.

4. Die zahlreichen in der Submucosa vorhandenen Verbindungen der Aeste einer Arterie, die je eines der zahlreichen gleichwerthigen Theilgebiete versorgen, werden der Gleichartigkeit des Stroms zu allen Unterabtheilungen desselben förderlich sein. Und da jedes der Theilgebiete sich durch die arteriellen Netze der Submucosa in vielfachen und offenen Verbindungen mit dem benachbarten befindet, so wird es ihm möglich, Blut an die letztern abzugeben oder auch ihnen zu entnehmen, je nachdem der Thätigkeitsgrad der Muskeln in der Muscularis mucosae und in den Zotten den Widerstand in den Capillaren gesteigert oder gemindert hat.

5. Da aus dem arteriellen Netze der Submucosa gesonderte Zweige zu den Zotten und ebenso zu den das untere Ende der Crypten begrenzenden Schleimhautflächen hinziehen, so kann in jedem der genannten Orte ein unabhängiger Strom fliessen.

6. Des geringern Durchmessers der zuführenden Wege und der Capillaren wegen wird den Crypten der schwächere Strom zukommen, doch wird auch auf dieser Bahn hin die Strömung nicht überall gleich mächtig werden können. Bevorzugt ist das blinde Ende der Crypten und die in ihrer Umgebung befindliche dichte Lage von Lymphzellen.

7. Aehnlich wie an den Crypten wird sich auch der Strom an den verschiedenen Abschnitten der Zottenlänge ungleich entwickeln können. Begünstigt sind die zwei obern Drittel der Zottenlänge, weil die Arterie erst in der Spitze in Capillaren zerfällt, weil in dem genannten Abschnitt die Capillaren weiter und zahlreicher vorhanden sind, und endlich weil etwa die Hälfte derselben schon dort in zwei Venen zusammengefasst wird. Zu dem durch die beiden Venen abfliessenden Blute können alle an dem obern Zottenabschnitt vorhandenen Capillaren einen Antheil liefern wegen ihrer fortlaufenden Verbindung untereinander.

8. Entgegen der am arteriellen Anfang getroffenen Anordnung verhält sich der Schleimhautweg am venösen Ende. Während die Zotten getrennt von den Crypten gespeist werden, fliessen aus beiden Gebilden die Blutmassen durch eine Vene ab, weshalb sich die beiden Ströme gegenseitig hemmend oder fördernd beinflussen können.

Gleichmässig aber muss in den beiden Wegen der Strom gestaut werden, wenn sich der Muskelring zusammenzieht, den die Vene innerhalb der Muscularis mucosae umgiebt.

9. Da das in die Mesenterialvene übergegangene Blut durch die Leber abströmt, so wird ihm stets ein Druck verbleiben, der dem in der Leber vorhandenen Widerstand entspricht. In Folge dessen werden die Capillaren, auf welche der Venendruck zurückwirkt, immer mit einer ihm entsprechenden Füllung versehen sein. Wie hoch der Druck in der V. portarum ansteigt, hängt nicht ausschliesslich von der Strömung in den Mesenterialvenen ab, weil noch die Venen des Magens und der Milz dorthin einmünden. Bei einem derartigen Sachverhalt gewinnt die Ringmuskulatur der Mesenterialvenen als Spannungsmittel eine besondere Bedeutung.

10. In einem Darm, dessen Gefässe gleichmässig offen und an Zahl und Durchmesser gleich denjenigen sind, an welchen ich die S. 163—164 angeführten Maasse genommen habe, wird sich die mittlere Geschwindigkeit in der Art. mesaraica zu der in den Capillaren wie 290 : 1 verhalten, entsprechend dem Flächengehalt der Arter. mesaraica = 0,071 cm, zu dem die Summe der Querschnitte aller Capillaren betragenden = 20,404 cm, nämlich in den obern Zweidritteln der Zotten = 15,852 cm, in Zuflüssen zu den Crypten = 2,011 cm und den Capillaren in den Muskeln = 2,545 cm.

Aus der Durchführung einer ähnlichen Berechnung für die Schleimhaut ergiebt sich, dass, wenn die Geschwindigkeit in den kurzen und langen Arterien = 87 wäre, sie in den Capillaren der Schleimhaut = 1, in den aus ihr kommenden Venen = 28 sein würde.

Auch für die Schätzung der Oberfläche, mit welcher sich in den obern Zweidritteln der Zotte das Blut mit der umgebenden Flüssigkeit berührt — man könnte sie als die der Resorption bezeichnen — gewähren die Messungen einen Anhaltepunkt.

Auf einem qcm des Darms stehen 1600 Zotten, auf den obern Zweidritteln je einer derselben finden sich im Mittel 30 Capillaren, der Durchmesser einer solchen beträgt 0,0008 cm, also ihr Umfang 0,0024 cm. — Wird die Länge derselben zu 0,04 cm angenommen, so ergiebt sich die gesammte Oberfläche derselben zu 4,6 cm, so dass die Absorptionsfläche des Blutes in den Zotten vier- bis fünfmal grösser ausfällt als der Grund, auf welchem die Zotten stehen.

II. Lymphgefässe des Dünndarms.

1. Schleimhaut. In einer Schleimhaut mit vollkommen injicirten Lymphgefässen ist die färbende Masse bis unmittelbar unter das Epithelium der Zottenspitze vorgedrungen. Von diesem ihrem oberflächlichsten Ende aus verläuft die Masse in Gestalt einer feinen Röhre gegen den Körper der Zotte hin, geradlinig oder spiralig geknickt entsprechend dem Dehnungsgrad ihrer Umgebung. Schliesslich geht die Spitzenröhre in die bauchige Höhlung über, welche unter dem Namen des Centralkanals der Zotte bekannt ist. Gegen die Wurzel der Zotte hin verjüngt sich die spindel- oder keulenförmig gestaltete Erweiterung des Kanals in ein Gefäss, welches als die etwas weitere aber geradlinige Fortsetzung der Spitzenröhre gelten kann (s. Tafel IV, Fig. 1 und Taf. V, Fig. 1). Dass an den in allen übrigen Theilen gut gelungenen Injectionspräparaten Teichmann's die Spitzenröhre nicht zur Anschauung kam, rührte möglicherweise von der geringern Dünnflüssigkeit der von ihm verwendeten Füllungsmasse her.

Sowie das Lymphgefäss an den Ort gelangt ist, an welchem sich die Zotte über das Niveau der Schleimhaut erhebt, spaltet es sich unter einem spitzen Winkel in Aeste, von welchen sich ein jeder mit einem gleichen des Nachbarn zu einem Bogen verbindet, dessen Concavität gegen die Oberfläche der Schleimhaut hin gerichtet ist. Da sich die Ausläufer des Zottenkanals häufig in mehrfache Zweige zerlegen, die mit den benachbarten zusammenfliessen, so entsteht alsdann ein aus nur wenigen Maschen hergestelltes Geflecht. — Aus jedem Bogen tritt gegen den Körper der Schleimhaut hin je ein Gefäss hervor, welches geradlinig fortschreitet, entweder in der Richtung des entsprechenden Zottengefässes oder gegen ein solches etwas verschoben, stets jedoch mit einem geringern Durchmesser begabt, als das von der Zotte her in die Bogen einmündende. Auf ihrem weitern geradlinigen Wege senden die Gefässe öfter unter spitzen Winkeln Zweige zu den nebenan liegenden Röhren ab. Nahe am Ende ihrer Bahn durch die Schleimhaut, kurz oberhalb der Muscularis mucosae, wo sich unterhalb der Crypten eine später zu beschreibende Zellenschicht befindet, löst sich jedes der Gefässe in mehrfache Aeste auf, welche durch ihre häufige Verbindung den sog. Plexus der Schleimhaut hervorbringen. Die Maschen desselben

sind regelmässig gestaltet und etwa viermal so weit, als die des daselbst gelegenen Geflechtes der Blutcapillaren. Die Klappen, welche den Lymphgefässen bis dahin fehlten, treten nun auf; daraus erklärt sich der Widerstand, welchen der Plexus der von der Submucosa herandringenden Injectionsmasse entgegensetzt. Taf. IV, Fig. 1.

Von seiner äussern, der Muscularis mucosae zugewendeten Seite des Plexus mucosus treten dann Gefässe hervor, welche senkrecht die genannte Muskelschicht durchbohren, um sich in das weitmaschige, aus stärkern Gefässen bestehende Geflecht auf der Submucosa aufzulösen. Ehe wir ihren Lauf von dort aus weiter verfolgen, werden wir erst das Verhalten an den Stellen der Schleimhaut zu betrachten haben, an welchen sich Follikel befinden.

Unregelmässig zerstreut, seltener einzeln, öfter zusammengehäuft, finden sich in der Darmwand die Follikel, häufiger im Duodenum als in den nachfolgenden Abschnitten, meist liegen sie von dem Peritonäalansatz entfernt. Oberhalb seiner, der Lichtung des Darms zugekehrten Fläche des Follikels sind die Zotten meist kürzer, zuweilen verkümmert, gleiches gilt von der Länge und dem Entwicklungsgrad der Crypten, welche dort die Zotte umgeben. An seiner äussern, nach der Submucosa hin gerichteten Seite ruht jeder einzelne Follikel in einer niedrigen Grube; sind sie zu einem Haufen vereinigt, so ist ihre gemeinsame Lagerstätte von einem niedrigen Wulst umzogen, der von seinem innern Rande erhabene Streifen ausschickt. Durch sie zerfällt die von dem Wulst eingefriedigte Fläche in mehrfache kleinere rundliche Grübchen, in welchen sich je ein Follikel einsenkt.

Aus dem Innern der Follikel kommen zahlreiche Lymphgefässe hervor, deren Fortsetzungen die Oberfläche desselben rings mit weitmaschigen Netzen umspinnen (s. Taf. IV, Fig. 1). Die Gefässe dieses Netzes treten einerseits mit dem Plexus mucosus in Verbindung, zu dem sich hier wie überall die aus den Zotten kommenden Gefässe verschlingen. Anderseits, wo sich der Follikel in die Submucosa einsenkt, verbinden sich die ihn umkreisenden Gefässe mit dem gröbern Plexus der Submucosa.

Obwohl der Plexus der Submucosa, auf den wir nun zurückkommen, wesentlich von klappentragenden Gefässen gebildet wird, die ihren Ursprung in der Mucosa nehmen, so steht er doch auch

in Verbindung mit den Lymphgefässen der Tunica muscularis. Reihenweise zweigen sich aus den intermusculären Lymphbahnen kleinere Gefässe ab, welche die Spalten zwischen der Ringfaserung durchsetzen und in den Plexus der Submucosa einmünden.

Aus den gröblichen Maschen des Unterschleimhaut-Geflechtes sammeln sich allmählich grössere Stämme, die folgeweise zu einem noch grössern Stamm vereinigt werden, welcher schliesslich an dem Ort nach aussen unter den Peritonäalüberzug tritt, an welchem die Blutgefässe des entsprechenden Darmstückes die Muskelwand durchbrechen. Taf. IV, Fig. 2.

2. Die Lymphgefässe der Muskelhaut. Der Beschreibung, welche Auerbach von dem Bau und dem Verlauf der Lymphgefässe in der Muskelhaut gegeben hat, kann ich mich durchaus anschliessen. In den Spalten, welche die Bündel von Ringsfasern trennen, liegen feinere Gefässe, welche der Richtung der Faserung folgen. Der Länge und der Dicke der Darmwand nach treten die benachbarten Gefässe häufig in Verbindung durch winkelrecht abgehende Zweige. Zahlreiche Ausläufer dieses Netzes gelangen schliesslich dahin, wo sich die Längs- und Quermuskeln des Darms berühren. Zwischen den beiden Muskellagen entsteht durch ihren Zusammenfluss ein reiches Geflecht der sog. Plexus intermuscularis. Nachdem sich aus dem Geflecht ein grosses Sammelgefäss hervorgebildet hat, durchsetzt dasselbe die Längsfaserhaut und verbindet sich ausserhalb der letztern mit dem nahegelegenen Ausführungsgang aus der Submucosa.

In Fig. 2 der Taf. IV ist der Verlauf der Lymphgefässe im Zusammenhang dargestellt, wie er sich aus meinen Erfahrungen ergeben hat. Auch diese Zeichnung ist wie die entsprechende der Blutgefässe dadurch entstanden, dass die aus zahlreichen kleinern Stücken gewonnenen Anschauungen zu einer zusammenhängenden vereinigt sind. Obwohl die Figur das Ansehen einer schematischen besitzt, so ist sie doch möglichst treu der Natur nachgebildet.

Wie meine Vorgänger bediente ich mich, um die Lymphgefässe zu injiciren, des Einstichverfahrens; als Masse einer möglichst gesättigten Lösung von Berlinerblau. Dem Gelingen einer Injection der

Schleimhaut-Lymphgefässe kommt es zu Gute, wenn man den frischen Darm, der in voller Verdauung begriffen ist, benutzt. Auf die Füllung der von einem Follikel entfernter liegenden Zottengefässe kann man nur dann rechnen, wenn die Spitze der Canüle, nachdem sie schräg die Submucosa durchbrochen hat, auch noch die Muscularis mucosae ansticht. Ist die Canülemündung bis dahin geführt worden, so ziehe man, hevor der Stempel vorgeschoben wird, die Spritze um ein Kleines wieder zurück.

III. Zum Bau der Darmschleimhaut.

In dem Gewebe der Schleimhaut selbst beginnt der Lymphstrom, welcher später in geschlossenen Bahnen fortschreitet, und auch noch innerhalb der letztern empfängt er Hemmung und Antrieb durch die elastischen und contractilen Gebilde, die ausserhalb der Leitungsröhren gelegen sind. Eine vom hydraulischen Gesichtspunkt aus geführte Untersuchung muss darum insoweit auf den Bau der Schleimhaut Rücksicht nehmen, als durch ihn der Strom beinflusst wird. Von diesem Standpunkt aus möchten die nachfolgenden Mittheilungen beurtheilt sein. Wie die hydraulische Untersuchung den molekularen Process unberücksichtigt lässt, welcher in den strömenden Flüssigkeiten stattfinden mag, so bleiben auch ihre Ergebnisse unberührt von den Erfahrungen und Vorstellungen über die bei der Resorption betheiligten chemischen Umsetzungen. Denn von welcher Art die letztern auch sein mögen, stets wird zu erörtern sein, wie und wodurch die Producte in die Schleimhaut geführt und aus ihr entfernt werden.

Meinem Vorhaben gemäss war in erster Linie die Architectur und erst in zweiter die Structur der Baustücke aufzuklären. Daraus ergab sich die Nothwendigkeit, nach Mitteln zu greifen, durch welche die Schleimhaut der Fläche nach in Schichten gespalten und aus ihr einzelne Formbestandtheile mit Schonung der übrigen herausgenommen werden konnten. Für alle im Folgenden aufgezählten Verfahrungsarten gilt als Voraussetzung, dass sie auf den noch überlebenden Darm anzuwenden sind.

Maceration des Darmes in einer kalt concentrirten Lösung des

rothen chromsauren Kalis. Nachdem sein Inhalt mit chromsaurem Kali ausgespült ist, wird der Darm bis zur starken Spannung seiner Wand mit der Lösung gefüllt und dann in ein die gleiche Flüssigkeit enthaltendes Gefäss eingetaucht. Nach dreimal 24 Stunden lässt sich an Stücken des aufgeschnittenen und ausgespannten Darms die Muskelhaut von der äussern Fläche der Submucosa abziehen. Zugleich hat sich innerhalb der Schleimhaut selbst eine Spaltfläche gebildet, auf der einen Seite derselben liegen Crypten und Zotten, auf der andern Submucosa, Muscularis mucosae und zwei bisher unbeachtet gebliebene Schichten, eine elastische Faser- und eine zweite aus einem Analogon der Follikel hergestellte Zellenschicht. Die Spaltung der Schleimhaut in die beiden Theile lässt sich leicht mit einem Scalpellstiel bewirken. Die einander zugekehrten Trennungsflächen sind glatt und spiegelnd.

Eine weitere Trennung des äusern Theils der Schleimhaut gelingt durch mehrtägige Maceration derselben in wiederholt erneuertem Wasser. Von der Submucosa lässt sich dann die Muscularis abziehen, und von der letztern als ein zusammenhängendes Häutchen die elastische Faserung mit einer spitzen Pincette abheben. Durch Schütteln sind die Leukocyten zu entfernen.

Maceration in 10procentiger *Na Cl*-Lösung. Der Darm wird mit warmer, etwa auf 40° C. temperirter 10procentiger *Na Cl*-Lösung ausgespült, dann unter Spannung gefüllt, in eine kalte gleichbeschaffene Flüssigkeit eingelegt. Andern Tags wird von ausgespannten Stücken des Darms die Schleimhaut von der Submucosa abgetrennt, wobei in der Regel die Schleimhaut nur stückweise abgelöst werden kann. Die abgelösten Stücke der Schleimhaut und der von der Muskelhaut getrennten Submucosa werden gesondert in 10procentiger *Na Cl*-Lösung aufbewahrt.

Schon nach 24 Stunden ist die über der Schleimhaut stehende Lösung, auch wenn sie reichlich vorhanden war, schleimig und trübe geworden. Die abgegossene Flüssigkeit wird durch reine *Na Cl*-Lösung ersetzt und das Abgiessen und Erneuern von Tag zu Tag so lange fortgesetzt, als sich die Flüssigkeit noch trübt. Meist tritt das letztere erst nach wochenlanger Behandlung ein, bei welcher die *Na Cl*-Lösung nicht gespart werden darf. In der Lösung quillt die Schleimhaut und die Zotten treten als feine, relativ lange Fäden auf ihrer

Oberfläche hervor. Ist die Erweichung der Haut eine merkliche geworden, so empfiehlt es sich, die Stücke derselben anhaltend zu schütteln. Wenn, wie im hiesigen Institut, eine durch den Gasmotor getriebene Schüttelmaschine zur Verfügung steht, kann durch 4- bis 5stündiges Schütteln der nicht allzu kleinen Stücke mit 10proc. *Na Cl*-Lösung die Wirkung, welche das ruhige Liegen in der Flüssigkeit zur Folge hat, sehr beschleunigt werden. Unter dieser Behandlung fallen die Epithelien von den Zotten und aus den Crypten, alle Leukocyten verschwinden, so dass nur die elastischen Netze, das Reticulum, die Zottenmuskeln und die Wandungen der Capillargefässe übrig bleiben. Aus einer so beschaffenen Schleimhaut lassen sich unter Beihilfe von Farbstoffen und des Mikrotoms sehr klare Bilder von den zurückbleibenden Bestandtheilen gewinnen.

Eine Mischung aus 100 Theilen 96gradigen Alkohols mit 0,5 bis 1,0 Th. Salzsäure diente zur Reinigung der Muskelmassen, der Gefässe wie auch sonst. Stücke des Gewebes werden im Rückflusskühler je nach ihrer Grösse ein bis drei Stunden im Kochen erhalten und die geschrumpften Gewebsmassen in destillirtem Wasser unter mehrfacher Erneuerung ausgesüsst.

Zur Reinigung der elastischen Platten und Fasern diente entweder eine mehrstündige Einwirkung künstlichen Magensaftes bei 40° C. oder auch die in ihrer Einwirkung zu überwachende 10- bis 2procentige Lösung von Kalihydrat.

Mit den aufgezählten Mitteln gelingt es, wie schon erwähnt, die diesseits der grossen Muskelhaut gelegenen Theile der Darmwand in mehrfache Schichten zu spalten und auch theilweise die mehrfachen Elementarformen, aus welchen sich jede derselben zusammensetzt, vereinzelt zur Anschauung zu bringen.

Als besondere Schichten, und zwar in Gestalt von zusammenhängenden Häutchen, liessen sich von aussen nach innen gezählt isolirt darstellen die Tunica submucosa, die Muscularis mucosae, eine darauf folgende elastische, mit Leukocyten bedeckte Haut, die ich Stratum fibrosum und granulosum nenne, dann im Zusammenhang der Theil der Schleimhaut, welcher die Crypten und das Zotteninnere enthält, ferner, wie schon Drasch gefunden, ein Ueberzug der Zotte und endlich das Epithelium der letztern.

Wie aus der Betrachtung der von einander getrennten, in ihrem

Bau unversehrten Schichten die Einsicht in das Gefüge der Schleimhaut gefördert wird, so erwächst ihr eine weitere Unterstützung dadurch, dass aus den übrigen Bestandtheilen, ohne ihren Zusammenhang aufzuheben, die gesammte Masse der Leukocyten und von den übrigen Zellenarten das Protoplasma unter Zurücklassung ihrer Kerne entfernt werden kann.

a. Die Submucosa lässt sich leicht von den aussen aufliegenden Ringmuskeln, schwieriger von der Muscularis mucosae abtrennen. Mit Sicherheit gelingt die Entfernung der Muscularis mucosae nur durch die Anwendung einer 10procentigen Lösung von Kalihydrat. Isolirt und ausgewaschen erscheint die Submucosa als ein Gewebe von gekreuzten Bindegewebsfasern, deren Längsachse mit der des Darms einen Winkel bildet, so dass eine Aenderung der von der Haut umfassten Lichtung durch eine Verkleinerung oder Vergrösserung des Kreuzungswinkels der Fasern möglich wird, ohne dass gleichzeitig die Dehnung der Schenkel in Anspruch genommen zu werden braucht. — Zwischen den Faserbündeln befinden sich zahlreiche von stärkern Lymphgefässen eingenommene Spalten und Räume.

b. Die Muscularis mucosae setzt sich aus zwei unter rechten Winkeln gekreuzten Schichten zusammen, deren Fasern fein und mit langgestreckten spindelförmigen Kernen versehen sind. Die Fasern einer jeden Lage sind zu Bündeln zusammengefasst.

Die äussere der beiden Faserschichten läuft parallel der Längsachse des Darms, sie ist die massigere der beiden. Die innere kreisförmig angeordnete lässt sich von der Längsschicht nicht absondern, weil sich, wie aus dünnen Flachschnitten ersichtlich, die Fasern der beiden Schichten vielfach durchflechten. — Um jede aus der Schleimhaut zur Submucosa dringende Vene liegt bei ihrem Durchgang durch die Muscularis mucosae ein geschlossener Ring aus Muskelzellen, um welchen sich Längs- und Kreisfasern herumschlagen. Taf. II, Fig. 1. An den Orten, wo die Follikel in die Schleimhaut eingebettet sind, fehlt die Muscularis mucosae. Aus der überall sonst vorhandenen Muskelhaut schneidet gleichsam der Follikel ein Stück heraus.

Die Muscularis mucosae haftet wie erwähnt einerseits fest an der Submucosa, anderseits an dem Stratum fibrosum. Von beiden lässt sie sich sicher und in grosser Ausdehnung dadurch sondern,

dass man Stücke der Darmwand, welche nur noch aus Submucosa, Muscularis mucosae und Stratum granulosum bestehen, unter Anwendung des Rückflusskühlers einige Stunden in 96proc. Alkohol kocht, welchem für je 100 Vol. 1 Vol. rauchender Salzsäure beigemischt wird.

c. Stratum fibrosum. Von der innern Fläche der äussern Schleimhauthälfte eines in chromsaurem Kali macerirten Darmes lassen sich Centimeter breite, aber weit längere Streifen einer feinen durchsichtigen Haut abziehen, die sich nach ihrer Lostrennung umrollen. Wenn die Haut von den Resten fest anhaftender Muscularis mucosae befreit ist und mit ihrer der Darmhöhle zugekehrten Fläche nach oben mikroskopisch untersucht wird, so findet man sie mit Leukocyten bedeckt, diese müssen durch Bepinseln oder Schütteln entfernt sein, bevor man zu der Anschauung des feinern Baues der Wand gelangt, wie sie auf Tafel VI, Fig. 2 dargestellt ist. Aus einem Maschenwerk, man kann nicht sagen von Bändern aber auch nicht von Fasern, ist sie zusammengesetzt; die Maschen sind rund oder oval, verschieden gross. In den sie umgrenzenden Fasern lässt sich durch kein Färbungsmittel ein Kern nachweisen, auch wenn durch anhaltendes Auswässern das chromsaure Kali vollständig entfernt ist, die Fasern quellen nicht durch Essigsäure, sie gehen auch nach vielstündiger Behandlung mit künstlichem Labsaft bei 40° C. nicht in Lösung und sie vertragen ohne zu verschwinden eine mehrstündige Einwirkung einer zehnprocentigen Kalilösung. Seinen physikalischen und chemischen Eigenschaften gemäss muss demnach das Häutchen zu dem elastischen Gewebe gezählt werden.

Das Stratum fibrosum ist nach aussen hin fest mit der Muscularis mucosae verbunden. Gemeinsam mit dieser letztern lässt es sich in grossen Stücken ablösen, wenn die äussere Schicht der Schleimhaut, auf welcher noch die Submucosa hängt, nur etwa 2 Stunden in einem künstlichen Magensaft mit 2 pro mille Salzsäure verweilt hatte und dann einige Tage lang in Wasser ausgewaschen war. —

Wenn das isolirte, von der zelligen Auflagerung befreite Häutchen mit Pikrocarmin gefärbt, durch Alkohol entwässert und auf einem Objectträger ausgebreitet worden ist, so zeigen sich in der scheinbar gleichartigen Grundlage dem unbewaffneten Auge einzelne feine runde Oeffnungen, deren Zahl sich unter Benutzung einer Lupe ausseror-

dentlich vermehrt. Tafel VI, Fig. 1. Die Oeffnungen sind die Pforten für die Gefässe, welche aus und zu den Geflechten auf der Submucosa an die Zotten und Krypten heran oder von da heranstreten. Einen überzeugenden Beweis für die Beziehung der Oeffnungen zu den Gefässen liefern Präparate, die aus dem injicirten Darm hergestellt sind. Durch ihre Eigenschaft, den Gefässen zur Führung und Vertheilung dienlich zu sein, gewinnt die elastische Haut für den Blut- und Lymphstrom eine besondere Bedeutung.

d. Stratum granulosum. Nach innen gegen die Crypten hin ist das Stratum fibrosum mit einer vielfachen Schicht von Zellen, vorzugsweise von Leukocyten bedeckt. — Der Anwesenheit der granulirten Schicht, der lockern Verbindung ihrer Bestandtheile ist es zuzuschreiben, dass die Schleimhaut in eine äussere und innere Abtheilung gespalten werden kann. Da die Scheidung der beiden Blätter innerhalb des Zellenlagers stattfindet, so haftet ein Theil der Leukocyten in den seichten Gruben zwischen den blinden Enden benachbarter Crypten, ein anderer auf dem Stratum fibrosum als Ausfüllungsmasse ihrer rundlichen Lücken. Bei der mikroskopischen Besichtigung der Oberfläche des mit der Faserschicht verbundenen Antheils sind die Eindrücke erkennbar, welche die stumpfen Enden der Crypten in dem Zellenlager erzeugt haben. — Neben den Leukocyten sind in dem Stratum granulosum noch andre grössere Zellen sichtbar, über deren Form und Zuständigkeit weitere Untersuchungen Aufschluss geben müssen. Siehe Tafel VI, Fig. 2, 3 und 4.

Der Zusammenhang der Zellen, ihre Zusammenfassung zu einer besondern Schicht ist aus der Anwesenheit feiner sie durchziehender Fäserchen erklärlich, welche, wie wir sehen werden, von dem elastischen Gerüst der Crypten zu dem Stratum fibrosum strahlen.

Man darf die Körnerschicht als eine flächenhafte Ausbreitung der Follikel ansehen, wegen der Gleichheit ihrer Zellenformen, des Reichthums an Blut- und Lymphgefässen, und endlich weil sich das Stratum granulosum unmittelbar in die Follikel fortsetzt, und zwar in Begleitung ihrer faserigen Grundlage, welche unter den Follikelhaufen Gruben zur Aufnahme der Drusenkörner herstellt.

e. Cryptenschicht. Hierunter verstehe ich den Theil der Schleimhaut, welcher sich vom Stratum granulosum bis zum Anfang der freien Zotte, beziehungsweise zur freien Mündung der Crypten hin erstreckt.

Wenn man Stücke des genannten Abschnittes für sich, oder auch wenn an ihm noch die darunter liegenden Schichten bis zur Submucosa hin haften, durch 10procentige *NaCl*-Lösung entschleimt. einige Stunden in den Brutofen mit künstlichem Magensaft behandelt und dann tüchtig ausschüttelt, so fallen die Zotten ab und es verliert die Cryptenschicht ihre vorherige Fülle und Festigkeit. Doch bleibt noch immer ein nicht unbedeutender Antheil zurück, der sich mit Victoriablau oder Pikrocarmin färben, in Alkohol härten und nach seiner Einbettung in Paraffin mikrotomiren lässt.

Was von der Cryptenschicht nach der Entfernung der Zellenkörper übrig bleibt, werde ich als Cryptengerüst bezeichnen. Unter den Formbestandtheilen des Gerüstes nehmen die elastischen Ueberzüge der Krypten den ersten Rang ein, sie bilden den grössten Theil des vorhandenen Schleimhautrestes und sie bestimmen die Lage und Anordnung anderer noch sichtbarer.

Auf einem Schnitt, welcher senkrecht zur freien Fläche der Schleimhaut gelegt ist, erscheinen kleine Schläuche, deren Umrisse sich mit denen der unveränderten Crypten decken. Nach der Submucosa hin sind die Schläuche geschlossen, nach der Zottenbasis hin offen. Haftete an dem Stück, von welchem der Schnitt genommen ward, noch die granulöse und die fibröse Schicht, so lassen sich feine Fäden gewahren, welche von der Faserschicht ausgehend die darüberliegenden Zellenreste durchsetzen und sich an die Schläuche da anlegen, wo ihre cylindrische Wand in die Endkuppe umbiegt. Taf. VI, Fig. 4 u. 5. — An Flachschnitten, die in absteigender Richtung von dem blinden Ende der Schläuche gegen die fibröse Schicht geführt werden, verlaufen die Wände der Schläuche durch die granulirte Schicht und enden in der fibrösen. Taf. VI, Fig. 3.

Nahe ihrer Mündung an der Zottenbasis hängen die zarten Häute der Schläuche mit kräftigen elastischen Fasern von rundlichem Querschnitt zusammen, welche in jener Gegend ein weitmaschiges Netz bilden, das in jeder seiner Maschen eine grössere Zahl, 3 bis 8 Schläuche einschliesst. Die Fasern, welche ihrer Verbindung wegen als ein Bestandtheil des Ueberzugs der Crypten anzusehen sind, laufen zwar meist der Oberfläche der Schleimhaut parallel, doch dringen auch einzelne derselben tiefer hinab. Der grössere Durchmesser der Maschen, welche von den elastischen Fasern umsponnen wer-

den, liegt gewöhnlich nach der Längenachse des Darms (Taf. VI, Fig. 6 u. 7).

Ueber die Structur des Stoffes, aus welchem die Ueberzüge der Crypten hergestellt sind, geben kleine im losgelösten Zustand ausgebreitete Bruchtheile Aufschluss. Von einer durchsichtigen, äusserst zart gefärbten Grundlage heben sich stärker gefärbte Pünktchen ab, von welchen es unbestimmt bleibt, ob sie als Reste einer unvollkommenen Verdauung nur aufgestreute Körnchen, oder eingewachsene Verdickungen der Häutchen sind. Daneben aber ist die Grundlage mit mancherlei durchsichtigen Zeichnungen bedeckt, welche derselben das Ansehen geben, als sei sie von kleinern und grössern Oeffnungen durchbrochen. Mir ist kein Mittel bekannt, durch welches sich mit Sicherheit entscheiden liesse, ob die Zeichnungen von Fältchen oder von freien Rändern erzeugt werden. — In der Höhe, in welcher die starken elastischen Fasern auftreten, lässt sich mit Sicherheit der Zusammenhang und Uebergang dieser mit und in die Häutchen nachweisen. Sichtlich löst sich das Ende einer Faser in ein Häutchen auf, und überall folgt einer eingeleiteten sanften Bewegung einer Faser die anhängende Haut.

Was nach dem chemischen Verhalten des Stoffes der Cryptenübergänge kaum noch zweifelhaft blieb, empfängt eine weitere Bestätigung durch die anatomische Verbindung. Der Uebergang der Crypten ist aus Elastin hergestellt. Ausser der elastischen Hülle der Crypten sind in den wie beschrieben aufgehellten Präparaten noch andere Formen erkennbar; sie gehören jedoch nicht dem Gerüst der Cryptenschicht an, sie sind vielmehr unverdaute und festgeheftete Reste der dort eingelagerten Bestandtheile — Gefässwandungen, Kerne von Leukocyten, Stern- und Muskelzellen.

Der Raum, welchen die eben genannten Einlagerungen beanspruchen, ist auf verschiedenen Höhen der Crypten ungleich gross. Näher der Endkuppe liegen die Schläuche enger beisammen, als weiter oben in der Nachbarschaft der Mündungen. Am erstern Ort sind namentlich die Zellen sparsamer vertreten, indess sich oben, wo die Zotten ihren Anfang nehmen, für je eine derselben eine breitere Insel bildet, in deren Mitte die Zottenarterie oft noch kenntlich ist. Durch solche Inseln zieht oft eine gröbere elastische Faser hin. Taf. VI, Fig. 7.

Aus feinen Schnitten durch die frisch gehärtete und gefärbte

Cryptenschicht gewinnt man die Aufklärung, dass die zwischen den Crypten eingelagerten Zellen meist Leukocyten sind, untermischt mit Sternzellen, deren Ausläufer ein sog. Reticulum bilden. — Von den eingelagerten Muskelzellen wird bei den Zotten gehandelt werden.

Im Innern der elastischen Cryptenhülle liegt eine Membrana propria und ein Epithel. Die erstere giebt sich durch die Anwesenheit deutlicher Kerne als ein aus Zellplatten gebautes Häutchen zu erkennen. Im Epithel sind dieselben Zellenformen wie auf der Zotte vorhanden, Becher und besäumte Zellen, doch ist der Saum auf den letztern niedriger, als auf den entsprechenden des Zottenüberzugs. Weil sich aus Schnitten, welche durch die Schleimhaut nach der Richtung ihrer Oberfläche geführt werden, ergab, dass die Crypten näher dem blinden Ende dichter als gegen die Mündung hin stehen, so bin ich der Annahme nicht abgeneigt, dass sich benachbarte Crypten auf ihrem Wege gegen die innere Oberfläche der Schleimhaut zur Herstellung einer gemeinsamen Mündung vereinigen.

f. Zotten. Ihr Gerüst besteht aus einem Filz, dessen Fäden vielleicht ausschliesslich aus zweierlei Zellenformen hervorgehen. — Die eine derselben, deren Körper einer Spindel ähnelt, liegt in dem Mantel der Zotte, unmittelbar unter ihrer Epithelieldecke, die andere, sternförmig gestaltet, findet sich tiefer im Zottenkörper. An feinen Schnitten durch die gehärteten Zotten eines nüchternen Thiers — siehe Taf. V, Fig. 5 und 6 — stellen sich Ausläufer und ihre Verbindungen so deutlich und so reichlich dar, dass sie allein zur Herstellung des Reticulums genügend erscheinen. Anderseits sind auch die Zotten noch dann in ihrer Form erhalten und von einem dichten Reticulum durchzogen, nachdem sie der Einwirkung einer 10proc. *Na Cl*-Lösung und nachträglich der des künstichen Labsaftes bei 40° C. ausgesetzt waren. Da nach dieser Behandlung nur die Kerne zurückbleiben, die Leiber der Zellen dagegen verschwunden sind, so sollte man, wären die Ausläufer der Zellkörper die einzigen Ausgangspunkte der Reticularfäden, erwarten, dass das um seinen Zusammenhang gebrachte Netzwerk in sich zusammenfalle. Weil dieses nicht geschieht, so ist die Vermuthung berechtigt, dass an der Bildung des Reticulums auch noch andere Fäserchen betheiligt sind, z. B. solche, die aus den elastischen Gebilden der Cryptenschicht heraufdringen.

Muskeln der Zotten. Von dem Verlauf der Muskeln, welche in



der Cryptenschicht beginnen und in der Zotte enden, habe ich mich zu unterrichten gesucht an Schnitten, welche aus einer mit 10proc. *Na Cl*-Lösung behandelten, gehärteten und in Paraffin eingebetteten Schleimhaut gefertigt und mit Safranin gefärbt wurden, oder auch aus einer solchen, die frisch in chromsaurem Kali gehärtet, ausgewaschen und mit Haematoxylin gefärbt war. Im Widerspruch mit der seit Brücke's Entdeckung allgemein giltigen Annahme, dass der Anfang der Muskeln in der Muscularis mucosae zu finden sei, muss ich behaupten, dass derselbe höher gelegen ist. Von der Muscularis mucosae können die Zottenmuskeln schon deshalb nicht ausgehen, weil das Stratum fibrosum dem Uebergang derselben in die darüber liegenden Schichten ein unübersteigliches Hinderniss entgegensetzt. — Jedenfalls trifft man aber auf Muskelzellen die zur Zotte emporsteigen, oft tief in der Cryptenschicht, nahe der granulirten und zwar in der Umgebung der Zottenarterie. Mit ihr steigen sie in der Cryptenschicht empor; auf dem Wege mehrt sich ihre Zahl, so dass der Abstand der Zottengefässe von den sie umgebenden Crypten sich vergrössert. Nahe unter den Mündungen der letztern bilden sich auf diese Weise die schon vorher erwähnten Inseln zwischen den Schläuchen der Crypten heraus, innerhalb der Inseln trifft man häufig auf eine oder mehrere der starken elastischen Fasern. Aufwärts von diesen Inseln, gegen den Fuss der Zotte hin, muss sich, wie aus Querschnitten zu erschliessen ist, die Zahl der Muskelbündel noch beträchtlich vermehren, denn nun erscheinen sie ganz plötzlich in reichlicher Menge. — In der Fig. 2, Taf. V, welche einem Zottenfuss entnommen ist, lassen sich mehr als 40 Muskelbündel zählen, von denen jedes aus mehrfachen Zellen zusammengesetzt ist.

Innerhalb des Zottenkörpers ordnen sich die Muskelbündel in zwei Lagen, eine äussere und eine innere. Zahlreichere, dafür aber schmächtigere Bündel umkreisen den Raum unmittelbar unter den Zottencapillaren, stärkere, aber sparsamer vorhandene schieben sich in die Nähe des Centralcanals. Einen gemeinsamen Ansatzpunkt der Bündel habe ich nicht zu finden vermocht; im Gegentheil, jedes der Bündel scheint einen selbständigen Ausgangspunkt zu besitzen.

Alle Bündel streben schliesslich vom Körper nach der Kuppel der Zotte. Dort angelangt, treten aus den Zellen feine verästelte Fäden hervor, welche untereinander verflochten, ein Fasergewölbe herstellen.

Vereinzelte Muskelzellen sind relativ langgestreckte Gebilde; die beiden äussersten Enden nehmen im Gegensatz zu den mittleren Abschnitten keine Carminfarbe auf.

Der Zottenmantel. Von vergoldeten mit Ameisensäure getränkten Zotten des Kaninchens hat Drasch eine zusammenhängende Haut unter der Präparirlupe abgezogen. Ein Gleiches gelingt an den Zotten des Hundes, wenn der Darm eine Reihe von Tagen in 10procent. *Na Cl*-Lösung aufbewahrt und mit ihr geschüttelt war. Wenn das losgelöste Häutchen ausgewaschen, nach Kräften ausgebreitet und in Haematoxylin gefärbt ist, so liefert es die auf Taf. V, Fig. 3 u. 4, wiedergegebenen Bilder. — Es erweist sich von der Oberfläche nach der Tiefe hin gerechnet aus Spindelzellen, Capillarwänden, Muskeln und einem alles umschlingenden Reticulum gebaut.

Die Spindelzellen besitzen einen von Netzfiguren durchzogenen Kern, und von den Polen ihres Leibes strahlen feine Fäden aus, welche nach mehrfachen Spaltungen mit den gleichbeschaffenen Ausläufern anderer Zellen sich verbinden. Verfolgt der Blick die Zotte der Länge nach, so findet er die Zellen reihenweise hintereinander stehend. Die Entfernung zwischen je zweien wechselt mit der Dehnung der Zotte. Die Längsachse der Spindel liegt stets nach dem Umfang der Zotte, und da nahebei auf demselben Kreis eine Anzahl solcher Zellen steht, so bilden sie zusammen mit ihren Ausläufern einen Reif, welcher wie auf dem Querschnitt durch eine Zotte ersichtlich, Taf. V, Fig. 2, die äusserste Oberfläche der von ihrem Epithelium entblössten Zotte umschliesst. — Die Spindelzellen hat zuerst Donders beschrieben und sie sind seitdem häufig für Ringmuskeln erklärt worden. Ob mit Recht kann die mikroskopische Untersuchung nicht entscheiden, doch scheint es als ob sie vorzugsweise in den Einbuchtungen gelegen seien, welche dem Zottenkörper während seiner Verkürzung eigenthümlich sind.

Unmittelbar unter den Spindelzellen liegen die Capillaren, welche in der nicht ausgespannten Haut — einer solchen liegt die Fig. 3, Taf. V zu Grunde — ihren gestreckten Verlauf aufgegeben haben. Auf die Capillargefässe folgen die äussern Zottenmuskeln, deren einzelne Bündel zu einer der von der Spitze nach der Basis der Zotte hin streichenden Capillare folgen. Zwischen die Capillaren und Muskeln schiebt sich ein feinstes Netzwerk von Fäden ein, die jedenfalls

zum Theil aus den Spindelzellen entspringen. Die Maschen des Fadennetzes werden gegen die äussere Oberfläche enger und enger, so dass schliesslich der Anschein einer gleichartigen Haut entsteht. In den Fig. 3 u. 4, Tafel V, ist das Reticulum absichtlich nicht dargestellt, um die andern Formen ungetrübt hervortreten zu lassen.

Aus der Leichtigkeit, mit der sich von der epithelfreien Zotte ein Ueberzug abnehmen lässt, geht hervor, dass zwischen seinen und den übrigen Bestandtheilen des Zottenkörpers eine nur lockere Verbindung besteht. Für die Mechanik der Zotte dürfte die feste Verbindung unter den Bestandtheilen des Mantels und ihre lockere mit dem Innern von Bedeutung sein. Erstere begünstigt den Uebergang von Flüssigkeit aus dem Epithel ins Zottengewebe. Und wenn es geschehen sollte, dass sich die äussere Muskelschicht unabhängig von der innern zusammenzöge, so würde der im Mantel anwesenden Flüssigkeit das Fortschreiten gegen den centralen Raum hin durch die geringe Spannung der Faserung erleichtert werden, welche zwischen dem Mantel und dem Centrum liegt. — Dass auch in den Reticulärmaschen des Mantels Leukocyten liegen, ergiebt sich aus der Betrachtung von Querschnitten durch gefrorene oder sonstwie gehärtete Zotten.

Nach innen vom Mantel besteht die Zotte aus dem Centralkanal, verästelten Zellen, Muskeln, der Arterie, dem Reticulum und Leukocyten.

Ueber die Gestalt der mit flüssigen Massen erfüllten Höhle habe ich mich schon oben geäussert. Rücksichtlich seiner nächsten Begrenzung besteht nur insofern Uebereinstimmung, als man in ihr die Anwesenheit kerntragender Endothelplatten zugiebt. Ob aber die Endothelzellen unter inniger Berührung ihrer Ränder eine rings geschlossene Haut bilden, die namentlich auch den zur Zottenkuppel hinaufragenden Spitzencanal auskleide, wird durch die histologische Untersuchung erst dann zu entscheiden sein, wenn es gelingen wird, die Wand der centralen Höhle von allen Auflagerungen befreit darzustellen. — Die Ergebnisse der natürlichen und künstlichen Injection lassen einstweilen die Anwesenheit einer zusammenhängenden, lückenlosen Auskleidung des Canals durch steife und festsitzende Endothelplatten als zweifelhaft erscheinen.

Nach aussen von den Endothelien liegt die schon beschriebene innere Muskelschicht und zwischen ihren Bündeln da und dort eine

der früher erwähnten Reticularzellen. Auf die Ebene projicirt ähnelt der Körper dieser Zellen einem unregelmässigen Stern, von dessen Spitzen feinste Fäden nach allen Richtungen des Raumes hin ausstrahlen. Von den Spindelzellen unterscheiden sich die Sternzellen dadurch, dass sich von der Oberfläche ihres Körpers allseitig Fasern ablösen; auch scheint es, als ob die Häufigkeit und der Ort ihres Vorkommens keiner festen Regel unterworfen sei.

Völlig unzureichend erweist sich unsere Zergliederungskunst, wenn man von ihr eine genaue Darstellung des reticulären Baues fordert. So lange das Zottengewebe von Zellen erfüllt ist, sind die Formelemente des Reticulum unsichtbar, und wenn die zelligen Einlagerungen durch Lösungsmittel entfernt sind, so fällt entweder die Zotte zu einer unterschiedslosen Masse zusammen, oder, wenn sie ausgedehnt bleibt, so werden in ihrem Innern Körnchen, Stäbchen, Kettchen, Fäden, Alles in kleinstem Maassstabe sichtbar, aber über den Zusammenhang der einzelnen Formen bleiben wir im Unklaren. — Von je einer Zotte, aus welcher durch eine 10procentige *NaCl*-Lösung alle Leukocyten entfernt waren, habe ich 400 regelrecht aufeinander folgende Durchschnitte hergestellt. Das Unternehmen, aus den einzelnen Bildern zu einer Vorstellung über den Gesammtbau zu gelangen, wollte jedoch nicht glücken, weil die Zotten durch die Einbettung verdrückt und verzerrt worden waren.

Mit der Cryptenschicht ist die Zotte im Wesentlichen nur durch Gebilde verbunden, welche sich in künstlichem Magensaft mit 0,2 Procent Salzsäure lösen. Ein Stück der Schleimhaut, das einige Stunden lang der künstlichen Verdauung anheim gegeben war, verliert, wenn es geschüttelt wird, sämmtliche Zotten, die jedoch, nachdem sie abgefallen sind, ihre Gestalt bewahren. Das widerstandsfähige Gewebe, aus welchem der Körper der Zotte besteht, muss demnach im Fuss derselben nicht gleich reichlich vertreten sein.

Da innerhalb des Reticulums die Wege liegen, auf welchen die aus dem Epithel herkommenden Flüssigkeiten in den centralen Raum gelangen, so war die Hoffnung berechtigt, an injicirten Zotten über die Anordnung ihrer Gewebselemente Aufschluss zu erhalten. Dass die Bilder, welche aus der natürlich oder künstlich gefüllten Zotte erhalten wurden, die gehegten Erwartungen bis dahin nicht befriedigt haben, wird durch die mehrfache Deutung derselben bewiesen. Nach

Basch bewegt sich die in das Zottengewebe eingedrungene Flüssigkeit in geschlossenen von Wandungen umgebenen Canälen. Im Gegensatz hiezu spricht sich Recklinghausen dafür aus, dass die Flüssigkeit sich durch die unregelmässig geformten Lücken des Reticulums zwischen den dort beherbergten Zellen einen Weg bahne.

Aus dem, was man auf den Durchschnitten von injicirten Zotten sieht, lassen sich zwar Stützen und Einwände für jede der beiden Annahmen heraussuchen, aber keine von beiden beweisen oder widerlegen.

Nach künstlichen Füllungen sieht man öfter von dem nur mässig ausgedehnten Centralcanal, namentlich aber von dessen Spitzenröhre blaue Strassen ausgehen, die sich unter Wahrung eines glatten Randes regelmässig verzweigen. Siehe Taf. V, Fig. 1. — Und auch nach der auf natürlichem Wege erfolgten Füllung des Centralcanals setzt sich der fettige Inhalt der Höhle gegen einzelne Abschnitte der Wand scharf ab, an andern engumgrenzten dagegen durchbricht er die Wand und berührt in geradliniger Fortsetzung das im Zottengewebe enthaltene Fett. — Und endlich die im Reticulum eingeschlossenen Leukocyten enthalten keine durch Ueberosmiumsäure geschwärzten Einschlüsse, obwohl ihr Körper das Fett scheinbar berührt, welches in der Zotte gelegen ist. Damit gewinnt es den Anschein, als ob die Leukocyten durch eine das Fett umschliessende Haut gehindert seien an der Entfaltung ihrer bekannten Eigenschaft Einschlüsse aufzunehmen.

Den Bildern, welche die Annahme eines abgeschlossenen Röhrenwerkes unterstützen, treten aber andre entgegen, die der Anschauung günstig sind, dass die in das Zottengewebe eingedrungene Flüssigkeit die Fasern und Zellen unmittelbar berühre, und sich zwischen ihnen einen Weg suche. Oft sind die Begrenzungen des blauen Farbstoffs und des Fettes höchst unregelmässig gestaltet, so schwillt z. B. auf seinem weitern Verlauf ein bis dahin feiner Faden ganz plötzlich kolbig an. Gestaltungen dieser Art würden in einem Rohr nur möglich sein, wenn dessen Wand ihrer geringen Spannbarkeit wegen auf die Vertheilung des Inhaltes der Lichtung einflusslos bliebe, sich vielmehr allen von aussen her wirkenden Drücken fügte. — Gleich den ebengeschilderten lassen sich auch andre Beobachtungen leichter der Anschauung unterordnen, dass die Flüssigkeit in einem unregelmässigen Lückenwerk aufgehoben sei. Auf einer Reihenfolge feiner

Schnitte, die durch eine stark fetthaltige und nachträglich gehärtete Zotte geführt wurden, findet sich unter zwei benachbarten öfter eine mit reichlicher, daneben sogleich eine andere mit nur spärlicher Füllung. Am einfachsten erklärt sich der Unterschied durch die Annahme, es sei das Fett aus einem Schnitte der Zotte herausgefallen. — Und ferner: nach einer kurzdauernden Einlagerung in Kalilauge bewahrt die mit Fett gefüllte Zotte ihre Form und in ihrem Innern verharren die feinen Fetttropfen in ihrer Lage. Doch genügt nun ein geringer Druck, um die vereinzelten zu einem gemeinsamen Tropfen zu vereinen, und diesen auf der Zottenoberfläche zum Austritt zu bringen. Sowie der Druck nachlässt, nimmt die nun fettärmere Zotte wieder die vordem behauptete Gestalt an.

Allerdings lassen sich durch gewisse Annahmen über die Eigenschaft einer Wand auch die zuletzt erwähnten Beobachtungen in Einklang bringen mit der Voraussetzung, dass sich von dem Centralcanal gegen die Zottenoberfläche hin ein geschlossenes Röhrenwerk erstrecke.

Ueberzeugender als noch so zahlreiche Indicien würde der Nachweis einer dem unterstellten Röhrenwerk angehörigen Wand wirken. — So lange die Röhrenwand nicht dargestellt oder anderseits die Möglichkeit ihrer Anwesenheit nicht widerlegt ist, wird die hier berührte Frage unbeantwortet bleiben.

Bedeutung der elastischen Massen für die Stromwege. Den bekannten Eigenschaften des elastischen Gewebes gemäss, dessen weite Verbreitung in der Schleimhaut früher übersehen oder sogar geläugnet war, werden alle Abschnitte der Haut zur Herstellung und Festhaltung einer bestimmten Form befähigt sein. Wenn die Schleimhaut durch Quellung, Blutströmung oder Muskelzusammenziehung aus der Gestalt, welche von der geringsten Spannung ihrer elastischen Massen verlangt wird, herausgeführt worden war, so wird sie alsbald zu derselben zurückkehren, sowie das Uebergewicht der umformenden Kräfte beseitigt ist. Dass der Eintritt und das Fortschreiten der resorbirten Säfte und der Lymphe in und durch die Spalten und Gefässe der Schleimhaut nur durch die Gegenwirkung zweier Kräfte begriffen werden kann, ist niemals in



Zweifel gezogen worden; es wurden wie bekannt die Muskeln als das zusammenpressende, der Druck des Blutstroms als das ausdehnende Mittel angesehen. Ob die beiden in Anspruch genommenen Kräfte zur Lösung der gestellten Aufgabe ausreichen, ist jedoch niemals genauer untersucht worden. In der Zottenkuppel und deren nächster Umgebung könnte, wenn die bis dahin contrahirten Muskeln erschlafft sind, die Wiederherstellung der zusammengezogenen in die gestreckte Gestalt durch den Blutstrom besorgt werden. In der That spricht die Lage, die Anordnung und die Dichtigkeit der Capillaren an dem genannten Ort für eine derartige Vorstellung. Ihr weniger günstig sind die Verhältnisse in der Cryptenschicht, wegen des kleinen Durchmessers der Capillaren, ihrer weitmaschigen Netze und der Geringfügigkeit der in sie einmündenden Arterien.

Unabhängig von dem Werth, welchen man dem Antagonismus zwischen den Muskeln und dem Blutstrom beizulegen geneigt ist, kann die Frage nach der Wirkungsfähigkeit der elastischen Massen nicht mehr umgangen werden, nachdem ihre Anwesenheit dargethan ist. Wegen der zahlreichen Einschlüsse, welche das elastische Gerüst beherbergt, würde eine an der Schleimhaut unternommene Untersuchung weniger rasch zu einem befriedigenden Ergebniss gelangen, als es z. B. an der Lunge und den Arterien der Fall war. Da ich auf eine eingehende Prüfung, wie stark und wohin gerichtet der Zug sei, den die elastischen Massen üben, bisher verzichten musste, so kann ich nur Weniges, was ich beiläufig erfuhr, mittheilen.

Die Zotten, aus welchen durch die 10procentige *NaCl*-Lösung die Leukocyten entfernt sind, pflegen sich im Vergleich mit ihrer vorigen Gestalt lang und schmal zu strecken. Insofern vorausgesetzt werden darf, dass der elastische Antheil ihres Gewebes durch die Salzlösung nicht verändert sei, würde man aus der eingetretenen Formänderung schliessen müssen, dass die Zotte vermöge ihrer Elasticität eine möglichst grosse Oberfläche anzunehmen bestrebt sei. Wenn aus der mit chromsaurem Kali gehärteten Schleimhaut ein Schnitt senkrecht gegen die Crypten angelegt und aus diesem durch kurz dauernde Einwirkung kaustischen Kalis die Epithelien erweicht sind, so erscheint der Raum, in welchem die Zottenarterien und -Venen liegen, grösser als früher, was nur darum eingetreten sein kann, weil sich der Durchmesser der Cryptenlichtung verringert hat.

Unter gewissen Umständen muss also die elastische Umhüllung der Crypten einen gegen den Mittelpunkt der Lichtung hin gerichteten Zug üben.

Allerdings sind die Verhältnisse, unter welchen die eben angegebenen Formänderungen der Zotte und der Crypte beobachtet wurden, mit den natürlichen wenig übereinstimmend. Dessenungeachtet verdienen die Beobachtungen als Ausgangspunkt einer weiteren Untersuchung deshalb beachtet zu werden, weil die von dem elastischen Zug bedingte Formänderung das Resorptionsgeschäft der Zotte und den Lymphstrom zwischen den Crypten begünstigt. — Ausserdem lassen die Beobachtungen erkennen, welchen Vorzug es gewährt, wenn die Lage der Formbestandtheile durch die eingestreuten elastischen Massen geregelt werden kann. Ueberall anwesend und den ihr entgegenstehenden Kräften angepasst, vermögen sie auf beschränkten Orten zu wirken, was dem Blutstrom selbstverständlich in einer so feinen Gliederung unmöglich wäre.

Epithelialzellen. — Nach guter Härtung und darauf folgender Färbung mit Ueberosmiumsäure gewährt ein feiner Schnitt durch das Epithelium, wenn er von der Darmlichtung aus betrachtet wird, das Bild einer getüpfelten Platte; offenbar entsprechen die Pünktchen den optischen Querschnitten der Stäbchen des Zellensaums, welche zuerst von Brettauer und Steinach beschrieben wurden. Bei tieferer Einstellung zeigt sich eine weniger und darauf eine stärker gefärbte Punktirung. In gleicher Hohe mit letzterer, sehr nahe dem oberen glatten Rand der Zelle, liegen an dem Umkreis des Saumes grössere solcher dunklen Punkte. An Längenschnitten durch die Zotte begegnet man in dem Saum der Epithelien vom Zellenboden an aufwärts zuerst einem hellern, dann einem dunklen Bändchen, auf welchen der deutlich gestrichelte grösste Abschnitt des Saumes folgt. Hierdurch wird die Vermuthung geweckt, als ob jedes Saumhärchen seiner Wurzel nahe zum Knötchen anschwelle. Siehe die schematische Darstellung auf Taf. VI, Fig. 9.

Ein Saum von der beschriebenen Gestalt, welcher aus feinsten an unmittelbarer Berührung verhinderter Fädchen besteht, ist einem Rechen vergleichbar, welcher den im Darminhalt vorhandenen Körn-

chen den Zutritt zu dem Protoplasma der Zelle verweigert. In die Capillarenspalten zwischen den Fädchen wird nur Flüssigkeit, diese aber am freien Ende so oft eintreten, als sie am angewachsenen weggenommen wurde. Zu der vorgetragenen Anschauung stimmt die Beobachtung, dass man zwischen den Fäden des Saumes niemals körnige Einlagerungen gefunden hat.

Mit den Rändern ihres grösseren, oberhalb des Kernes gelegenen Abschnittes stossen die Körper der Epithelialzellen glattrandig aneinander. Unterhalb des Kernes zeigen die Ränder Vorsprünge, welche sich mit entsprechenden der Nachbarzelle berühren, wenn nicht zusammenfliessen, denn meist fehlt es an einer sichtbaren Grenze, durch welche das, was jeder der beiden Zellen angehört, zu unterscheiden wäre. Von der beschriebenen Verbindung dürfte der Zusammenhang abzuleiten sein, welchen die von ihrem Boden losgelösten Zellen bewahren können. Siehe Taf. V, Fig. 6.

Entweder ist aber jede der Zellen mit ihrer nebenständigen nicht ihrem ganzen Umfang nach verbunden oder der gegenseitige Anschluss ist nur ein zeitweiliger, denn es schieben sich, wie wir durch eine vielfach bestätigte Beobachtung Eberth's wissen, oft Leukocyten zwischen die Zellenfüsse. Ihrer Grösse gemäss müssen die Einwanderer die zwei Epithelialzellen in einem bedeutenden Umfang von einander zu trennen vermögen.

Dass eine Trennung des Zusammenhanges der aneinanderstossenden Flächen je zweier oder mehrerer Zellen stattfinden könne, beweisen auch die Erscheinungen, welche nach der künstlichen Injection der Lymphwege und während der Aufnahme des Fettes beobachtet werden.

Bei der Aufsicht auf die freien Zellenflächen eines in der Fettresorption befindlichen Darmes gewahrt man, auch wenn der Inhalt der Epithelien durchaus klar ist, an den Berührungspunkten je dreier Zellen dunkle, durch Ueberosmiumsäure geschwärzte Punkte, eine Beobachtung, die ich in Uebereinstimmung mit Watney nahezu regelmässig gemacht habe. Das Fett muss also auch zwischen den Zellen hindurchgeführt werden können. Siehe Taf. VI, Fig. 10.

Noch übersichtlicher stellt sich ein Weg zwischen Epithelialzellen nach künstlichen Einspritzungen dar. Auf Durchschnittspräparaten erscheinen zwischen je zwei Zellen feine blaue Streifen, die sich der

ganzen Zelle entlang hinziehen. Da sich die blauen Strassen auch an Zotten finden, die keineswegs strotzend gefüllt sind, so gewinnt die Annahme vorgebildeter oder leicht herstellbarer Spalten zwischen den Zellen an Boden.

Nicht minder als die angeführten Thatsachen spricht für die Befähigung zur eigenen Bewegung der Epithelialzellen ihr Haften auf der Zottenfläche. Wie könnte ein aus unbeweglichen Zellen gebildeter Saum seine Berührung mit dem Boden bewahren, der sich gleich dem der Zottenoberfläche ausdehnt oder zusammenzieht. Keinenfalls wird die Anpassung der unteren Epithelial- an die veränderliche äussere Zottenfläche durch die Annahme einer Verkittung erklärlich.

Benutzte Literatur.

Arnstein, Virchow's Archiv. Bd. 39.
Auerbach, Virchow's Archiv. Bd. 33.
Basch, Wiener Sitzungsberichte. Bd. 62. 1862.
Basch, Wiener Sitzungsberichte. Bd. 51. 1865.
Brücke, Wiener Sitzungsberichte. 1851.
Brücke, Denkschriften der Wiener K. Akad. Bd. VI. 1854.
Bruch, Zeitschr. f. wiss. Zoologie. 1853.
Cruikshank, Anat. of absorbing Vessels. 1790.
Debove, Archiv de Phys. 1874.
Donders, Physiologie, deutsch von Theile. 1856.
Dönitz, Arch. für Anat. u. Phys. 1864.
Drasch, Wiener Sitzungsberichte. Bd. 83. III. Abt. 1880.
Elmer, Virchow's Archiv. Bd. 40.
Eberth, Würz. Nat. Zeitschr. Band. 5. 1864.
Eberth, Virchow's Archiv. Bd. 21.
Erdmann, Inaug.-Diss. Dorpat. 1867.
Fohman, Sur le vaisseaux lymphatiques. Bonn. 1840.
Fortunatow, Pflüger's Archiv. Bd. 14. 1877.
Fries, Virchow's Archiv. Bd. 40.
Goodsir, Edinb. Phil. Journal. 1842.
Gruby and Delafond, Comptes Rendus. 1843.
Heller, Arbeiten aus dem physiologischen Institut zu Leipzig. 1872.
Henle, Müller's Archiv. 1838.
Henle, Anatomie. Bd. 3. 1876.
Heidenhain, Moleschott's Untersuchungen. Bd. 4. 1858.
Hewson, The works of Sydenham Society. 1846.



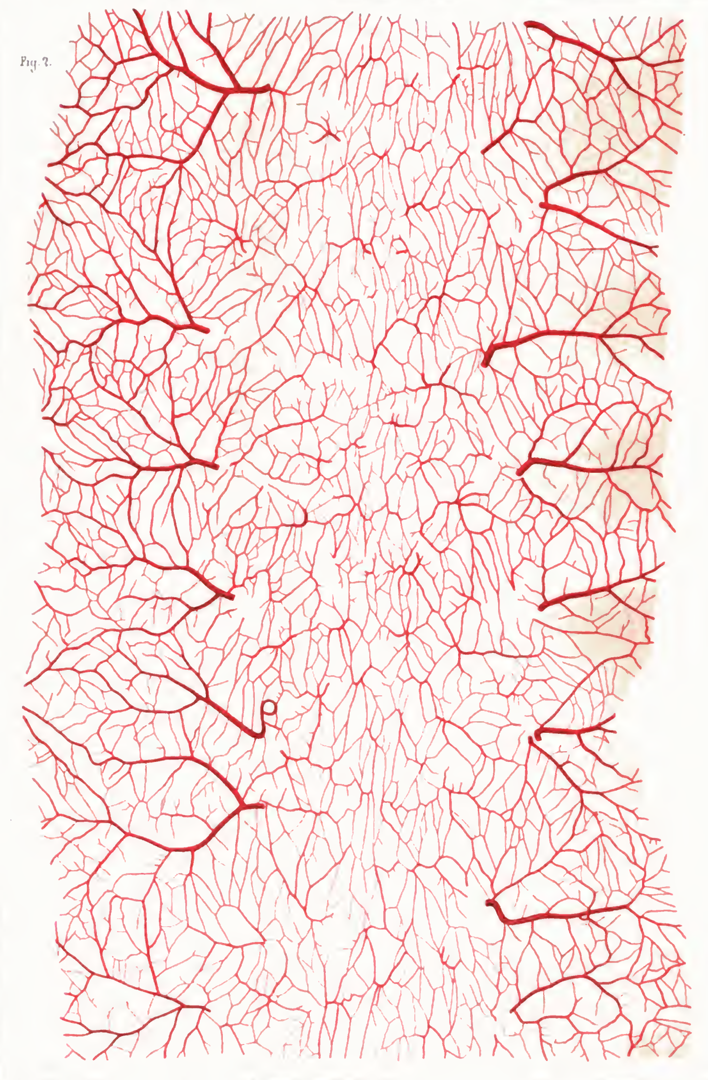
His, Zeitschr. f. wiss. Zoologie. Bd. 11. 1862.
His, Zeitschr. f. wiss. Zoologie. 1863.
Kölliker, Gewebelehre. 1867.
Krause, Müller's Archiv. 1837.
Lacauchie, Comptes Rendus. 1843.
Levschin, Wiener Sitzungsberichte. Band 61.
Lieberkühn, De fabrica et actione villorum. 1745.
Lipsky, Wiener Sitzungsberichte. Bd. 55.
Moleschott, Unters. zur Naturlehre. Bd. 6. 1860.
Nuhn, Unters. u. Beobacht. a. d. Gebiete d. Anat. 1849.
Recklinghausen, Die Lymphgefässe u. s. w. 1862.
Rindfleisch, Virchow's Archiv. Bd. 22.
Rudolphi, Abhandlung, Berlin. 1802.
Schäfer, Internat. Monatsschr. f. Anat. u. Hist. Bd. 2. 1885.
J. Graf Spee, His u. Braune, Archiv. 1885.
Thannhofer, Pflüger's Archiv. Bd. 8. 1874.
Teichmann, Das Saugadersystem. 1861.
Todt and Bowman, Phys. Anat. and Phys. of man. 1856.
Verson, Stricker's Handbuch d. Histologie. I. Bd. 1871.
Watney, Phil. Trans. of the Royal Society. Vol. 166. Part. 2. 1876.
E. H. Weber, Müller's Archiv. 1847.
Zawarykin, Mémoires de l'Académie d. St. Pétersbourg. 1869.
Zenker, Zeitschr. f. wiss. Zoologie. 1855.

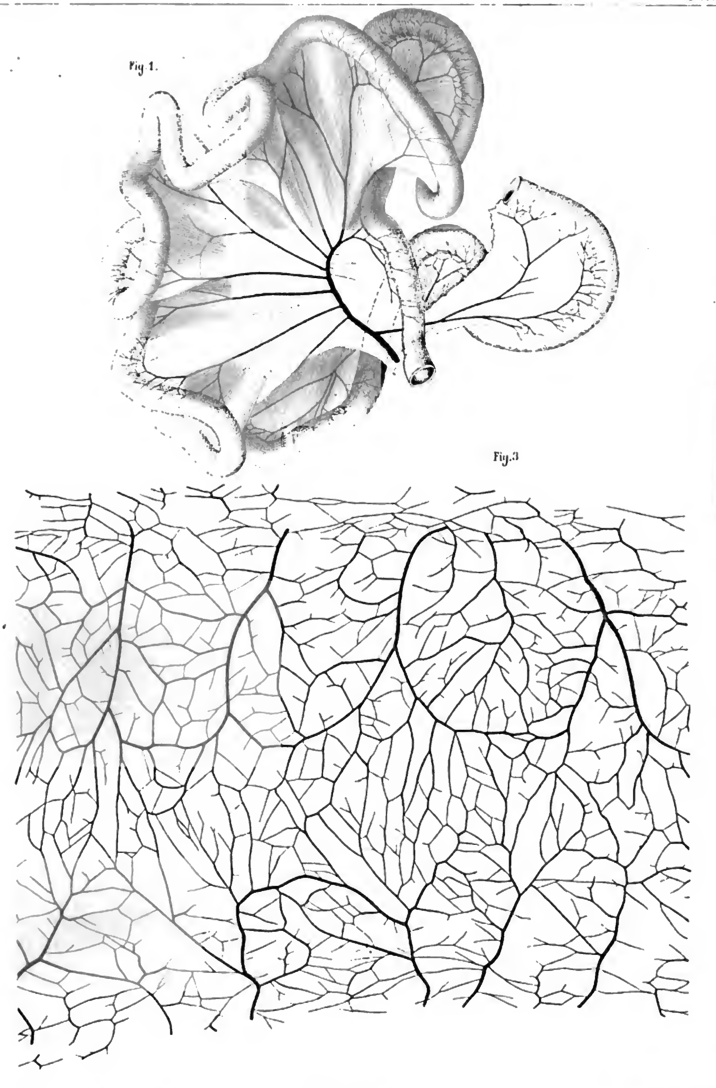
Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Verlauf der a. mesaraica im Mesenterium.

Fig. 2 u. 3. Arterielle Netze auf der Tunica submucosa. — Die Darmwand ist in Fig. 3 im Bereiche in Fig. 2 gegenüber dem Mesenterialansatz aufgeschnitten, um einerseits das Gebiet der kurzen und rückläufigen, anderseits das der langen Arterien unversehrt darzulegen.


Fig. 2.


Fig. 1.
Fig. 3

Tafel II.

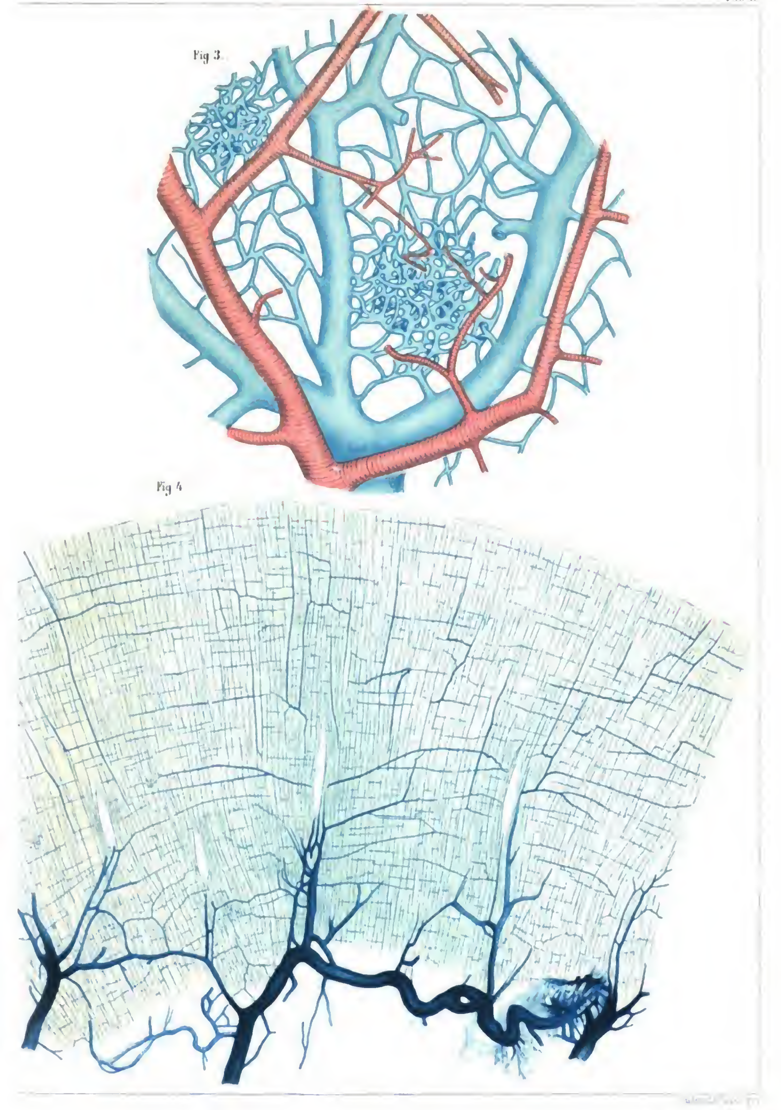
Fig. 1. Muskelring um eine Vene, die aus der Schleimhaut hervorkommend die Muscularis mucosae durchsetzt.

Fig. 2. Venöse Netze auf der tunica submucosa. Das Netz wurde an manchen Orten weniger dicht als es in Wirklichkeit ist wiedergegeben, um den Reichthum an Venenbällchen, von denen einige mit V. b. bezeichnet sind, deutlich hervortreten zu lassen. Das Gebiet der kurzen Venen setzt sich deutlich gegen das der langen ab.

Fig. 3. Ein Venenbällchen bei hoher Vergrösserung.

Fig. 4. Verlauf der Venen in der Zwischenmuskel-Schicht. Durch die Spalten — engere und weitere — dringen aus der Tunica submucosa Venen hervor.


Fig 1
Fig 2

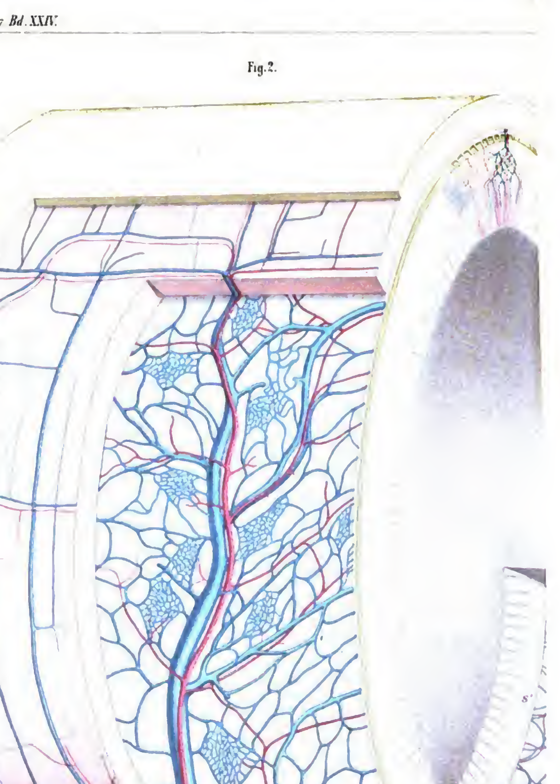

Fig 3.
Fig 4

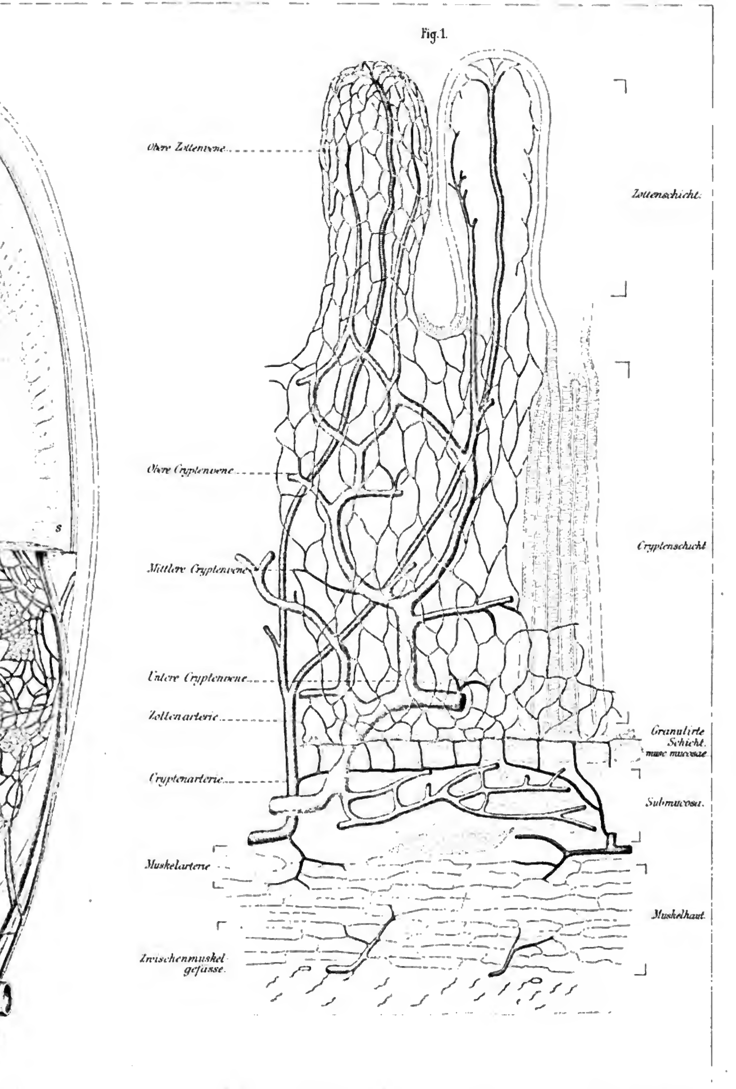
Tafel III.

Fig. 1. Uebersichtliche Darstellung der aus und in HELLER's Plexus gehenden Zweige. Arterien roth — Capillaren farblos, schwarz umgrenzt — Venen blau. Nähere Bezeichnungen an der Figur.

Fig. 2. Uebersichtliche Darstellung des Gefässverlaufs am ganzen Darm. Mit Ausnahme der Venenbällchen möglichst streng den wirklichen Verhältnissen am stark ausgedehnten Darm nachgebildet. — Die Mucosa ist weiss, die Muscularis mucosae ist dunkelgelb, die Tunica submucosa ist grau, die Kreismusculatur ist rosa, die Längsmusculatur hellgelb gefärbt — Arterien Zinnober, Venen Berlinerblau. Auf dem von innen her durch den Ausschnitt aus der Schleimhaut S S' S'' sichtbaren Theil der Tunica submucosa ist der Verlauf der kurzen Gefässe sichtbar. Auf der durch den Ausschnitt in der Muskelhaut sichtbaren Fläche der Tunica submucosa ist der Verlauf der langen und rückläufigen Gefässe eingetragen. — Abweichend vom wahren Sachverhalt ist auf dieser Fläche der grösseren Deutlichkeit wegen die Arterie nach aussen von der Vene eingezeichnet.

Fig. 2.



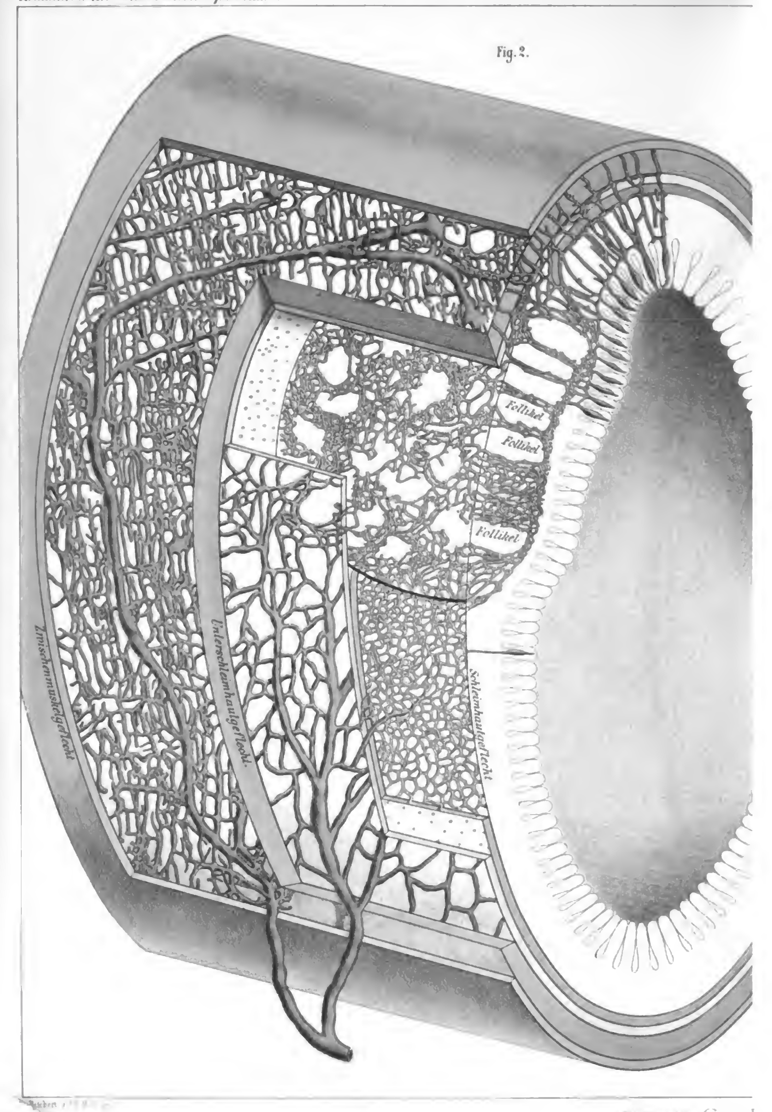

Fig. 1.
Obere Zottenvene
Obere Cryptenvene
Mittlere Cryptenvene
Untere Cryptenvene
Zottenarterie
Cryptenarterie
Muskelarterie
Zwischenmuskelgefässe.
Zottenschicht.
Cryptenschicht
Granulirte Schicht.
musc mucosae
Submucosa.
Muskelhaut.
s

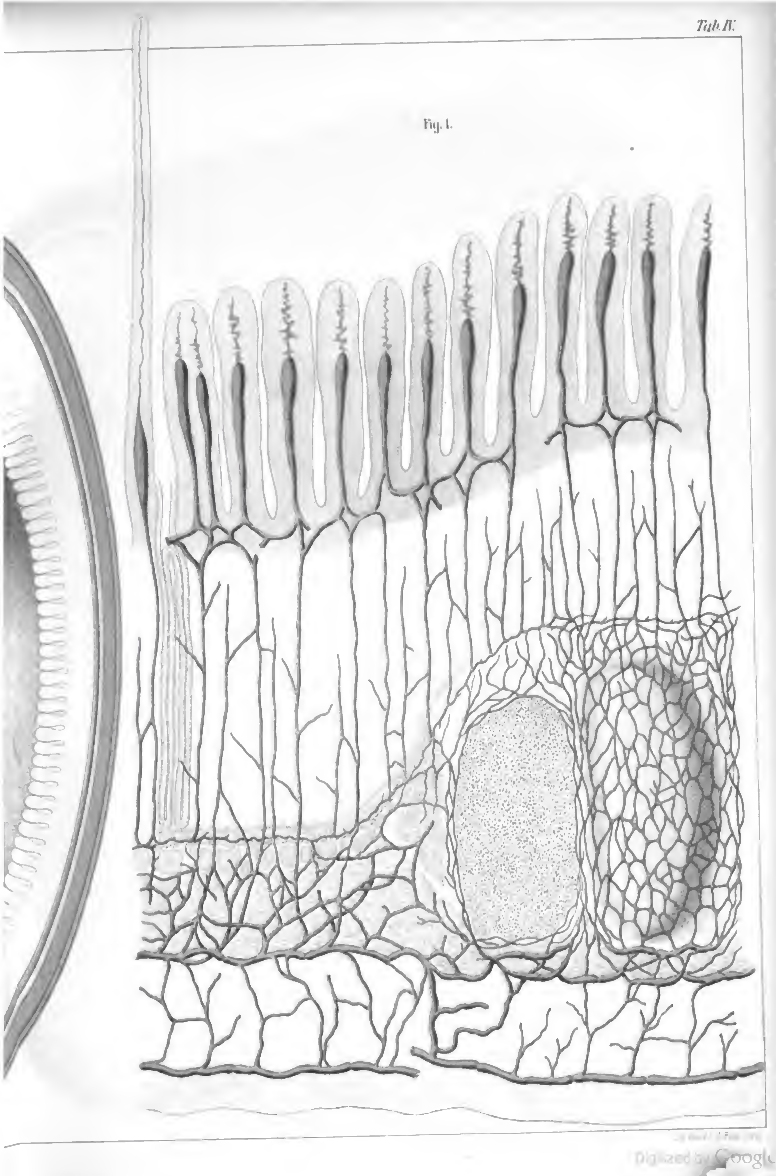
Tafel IV.

Fig. 1. Uebersichtlich dargestellter Verlauf der Lymphgefässe in der Schleimhaut. — Neben einer durch 10 proc. *Na Cl*-Lösung ausgestreckten Zotte mehrfache verkürzte mit der centralen Höhle und der spiraligen Spitzenröhre. — Die aus dem Unterzottengeflecht geradlinig absteigenden Gefässe bilden am Grunde der Crypten das Schleimhautgeflecht, und ziehen von da entweder über die Follikelhaufen oder unmittelbar in die Tunica submucosa. — Die Tunica muscularis hört vor den Follikeln auf.

Fig. 2. Uebersicht der Lymphgefässe in der Darmwand. Auf den Durchschnitten ist die Schleimhaut weiss, Muscularis mucosa blau, Tunica submucosa rosa, Muscularis circularis gelbroth, Muscularis longitudinalis gelb gefärbt. — Zu beachten die Geflechtbildung bei An- oder Abwesenheit der Lymphfollikel.




Fig. 2.
Follikel
Follikel
Follikel
Zwischenmuskelgeflecht
Unterschleimhautgeflecht
Schleimhautgeflecht


Fig. 1.

Tafel V.

Fig. 1. Die spiralige Spitzenröhre mit ihren feinen Ausläufern. Hohe Vergrösserung, Injection mit Berlinerblau. — Das Epithel ist abgezogen.

Fig. 2. Durchschnitt durch eine Zotte. — In chromsaurem Kali gehärtet, mit Haematoxylin gefärbt. Das Epithel entfernt. — Am Rand der Zotte liegen Spindelzellen *l, l* — die weissen Kreise wie z. B. *c, c* sind durchschnittene Capillaren, die sämmtlichen tiefer bläulich gefärbten Flächen gleich *m* sind durchschnittene Muskelbündel. — Stärkere Bündel umgeben den Centralkanal — die weisse Spalte im Mittelpunkt der Figur —, andere umkreisen die Durchschnitte der Zottenarterie und einer Vene, noch andere liegen den Capillaren nahe.

Fig. 3 u. 4. Abschnitte des Zottenmantels, welcher sich nach längerer Einwirkung einer 10procentigen *Na Cl*-Lösung abheben lässt, bei verschiedener Vergrösserung. Zu unterscheiden sind die Netze der Capillaren mit den blauen Kernen der Wand, die Spindelzellen, deren grosse Achse senkrecht zur Zottenlänge läuft, und die Muskelbündel, welche in der Zotte emporsteigen.

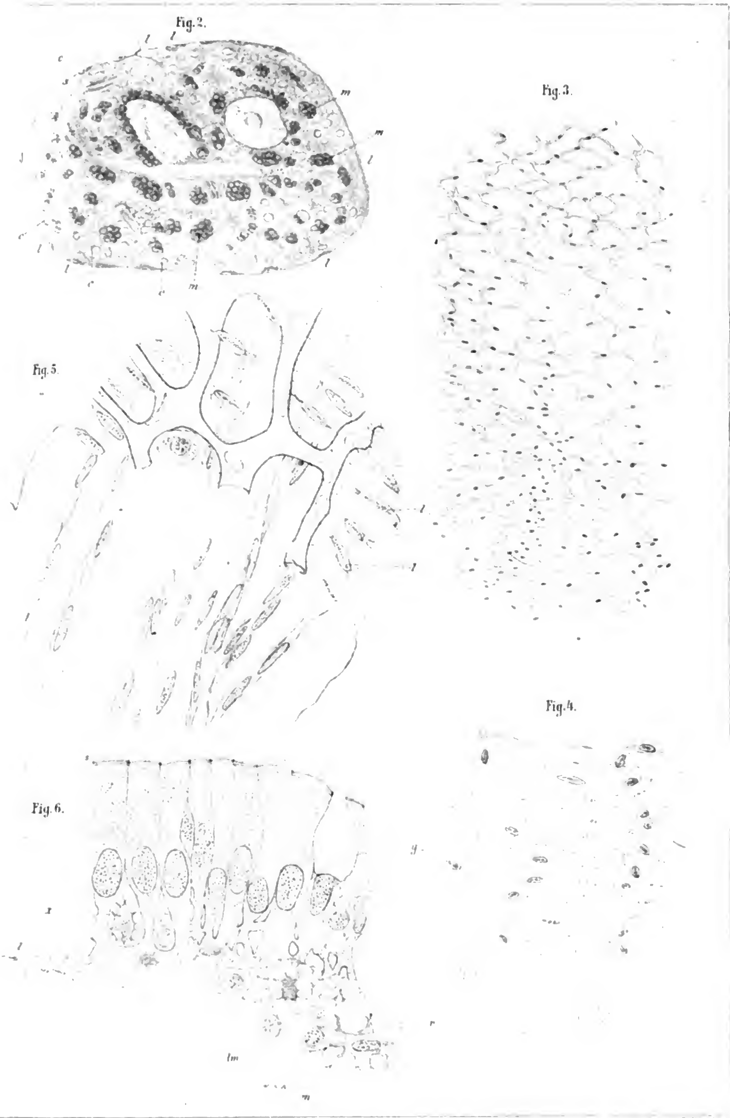
Fig. 5 u. 6. Verhältniss der Spindelzellen zum Reticulum. In Fig. 5 erscheinen die Spindelzellen *l* in der Flächen-, in Fig. 6 in der Seitenansicht.

Fig. 6 giebt ausser dem Uebergang der Ausläufer von Spindelzellen *l* in die Fäden des Reticulum noch die Darstellung von isolirten Muskelzellen *m*, von Reticulumzellen *r*, von Leukocyten innerhalb des Reticulum *l m* und zwischen den Epithelien *x*. Beachtenswerth sind die zackigen Fortsätze, welche unterhalb des Kerns aus den Epithelialzellen hervorkommen.

Fig. 7. Querschnitt durch eine Zotte, die von den Lymphgefässen aus mit Berlinerblau injicirt wurde. Aus dem Centralkanal haben sich feine Ströme zwischen die Leukocyten zu dem Epithelium und von da aus zwischen die Zellen des letzteren bis zur freien Oberfläche ergossen. *a* Epithelialzellen im Querschnitt von blauen Punkten durchsetzt, *b* Epithelialzellen im Längsschnitt von blauen Streifen umsäumt.

Fig. 8. Querschnitt durch die Zotte eines in Fettverdauung begriffenen Darmes.


Fig. 1.
Fig. 8.
Fig. 7
a
b
b


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.

Tafel VI.

Fig. 1. Elastische Haut über der Muscularis mucosae mit zahlreichen Oeffnungen, durch welche die Blutgefässe aus der Tunica submucosa in die Schleimhaut übergehen.

Fig. 2. Elastische Grundlage der Membrana granulosa. Auf dem grössten Theil des Präparates waren die Zellen der Granulosa weggepinselt, an einem kleinern, dem tiefrothen, erhalten. In den Maschen des elastischen Netzes liegen Zellen, welche grösser sind als die der granulirten Schicht.

Fig. 3. Aufsicht auf die von der Membrana granulosa gebildeten Nischen zur Aufnahme des blinden Endes der Crypten.

Fig. 4 u. 5. Längenschnitte durch die blinden Enden der Crypten aus einer Schleimhaut, die anhaltend in 10procentiger *NaCl*-Lösung gelegen hatte und dann mit künstlichem Magensaft digerirt war. *a* elastische Hülle der Crypten, *b* Tunica granulosa, *c* elastische Unterlage derselben und Reste der Muscularis mucosae.

Fig. 6 u. 7. Flachschnitte durch die Schleimhaut nahe der freien Cryptenmündung. Behandlung des Präparats mit 10proc. *NaCl*-Lösung und nachträglich mit künstlichem Magensaft, oder mit 2proc. Natronlauge. — *b* Gerüst der Crypten, *a* elastische Fasern, die sich mit feinen Fäden in das Gerüst *b* fortsetzen und mit starken Fäden eine grössere Zahl von Crypten umgreifen. *c* Inseln, auf welchen die Gefässe und Muskeln aus tieferen Schleimhautschichten zu den Zotten aufsteigen.

Fig. 8. Aufsicht auf den Stäbchensaum einer Epithelialzelle.

Fig. 9. Stäbchensaum in der Seitenansicht; den einzelnen in Gliedern des Saums ist eine geringere Schwellung kurz oberhalb ihrer Einpflanzung in das Protoplasma zugewiesen, siehe Seite 86 der Abhandlung.

Fig. 10. Aufsicht auf das Epithelium eines in Fettverdauung begriffenen Darmes. Die schwarzen Punkte an den Orten, wo 3 Zellen aneinander grenzen, sind die mit Fett erfüllten Canälchen zwischen den Epithelialzellen.

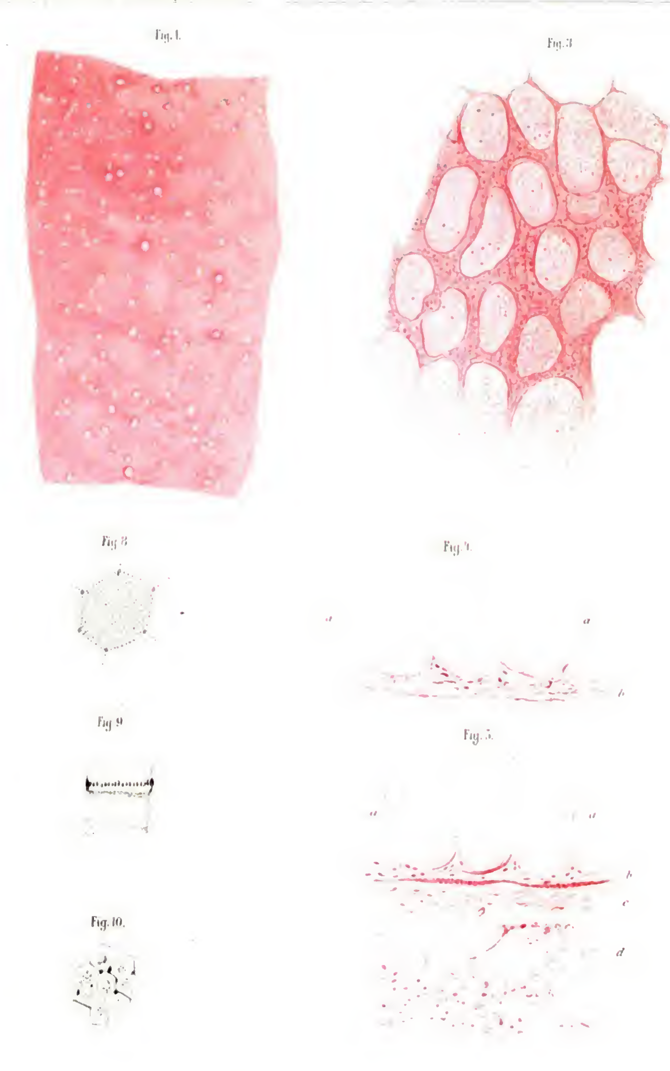

Fig. 1.
Fig. 3
Fig. 8
Fig. 4.
a
a
b
Fig. 9
Fig. 5.
a
a
b
c
d
Fig. 10.

Fig. 5

Fig. 6. Fig. 7.



DAS GESETZ

DER

BEWEGUNGEN IN DEN GELENKEN

AN DER BASIS DER MITTLEREN FINGER

UND

IM HANDGELENK DES MENSCHEN

VON

W. BRAUNE,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

UND

O. FISCHER.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° IV.

MIT ZWEI HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Vom Verfasser übergeben den 1. August 1887.
Der Abdruck vollendet den 12. August 1887.

DAS GESETZ

DER

BEWEGUNGEN IN DEN GELENKEN

AN DER BASIS DER MITTLEREN FINGER

UND

IM HANDGELENK DES MENSCHEN

VON

WILH. BRAUNE UND **O. FISCHER.**

Als wir im Anschlusse an unsere Arbeit über das menschliche Handgelenk untersuchten, in wie weit von der Möglichkeit der Bewegungen, wie sie der Gelenkmechanismus an sich bietet, im *Leben Gebrauch gemacht wird*, zeigte sich bei *den Bewegungen in den Metacarpo-Phalangalgelenken des 2., 3. und 4. Fingers* (die am Rande der Hand gelegenen Finger, Daumen und 5. Finger, wurden noch nicht in den Bereich der Untersuchung gezogen) eine Beschränkung der Bewegungen, die in dem Mechanismus des Gelenkes selbst nicht gegeben war, und eine Gleichheit der Bewegungsart mit der der Hand in den Carpalgelenken.

Die kuglige Form des Metacarpo-Phalangalgelenkes, die sich durch eine Reihe von Gelenkschnitten feststellen liess, würde an sich der Grundphalange dieselbe Beweglichkeit gestatten, wie das Hüftgelenk dem Femur. Man würde eine Beweglichkeit von 3 Graden der Freiheit haben. Man würde nämlich nicht nur einen beliebigen Punkt der Grundphalange innerhalb der durch die Dimensionen der Knochen und Gelenkflächen gesetzten Grenzen an jede Stelle seiner zugehörigen Kugelfläche bringen können, was 2 Grade der Freiheit bedingt, sondern man würde auch bei Festlegen des Knochenpunktes an einer Stelle seiner Kugelfläche den Knochen noch um eine Achse rotiren können, die durch den Knochenpunkt und den Mittelpunkt der Kugel geht, wie dies beim Femur und Humerus in der That möglich ist, und damit den 3. Grad der Freiheit gewinnen.

Es zeigte sich aber, dass dieser 3. Grad der Freiheit für die betreffenden Metacarpo-Phalangalgelenke fehlte. Der Versuch, der dies ergab, wurde in folgender Weise angestellt. An dem in den Interphalangalgelenken festgestellten ausgestreckten Finger wurde ein 5 mm breiter, 150 mm langer Spiegelstreifen senkrecht zur Längsachse des Fingers befestigt und der reflectirte Streifen des Sonnenlichtes

auf eine grosse, mit weissem Papier bespannte Tafel geworfen. Wenn nun in irgend einer bestimmten Lage der Finger durch seine eigenen Muskeln festgehalten wurde, so ergab sich, dass der Lichtstreifen nicht mehr gedreht werden konnte und ferner, dass derselbe jedesmal, wenn der Finger erst in andere Lagen gebracht und endlich wieder in seine frühere Stellung zurückgeführt wurde, genau mit dem früheren Bilde zusammenfiel.

Diese Beobachtung forderte auf, die Erscheinung genauer zu untersuchen und die Untersuchung zugleich auf das Carpalgelenk auszudehnen, da nach unseren früheren Befunden etwas Aehnliches auch hier sich erwarten liess.

In der Literatur, wenigstens in den Hauptwerken und Handbüchern, die doch den Stand des jetzigen anatomischen Wissens wiedergeben, ist wenig über die kinematischen Verhältnisse dieser Gelenke zu finden. Fast überall wird angegeben, dass das Metacarpo-Phalangalgelenk des 2., 3., 4. Fingers ein Kugelgelenk, freies Gelenk, eine Arthrodie sei. Darüber aber, ob in diesem Gelenke active oder passive Rotationsbewegungen um die Längsachse der Grundphalange, Rollungen, möglich sind, fehlen bestimmte Angaben. Es könnte sein, dass vielleicht eine oder die andere Specialuntersuchung von uns übersehen worden ist. Es lag aber von vornherein gar nicht in unserer Absicht, einen vollständigen historischen Bericht zu geben, sondern es sollte aus der Literatur nur der Nachweis geliefert werden, dass die vorgenommene Untersuchung nach dem jetzigen Stand des anatomischen Wissens berechtigt ist.

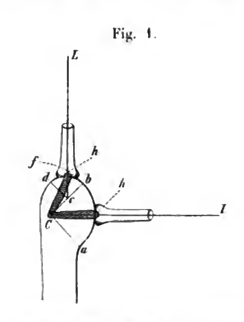
Nach Bichat (Traité d'Anatomie descriptive. Paris 1801. T. I. p. 353) finden sich in den betreffenden Gelenken nur Bewegungen der Flexion, Extension, Adduction und Abduction.

Cruveilhier (Cours d'Études anatomiques. Paris 1830. T. I. 2. p. 957) rangirt das Gelenk unter die articulations condyliennes und schreibt ihm nur die Bewegungen der Flexion, Extension, Adduction und Abduction zu, genau so wie Bichat.

E. H. Weber (Hildebrandt's Anatomie II. Bd. 1833. p. 260) nennt das Gelenk ein freies, eine Arthrodia, so dass es nach allen Gegenden hin bewegt werden kann, spricht aber auch nur von Flexion, Extension, Adduction, Abduction und gibt nichts darüber an, ob auch Rotation um die Längsachse ausführbar sei oder nicht.

Diese Frage nach der Rotation um die Längsachse des bewegten Knochens scheint zuerst HERMANN MEYER schärfer ins Auge gefasst zu haben; er schreibt (Lehrbuch der Anatomie, Leipzig 1873. p. 48): »Die gemischte Gelenkfläche ist eine Combination der Cylinderfläche mit einer Kugelfläche in der Art, dass die letztere sich unmittelbar an die erstere anreiht. Die entsprechende Hohlfläche ist ein kleiner Theil einer hohlkugligen Fläche (also eine cavitas glenoides); wenn diese auf der Cylinderfläche steht, sind nur Ginglymusbewegungen möglich. Steht sie dagegen auf der Kugelfläche, so sind die Arthrodiebewegungen möglich; wir nennen deshalb diese Art von Gelenk Ginglymo-Arthrodie. In demselben geschehen die Bewegungen im Sinne des Ginglymus um die Achse der Cylinderfläche, die Arthrodiebewegungen dagegen um den Mittelpunkt der Kugelfläche, welche einen kürzeren Halbmesser hat, als der Cylinder. Zu dieser Art von Gelenken gehören Seitenbänder (ligamenta lateralia), welche während der Ginglymusbewegung gespannt, während der Arthrodiebewegungen dagegen schlaff sind. — Gelenke dieser Art sind z. B. die Metacarpo - Phalangalgelenke der Hand.«

Fig. 1.



Schema der Ginglymo-Arthrodie.

C Mittelpunkt (Seitenansicht der Drehachse) der Ginglymusfläche *ab*, *c* Mittelpunkt der Arthrodiefläche *bd*, *bf* fortgesetzte Peripherielinie der Ginglymusfläche, durch welche es deutlich wird, dass das Lateralband *Ch* in der Stellung *l* des bewegten Knochens gespannt, in der Stellung *L* desselben aber schlaff sein muss.

In dem Schema für diese neue Art von Gelenkform, welches MEYER auf S. 49 abbildet, und das hier in Copie wiedergegeben ist, macht MEYER Angaben über die Form des Gelenkkopfes, die mit unseren Messungen nicht übereinstimmen; denn, wie schon oben angegeben wurde, fanden wir an einer Reihe von Durchschnitten durch die Metacarpusköpfchen, dass es sich, soweit die Gelenkfläche in Frage kommt, hier um eine Kugelfläche handelt. Ferner würde aus den MEYER'schen Angaben eine Incongruenz der

Gelenkflächen resultiren. Denn die Pfanne der Grundphalange kann nicht zugleich auf eine Cylinderfläche und eine Kugelfläche passen, zumal wenn noch die Angabe dazu kommt, dass beide verschieden grosse Radien haben. Auch ist es bemerkenswerth, dass Meyer in seinem Hauptwerke über die Gelenke, welches im gleichen Jahre erschienen ist, auf das wir auch später nochmals zurückkommen müssen, gar nicht den Ausdruck Ginglymo-Arthrodie gebraucht, als er auf das Metacarpo-Phalangalgelenk zu reden kommt (vgl. Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes, 1873).

Trotzdem aber scheint der Name sich einbürgern zu wollen, wenn gleich die Bezeichnung Ginglymo-Arthrodie an sich schon einen inneren Widerspruch enthält. Es wird für Manche wohl durch diesen Namen der Unbequemlichkeit aus dem Wege gegangen, mit einer Gelenkform operiren zu müssen, die nur einen Theil von den Bewegungen zeigt, die man sonst gewohnt ist, aus ihr abzuleiten.

Luschka (Anatomie der Glieder, Tübingen 1865. p. 144), der sonst so peinlich genau ist, acceptirt diesen Ausdruck Ginglymo-Arthrodie. Er sagt wörtlich Folgendes: »Mit den Köpfchen der Mittelhandknochen erzeugen die Grundphalangen der Finger Gelenke, welche sowohl hinsichtlich des Baues, als auch der Function eine derartige Mischung von Charnier und Arthrodie bilden, dass es in gewissem Sinne schon zulässig ist, sie mit H. Meyer als Ginglymo-Arthrodieen zu bezeichnen. Obwohl die Beschaffenheit der Contactflächen die Möglichkeit einer allseitigen Bewegung involvirt, so bleibt doch factisch der starken Seitenbänder wegen [? ?] die Drehung um eine in der Richtung der Fingerlänge verlaufende Achse so gut wie ausgeschlossen, so dass also nur Beugung und Streckung um eine quer, ferner Ab- und Adduction um eine sagittal durch das Capitulum gehende Achse, sowie Kugelbewegungen als Combination aller übrigen Excurse erreichbar sind.«

Nach Hirtl (Anatomie des Menschen. Wien 1875. p. 339) ist die Articulatio metacarpo-phalangea für Zeige-, Mittel-, Ring- und Ohrfinger eine Arthrodie, welche Beugung und Streckung, Zu- und Abziehung, aber keine Achsendrehung des Fingers erlaube.

Nach Krause (Anatomie. Hannover 1879. Bd. II. p. 111 u. f.) repräsentiren die Köpfchen der Metacarpalknochen annähernd Halb-



kugeln, und die Configuration ist also im Allgemeinen einer Arthrodie entsprechend; jedoch ist Adduction und Abduction der Finger nur in der Strecklage und auch in dieser keine Drehung um die Längsachse möglich.

Langer (Anatomie. Wien 1882. p. 78) schreibt: »Der Form der Capitula entsprechend waren in diesen Gelenken Ginglymus-Bewegungen gemacht, mit grösserer Palmarflexion, aber nur geringer Dorsalflexion; ist aber die Phalange in die Strecklage gebracht, so lassen sich auch Lateralbewegungen ausführen.« Von einer Rotation um die Längsachse erwähnt er nichts.

In der Anatomie von Henle (Bänderlehre, 1872. p. 107 u. f.) findet sich neben der genauen und ausführlichen Beschreibung der Bänder nur wenig über die Gelenkbewegungen angegeben. Nach Henle tragen die Köpfchen der Metacarpalknochen kuglige Gelenkflächen von 9 mm Radius. »Die accessorischen Seitenbänder werden durch die Bewegung der Finger gespannt und widersetzen sich alsdann der Rotation der Grundphalange um ihre Längsachse.«

[Eine Rotation wäre also sonst möglich?]

Cruveilhier Fils (Anatomie descriptive. Paris 1877. T. I. p. 385) schreibt dem Gelenke vier Bewegungen zu, von denen zwei limitirt sind; er sagt: »d'après la disposition des surfaces articulaires, il est évident, que celle articulation doit exécuter des mouvements dans les quatre sens principaux et, conséquemment, des mouvements de circumduction.«

Allen Thomson (Quain's Anatomy Vol. I. London 1882. p. 163) findet bei den betreffenden Gelenken keine Rotation, während Reeves (Human Morphology. London 1882. Vol. I. p. 295) ausdrücklich diesen Gelenken Flexion, Extension, Abduction, Adduction, Rotation und Circumduction zuerkennt.

Am Eingehendsten ist das Gelenk in den Specialwerken von Meyer und Henke behandelt worden, die unter dem Titel Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes, Leipzig 1873, und Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig 1863, bekannt sind.

Meyer behandelt in seiner Statik und Mechanik das Metacarpo-Phalangalgelenk viel eingehender, als in seiner Anatomie, macht aber

auffallenderweise keinen Gebrauch von dem durch ihn eingeführten Namen der Ginglymo-Arthrodie.

Er gibt l. c. p. 179 Folgendes an: »Gegen den Mittelhandknochen hat der Finger ein volares Bewegungsvermögen von ungefähr 90°. In der Streckstellung ist die Articulation zwischen der Grundphalanx und dem Capitulum des Metacarpusknochens ein freies Gelenk, in welchem übrigens die Rotation nicht in deutlich erkennbarer Weise in die Erscheinung tritt. In der Beugestellung ist dagegen die Grundphalanx unbeweglich festgestellt durch die straffe Spannung der Lateralbänder. Beim Uebergang in die Beugestellung nehmen die möglichen seitlichen Bewegungen allmählich ab, die flexorischen bleiben zuletzt noch allein übrig, und es erfolgt dann Feststellung.«

HENKE (l. c. p. 189) bemerkt Folgendes:

»Alle Fingerglieder passen mit einer Pfanne ihrer Basis auf Gelenkköpfe der Mittelhandknochen oder der denselben näher gelegenen Glieder, welche alle von hinten nach vorn gebogen sind, auf denen sie also um quere Achsen sich drehen, beugen und strecken können. Zwischen den einzelnen Fingergliedern findet keine andere Bewegung statt. Der ganze Finger aber hat gegen die Mittelhand noch geringe andere Verschiebungen. Die Gelenkköpfe der Mittelhandknochen haben ausser der convexen Biegung in der Richtung von hinten nach vorn eine so gut wie vollkommen ebenso starke in der queren Richtung, können also als Stücke von Kugeln betrachtet werden und unterscheiden sich von den kugligen Gelenkköpfen der grossen Arthrodieen nur dadurch, dass das Stück einer Kugeloberfläche, welches sie darstellen, ein länglicher Streifen derselben ist, mit dem grössten Durchmesser von hinten nach vorn, mit dem kleineren in der queren Richtung, so dass die Pfanne, an welcher dieser Unterschied nicht besteht, in der Richtung von hinten nach vorn sehr weit, in querer Richtung dagegen nur wenig über ihn hingleiten kann, ohne den Rand des Kopfes zu erreichen, oder zu überschreiten, so dass schon dadurch die Beugung und Streckung auch hier überwiegend wird. Ausgeschlossen wäre aber durch die Form der Gelenkköpfe keine Art von Drehung um den Mittelpunkt ihrer Krümmung. Nur am vorderen Ende treten zuweilen an den Seitenrändern der Rolle, die hier überhaupt

etwas breiter wird, vorspringende Streifen hervor, die nur von hinten zu vorn gebogen sind, an denen demnach die Pfanne, wenn sie durch Beugung hierhin gekommen ist, nur noch diese einfache Bewegung fortsetzen, aber nicht mehr seitwärts verschoben werden kann.«

Ferner auf p. 191 u. ff.:

»Man könnte zwei Arten Drehung um den Mittelpunkt der Kugel, von welcher der Gelenkkopf ein Streifen ist, annehmen, die ausser der um die quere Achse noch möglich sein müssten, wenn es die Bänder nicht verhinderten, die auch wirklich beide vollkommen rein ausführbar sind, wenn man die Seitenbänder getrennt hat, Drehung um eine der Länge der Finger entlang gerichtete Achse, Rotation, und Drehung um eine von hinten nach vorn gerichtete, Ab- und Adduction. Erstere ist auch bei der Erschlaffung der Seitenbänder in der Streckung so gut wie ganz unmöglich, letztere fast rein und frei ausführbar, jedoch mit einem kleinen Antheil ersterer dabei.«

Aus den Berichten von MEYER und HENKE geht hervor, dass beide Forscher in den Gelenkformen an sich kein Hinderniss für die Rotation um die Längsachse erblicken, die weiterhin von uns ein für alle Mal als Rollung bezeichnet werden soll, um jedem Missverständniss zu begegnen. Darin aber, in wie weit Rollungen an den betreffenden Gelenken wirklich auftreten, scheinen sie zu differiren, oder darüber drücken sie sich wenigstens nicht klar genug aus. Zum Mindesten ist nicht ersichtlich, ob sie Messungen der Rollungen vorgenommen haben und ob sie diese Messungen am todten Gelenk oder an den Bewegungen der lebendigen Hand, wie sie solche selbst ausführt, ohne äussere Gewalt anstellten. Der Satz von MEYER, dass die Rollung in die Erscheinung trete, aber nicht in deutlich erkennbarer Weise, ist nicht recht verständlich und fordert wenigstens zu erneuter Untersuchung des Gegenstandes auf.

Da es sich gleich beim Beginne der Untersuchung zeigte, dass an diesen Gelenken, ebenso wie am Carpalgelenk, die Bewegungsversuche an der todten Hand andere Erscheinungen boten als an der lebenden, so erschien es angezeigt, die lebendige Hand zum Gegenstand der Untersuchungen zu wählen. Die Untersuchungen an der todten Hand geben nur Aufschluss über die Möglich-

keiten der Bewegung im Gelenk, nicht aber darüber, in wie weit von diesen Möglichkeiten im Leben Gebrauch gemacht wird.

Es zeigt sich, dass an der unverletzten todten Hand, also selbst bei Erhaltung der Seitenbänder, bei gewissen Stellungen Rollungen (Rotationen um die Längsachse) im Metacarpo-Phalangalgelenk ausführbar sind, wie sie in gleicher Grösse am Lebenden niemals zur Erscheinung kommen. Daraus schon kann man schliessen, dass die Ursache dieser Beschränkung nicht allein in Bandapparaten und Gelenkformen liegen kann, wie Henke nachzuweisen versucht. Wenn sich aber nun ferner auch am Lebenden noch zeigt, dass die Bewegungen der Grundphalangen andere sind, wenn sie durch äussere Gewalt erzeugt werden, als die, welche die eigenen Muskeln zu Stande bringen, so ist daraus ersichtlich, dass der eigenen Muskelwirkung ein Hauptantheil für diese Beschränkung zuzuschreiben ist.

Es lässt sich leicht constatiren, dass an den Fingern in der Strecklage des Metacarpo-Phalangalgelenkes durch äusseren Eingriff, z. B. durch Angriff der anderen Hand, Rollungen der Grundphalange ausführbar sind, die 50—70 Winkelgrade betragen können, während die eigenen Muskeln des Fingers gar keine Rollung mehr auszuführen vermögen, nachdem sie den Finger in irgend eine Stellung gebracht haben.

Der Spiegelversuch, der gleich anfangs beschrieben worden war, und der den eigentlichen Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung bildete, der auch mehrfach wiederholt wurde, hatte das Resultat ergeben, dass die Bewegungen der Finger in den Metacarpo-Phalangalgelenken gesetzmässig erfolgen. Wenn man dem Finger eine bestimmte Flexion aufzwingt, die den Finger von irgend einer Ausgangsstellung in eine Secundärstellung bringt, die aber durch die Flexionsgrösse bestimmt ist, so erfolgt dabei ein ganz bestimmter Grad der Rollung (Rotation um die Längsachse) des Fingers, die wir weder beabsichtigen noch verhindern können. Es wird dadurch der Finger für jede Stellung in ganz bestimmter Weise orientirt. Wenn also der Finger von der Lage P in die Lage Q übergeführt wird, mag man diese Bewegung so oft wiederholen als man will, so werden alle Punkte des Fingers immer dieselbe Lage

wieder einnehmen, denn wir vermögen eben nicht den in die Lage *Q* gebrachten Finger beliebig um seine Längsachse zu rotiren, zu rollen. Dies ist dieselbe Erscheinung, welche für die Bewegungen des Auges als DONDERS'sches Orientirungsgesetz bekannt ist.

Es handelte sich nun darum, für eine willkürlich gewählte, aber dann fest bestimmte Ausgangsstellung die genauen Werthe der zu irgend einer Secundärstellung gehörenden Rollungen zu messen. Dies hätte sich auch mit dem Spiegelversuch ausführen lassen, jedoch würde die Rechnung ziemlich complicirt und in Folge dessen von sich multiplicirenden Fehlern begleitet gewesen sein. Es wurde deshalb zu einer Vereinfachung der Methode geschritten. Es gelang eine solche zu finden, die allen Anforderungen genügte, für die Rechnung wesentlich einfacher als die Spiegelmethode war, und sich auch als praktisch ausführbar erwies. Die Methode ist folgende:

An dem Finger waren zunächst die Interphalangalgelenke dadurch ausgeschieden und der Finger selbst in einer steifen Streckstellung erhalten, dass eine passende Metallhülse übergesteckt wurde, die von der Spitze des Fingers bis etwa zur Mitte der Grundphalange reichte. An dieser Metallhülse war eine leichte Holznadel in der Verlängerung des Fingers angebracht, an deren Ende ein dünner, gerader Stahldraht von 16 cm Länge rechtwinklig befestigt war. Die Entfernung des Mittelpunktes vom Gelenkköpfchen des Metacarpus bis zum rechtwinkligen Ansatz des Stahldrahtes wurde genau auf 50 cm gebracht. Die Hand wurde nun durch festes Umfassen eines dazu angefertigten passenden Griffes ruhig gelegt, so dass alle Gelenke an der Handwurzel ausgeschieden blieben, was durch einen zweiten Beobachter, der die Hand fest umfasste, noch ausserdem controlirt wurde. Zugleich war auch dadurch das Radio-Ulnargelenk ausgeschieden. Nun wurde der Hand eine solche Stellung gegeben, dass die hinter dem Beobachter stehende Sonne den Schatten des Apparates auf eine mit weissem Papier bespannte Tafel warf, die rechtwinklig zu den Sonnenstrahlen eingestellt ward und eingestellt erhalten wurde, so lange der Versuch dauerte. Dies wurde dadurch ermöglicht, dass eine ganz gerade, dünne, etwa 35 cm lange Holznadel rechtwinklig in die Tafel eingefügt, und die Tafel in eine solche Stellung gebracht wurde, bei der die Nadel keinen Schatten mehr warf. Bei der kurzen Dauer der meisten einzelnen Beobachtungen war es nur selten

nöthig, die Tafel während der Beobachtung in ihrer Lage zu ändern, um sie rechtwinklig zu den Sonnenstrahlen zu erhalten.

Als Ausgangsstellung wurde die ungefähre halbe Beugung des Fingers benutzt, d. h. eine Beugestellung der Grundphalange zum Metacarpus um etwa 45°. — Die Hand wurde nun durch Stellungsänderung des Griffs an einem festen Stativ in eine solche Lage gebracht, dass bei dieser Ausgangsstellung die Längsachse des Fingers, und somit auch der Holznadel, senkrecht zur Tafel orientirt war, also in die Richtung der Sonnenstrahlen fiel, was man leicht an dem Schatten controliren konnte.

Wenn man nun den Finger durch seine eigenen Muskeln von dieser Ausgangsstellung aus bis zu einer anderen Stellung auf dem kürzesten Wege brachte, so dass die Längsachse des Fingers und die Holznadel (ihre Verlängerung) eine Ebene beschrieben, so musste diese Ebene senkrecht zur Projectionstafel stehen, und Alles, was in ihr vorging, musste sich in der durch die Sonnenstrahlen hervorgerufenen Projection, in ihrem Schatten, das ist in diesem Falle eine gerade Linie, abspielen. Die Holznadel war so mit der Hülse verbunden, dass sie sich um ihre Längsachse drehen liess, wodurch es möglich wurde, die Stahlnadel in alle möglichen Richtungen innerhalb der durch sie bestimmten Verticalebene zur Längsachse der Grundphalange zu bringen. Wenn man nun die Stahlnadel von vornherein durch Drehung der Holznadel in die Bewegungsebene, welche durch die Ausgangsstellung und Endstellung der Holznadel bestimmt wird, bringt, so wird zunächst ihre Projection in die Schnittlinie der Bewegungsebene mit der Projectionstafel fallen müssen. Ihr Schatten wird sich also mit dieser Schnittlinie decken. Solange bei dieser Bewegung keine Rollung des Fingers stattfindet, muss die Stahlnadel in der Bewegungsebene bleiben, was man am Schatten daran erkennt, dass derselbe in der Richtung der Schnittlinie bleibt. Jede Winkelbildung des Schattens der Stahlnadel mit der Schnittlinie nach rechts oder links wird eine Rollung des Fingers nach rechts oder links anzeigen, deren Grösse sich aus dem Winkel des Schattens der Stahlnadel mit der Schnittlinie berechnen lässt.

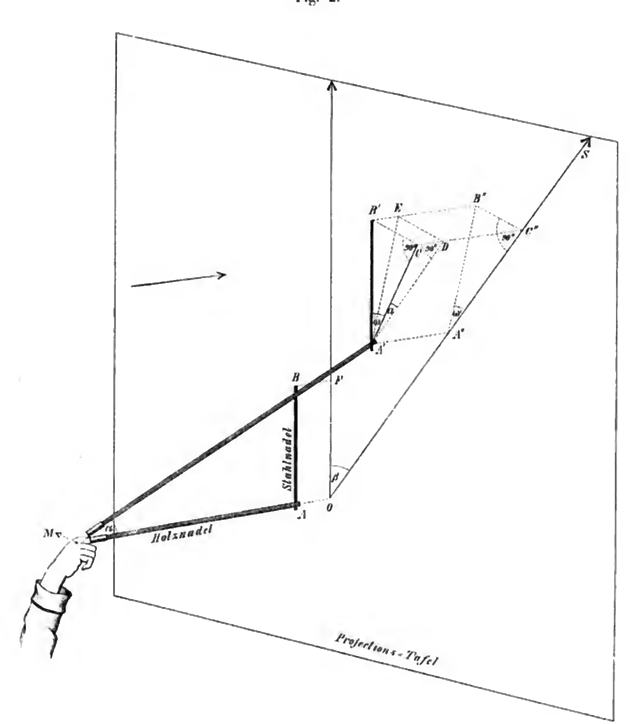
Auf der Projectionstafel hatten wir vom Durchschnittspunkt der zu ihr senkrechten Ausgangsstellung der Längsachse des Fingers aus nach 36, um 10° von einander verschiedenen Richtungen gerad-

linige Strahlen gezogen, die die Schnittlinien von den 36 zugehörigen um 10° zu einander geneigten Bewegungsebenen mit der Projectionstafel darstellen. Um die Grösse der Rollung für die verschiedenen Flexionsrichtungen und Flexionsgrössen zu messen, könnte man nun so verfahren, dass man jedes Mal durch Drehung der Holznadel um ihre Längsachse die Stahlnadel in die Ebene bringt, in welcher man die Bewegung ausführen will. Dies lässt sich daran erkennen, dass ihr Schatten zu Anfang der Bewegung in die zugehörige Schnittlinie fällt. Man hat aber gar nicht nöthig, jedes Mal diese Drehung der Holznadel vor der Bewegung auszuführen; denn, wenn die Stahlnadel in der Ausgangsstellung mit der Bewegungsebene einen Winkel β bildet, so muss, wenn keine Rollung stattfindet, dieser Winkel der Stahlnadel mit der Bewegungsebene constant bleiben. Jede Aenderung dieses Winkels zeigt eine Rollung der Grundphalange an. Je nachdem die Rollung in dem einen oder in dem anderen Sinne stattfindet, wird sich der Winkel vergrössern oder verkleinern. Wenn aus dem Winkel β der Winkel ω am Ende der Flexion geworden ist, so gibt $\beta-\omega$ die Rollung an; der absolute Werth von $\beta-\omega$ liefert die Grösse, das Vorzeichen von $\beta-\omega$ den Sinn der Rollung.

In der Ausgangsstellung der Holznadel ist die Stahlnadel parallel der Projectionstafel. In Folge dessen wird der Winkel β, den die Stahlnadel mit der beabsichtigten Bewegungsebene bildet, sich im Schatten auf der Projectionstafel unverändert einstellen als der Winkel, den der Schatten der Stahlnadel mit der Schnittlinie OS von Bewegungsebene und Projectionstafel bildet. Bei jeder anderen, nicht verticalen, Stellung der Holznadel zur Projectionsebene wird die Stahlnadel im Allgemeinen nicht parallel der Projectionsebene stehen, und in Folge dessen der Winkel ω zwischen Stahlnadel und Bewegungsebene am Ende der Flexion sich im Schatten nicht direct einstellen. Es wird der Schatten der Stahlnadel mit der Schnittlinie einen Winkel ω' bilden, der von ω verschieden ist, mit Hülfe dessen man aber den Werth von ω gewinnen kann.

In der Figur 2 auf S. 14 sei M der Mittelpunkt des feststehenden Metacarpusköpfchens des 2. Fingers, MA die Längsachse des Fingers und AB die Stahlnadel in der Anfangsstellung; dann ist $AB \parallel$ der Projectionstafel, und der Winkel β, den die Projection OF von AB mit der Schnittlinie OS, welche die Bewegungsrichtung angibt, bildet,

Fig. 2.



ist direct der Winkel zwischen der Bewegungsebene und der Stahlnadel in der Anfangsstellung. Nach der Flexion von der Grösse α in der Richtung OS sei die Längsachse des Fingers in die Lage MA' gekommen, so dass also MA' mit MA den Winkel α bildet. Die Projection von A' sei der Punkt A'', der natürlich in der Schnittlinie OS liegen muss. Die Stahlnadel hat jetzt die Lage $A'B'$ eingenommen und ist im Allgemeinen nicht mehr parallel der Projectionsebene; deshalb ist der Winkel ω', welchen ihre Projection $A''B''$ mit OS bildet, nicht gleich dem Winkel ω, den jetzt die Stahlnadel mit der Bewegungsebene einschliesst.

Zur Berechnung von ω aus ω' denke man sich in A' in der Bewegungsebene eine Senkrechte auf der Längsachse des Fingers errichtet und von B' aus auf diese Senkrechte ein Loth gefällt, welches letztere in C trifft. Die Projection von C sei C''. Der Winkel, den die Senkrechte $A'C$ mit $A'B'$ bildet, ist dann der Winkel ω, den die Stahlnadel $A'B'$ mit der Bewegungsebene einschliesst; denn die Ebene des Dreiecks $A'B'C$ steht senkrecht zur Bewegungsebene, da sie zur Normalen in A' die Strecke MA' hat und letztere in der Bewegungsebene selbst liegt. Aus diesem Grunde steht $B'C$ auch senkrecht auf der Bewegungsebene und ebenso die Ebene $B'CC''B''$, welche $B'C$ auf die Projectionstafel projicirt. Da nun die Projectionstafel ebenfalls senkrecht zur Bewegungsebene gerichtet ist, so wird auch die Projection $B''C''$ von $B'C$ senkrecht auf der Bewegungsebene stehen, also $B''C''$ parallel mit $B'C$ verlaufen.

Die Linie $A'C$ ist zur Projectionstafel um den Winkel α geneigt. Dies folgt daraus: Zieht man von A' aus in der Bewegungsebene eine Parallele zu OS, so wird dieselbe von dem Projectionsstrahl CC'' geschnitten, da sie mit CC'' in derselben Ebene, nämlich der Bewegungsebene, liegt. Der Schnittpunkt sei D. Dann ist der Winkel $CA'D$ der Neigungswinkel der Strecke $A'C$ zur Projectionstafel. Die Schenkel $A'C$ und $A'D$ dieses Winkels stehen bezüglich senkrecht auf den Strahlen MA' und MO, d. h. auf den Schenkeln des Winkels $A'MO$; folglich ist der Winkel $CA'D$ gleich dem Winkel $A'MO$, und da Winkel $A'MO$ der Flexionswinkel α ist, so ist also

$$\text{Winkel } CA'D = \text{Winkel } \alpha.$$

Ferner ist CC'' als Projectionsstrahl senkrecht auf $A''C''$; folg-



lich ist CC'' auch senkrecht auf $A'D$, weil $A'D \parallel A''C''$; das Dreieck $A'CD$ ist also ein rechtwinkliges mit dem rechten Winkel bei D.

Nun sind auch die beiden Dreieke $A'B'C$ und $A''B''C''$ rechtwinklig. Das erste hat nämlich den rechten Winkel nach Construction bei C, das letztere bei C'', da $B''C''$ senkrecht auf der Bewegungsebene steht. Nun ist aber $B'C \parallel B''C''$ und da $B'B''$ und $C''C''$ als Projectionsstrahlen auch parallel laufen, so haben wir in $B'CB''C''$ ein Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln, also ein Rechteck. Daraus folgt, dass

die Seite $B'C$ im Dreieck $A'B'C$ gleich
der Seite $B''C''$ im Dreieck $A''B''C''$

(als Gegenseiten im Rechteck) ist.

Ferner haben wir auch in $A'DC''A''$ ein Rechteck, weil $A'D \parallel A''C''$ und $A'A'' \parallel DC''$ (als Projectionsstrahlen), und die Winkel $A'A''C''$ und $DC''A''$ rechte Winkel sind, da es sich um rechtwinklige Projection handelt.

Aus diesem Grunde ist

$$A'D = A''C''.$$

Bezeichnet man nun für einen Augenblick die Länge der Stahlnadel AB, resp. $A'B'$ mit e, dann ist in rechtwinkligen Dreieck $A'B'C$:

$$B'C = e \,.\, \sin\omega \text{ und } A'C = e \,.\, \cos\omega,$$

im rechtwinkligen Dreieck $A'CD$:

$$A'D = A'C \,.\, \cos\alpha = e \,.\, \cos\omega \,.\, \cos\alpha$$

und im rechtwinkligen Dreieck $A''B''C''$,

$$\text{da } B'C = B''C'' \text{ und } A'D = A''C'':$$

$$B''C'' = e \,.\, \sin\omega \text{ und } A''C'' = e \,.\, \cos\omega \,.\, \cos\alpha\,.$$

Nun ist in demselben Dreieck

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{B''C''}{A''C''}, \text{ folglich haben wir}$$

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{e \,.\, \sin\omega}{e \,.\, \cos\omega \,.\, \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\cos\alpha},$$

da $\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \operatorname{tang}\omega$ ist und e aus Zähler und Nenner sicht forthebt. Die Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\omega' \cos\alpha.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir also in der Lage, aus dem

Winkel ω', den der Schatten der Stahlnadel in der Secundärlage mit der auf der Projectionstafel aufgezeichneten Bewegungsrichtung OS, d. h. der Schnittlinie der zur Projectionstafel senkrechten Bewegungsebene mit der Projectionstafel, bildet und aus der bekannten Flexionsgrösse α den Winkel ω zu berechnen, den am Ende der Flexion die Stahlnadel mit der Bewegungsebene einschliesst. In der Ausgangsstellung MA der Holznadel hatten wir die Stahlnadel AB in die Bewegungsebene der Dorsalflexion gebracht.

Wenn OS den Winkel β mit OF bildet, d. h. wenn die neue Bewegungsebene zur verticalen, der reinen Dorsal- und Volarflexion angehörenden Bewegungsebene um den Winkel β geneigt ist, so haben wir dann in $\beta - \omega$, wie wir früher schon sahen, direct die Grösse der Rollung des Fingers bei der Flexion in der neuen Bewegungsebene. Es drückt sich daher die Rollung, d. h. die Rotation um die Längsachse des Fingers, aus den bekannten, direct messbaren Winkeln β, ω', α in folgender Weise aus:

$$\text{Rollung} = \beta - \operatorname{arctang}\ (\operatorname{tang} \omega' \,.\, \cos \alpha).$$

Mit Hülfe dieser Formel haben wir nun nach einer Reihe von Beobachtungen, die uns für bestimmte Werthe von α und β den zugehörigen Werth von ω', oder vielmehr von tang ω' lieferten, die Rollung berechnet, welche zu der durch α und β bestimmten Stellung der Fingerlängsachse gehört.

Da wir die Ausgangsstellung senkrecht zur Projectionstafel, also parallel den Sonnenstrahlen genommen hatten, so werden die Schatten der Holznadelspitze für gleiche Werthe der Flexion α auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt O liegen. Der Radius dieses Kreises ist gleich dem Sinus α multiplicirt mit der Entfernung der Holznadelspitze vom Mittelpunkte des Gelenkes.

Da wir, wie schon erwähnt, diese Entfernung auf 50 cm normirt hatten, so ist der Radius dieses Kreises von vornherein bekannt, nämlich gleich 50 sin α cm. Wir sind also in der Lage vor Beginn des Versuchs auf der Projectionstafel die Stellen zu markiren, welche zu bestimmten Werthen von α gehören. Wir hatten vier Kreise eingezeichnet, welche bezüglich $\alpha = 5°$, $10°$, $15°$ und $20°$ entsprechen. Ferner waren in 36 verschiedenen, um je $10°$ zu einander geneigten Richtungen von O aus Strahlen OS gezogen, deren jeder zu einem bestimmten Werth von β gehört. Wir wollen β

positiv rechnen, wenn der Strahl *OS* auf der Ulnarseite von der Verticalen, also vom Beobachter aus gesehen nach rechts, und negativ, wenn *OS* auf der Radialseite von der Verticalen, also nach links verläuft. Dann war man durch die auf der Projectionstafel eingezeichneten Kreise und Strahlen in der Lage, der Längsachse des Fingers eine solche Stellung zu geben, für die α und β bekannt sind, nämlich für die α einen der Werthe 5°, 10°, 15° oder 20° und β zugleich einen der Werthe $\pm n \cdot 10°$ (wo $n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$) besitzt.

In folgender Tabelle sind die zu verschiedenen der angegebenen Werthe von α und β gehörenden Werthe von tang ω', die man auf der Tafel abmessen konnte, niedergelegt. Wir haben freilich nicht alle Werthcombinationen von α und β ausgenützt, wozu wir auch nicht in der Lage waren, da an vielen Stellen der Schatten des eigenen Körpers und des Stativs, an welchem der Griff für die Hand befestigt war, die Messung von tang ω' unmöglich machten. An solchen Stellen ist in der folgenden Tabelle für die Werthe von tang ω' das zugehörige Feld offen gelassen.

Tabelle für tang ω'.

Radialseite.

β	$\alpha = 20°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 5°$
0	0	0	0	0
−10°	—	—	−0,12	−0,14
−20°	−0,263	−0,275	−0,282	−0,275
−30°	−0,426	−0,45	−0,445	−0,45
−40°	−0,606	−0,67	−0,675	−0,68
−50°	—	−0,93	−0,895	−0,98
−60°	—	−1,19	−1,22	−1,44
−70°	—	—	−1,695	−2,18
−80°	—	—	−2,685	−3,79
−90°	—	—	—	−11,44
−100°	—	—	∞	+12,76
−110°	—	—	+5,78	+4,245
−120°	—	+2,91	+2,74	+2,435
−130°	—	—	+1,54	+1,62
−140°	—	+1,24	+1,04	+1,09
−150°	—	+0,8	+0,72	+0,724
−160°	—	—	+0,468	—
−170°	—	+0,216	+0,244	—
−180°	—	0	0	—

Ulnarseite.

β	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$
0	0	0	0	0
+10°	+0,145	—	—	+0,09
+20°	—	—	—	+0,25
+30°	—	—	—	+0,435
+40°	—	—	+0,676	+0,632
+50°	—	—	+0,89	—
+60°	—	—	+1,23	—
+70°	—	—	—	—
+80°	—	—	—	—
+90°	—	—	—	—
+100°	—	—	—	—
+110°	—	—	—	—
+120°	—	—	—	—
+130°	—	—	—	—
+140°	—	—	—	—
+150°	—	—	—	—
+160°	—	—	—	—
+170°	—	—	—	—
+180°	—	—	—	—

($\beta = 0°$ entspricht der Dorsal-Volarflexion.)



Aus vorstehender Tabelle für tang ω' gewinnt man dann ohne Weiteres die entsprechende Tabelle für tang ω mit Hülfe der Gleichung

$$\text{tang } \omega = \text{tang } \omega' \,.\, \cos \alpha .$$

Es ist

$$\cos 5^\circ = 0{,}996$$
$$\cos 10^\circ = 0{,}985$$
$$\cos 15^\circ = 0{,}966$$
$$\cos 20^\circ = 0{,}94 \,.$$

Die Multiplication mit diesen entsprechenden Factoren ergiebt folgende Werthe:

Tabelle für tang ω

(tang ω = tang ω' . cos α).

Radialseite.

β	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 5^\circ$
0	0	0	0	0
— 10°	—	—	—0,118	— 0,139
— 20°	—0,247	—0,266	—0,278	— 0,274
— 30°	—0,4	—0,435	—0,438	— 0,448
— 40°	—0,57	—0,647	—0,665	— 0,677
— 50°	—	—0,898	—0,882	— 0,976
— 60°	—	—1,1495	—1,202	— 1,43
— 70°	—	—	—1,[illegible]7	— 2,171
— 80°	—	—	—2,645	— 3,774
— 90°	—	—	—	—11,394
—100°	—	—	∞	+12,708
—110°	—	—	+5,693	+ 4,228
—120°	—	+2,811	+2,7	+ 2,425
—130°	—	—	+1,52	+ 1,613
—140°	—	+1,198	+1,02	+ 1,086
—150°	—	+0,773	+0,71	+ 0,721
—160°	—	—	+0,461	—
—170°	—	+0,209	+0,24	—
—180°	—	0	0	—

Ulnarseite.

β	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$
0	0	0	0	0
+ 10°	+0,144	—	—	+0,085
+ 20°	—	—	—	+0,235
+ 30°	—	—	—	+0,409
+ 40°	—	—	+0,653	+0,594
+ 50°	—	—	+0,86	—
+ 60°	—	—	+1,188	—
+ 70°	—	—	—	—
+ 80°	—	—	—	—
+ 90°	—	—	—	—
+100°	—	—	—	—
+110°	—	—	—	—
+120°	—	—	—	—
+130°	—	—	—	—
+140°	—	—	—	—
+150°	—	—	—	—
+160°	—	—	—	—
+170°	—	—	—	—
+180°	—	—	—	—

Die trigometrischen Tafeln liefern für die Winkel ω die Werthe:



Tabelle für ω.

Radialseite.					Ulnarseite.				
β	$\alpha = 20°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 5°$	β	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
— 10°	—	—	— 6° 40′	— 8°	+ 10°	+ 8° 10′	—	—	+ 4° 50′
— 20°	— 13° 50′	— 14° 50′	— 15° 30′	— 15° 20′	+ 20°	—	—	—	+ 13° 10′
— 30°	— 21° 50′	— 23° 30′	— 23° 40′	— 24° 10′	+ 30°	—	—	—	+ 22° 20′
— 40°	— 29° 40′	— 32° 50′	— 33° 40′	— 34° 10′	+ 40°	—	—	+ 33° 10′	+ 30° 40′
— 50°	—	— 41° 50′	— 41° 30′	— 44° 20′	+ 50°	—	—	+ 40° 40′	—
— 60°	—	— 49°	— 50° 20′	— 55°	+ 60°	—	—	+ 50°	—
— 70°	—	—	— 59° 10′	— 65° 10′	+ 70°	—	—	—	—
— 80°	—	—	— 69° 20′	— 75° 10′	+ 80°	—	—	—	—
— 90°	—	—	—	— 85°	+ 90°	—	—	—	—
— 100°	—	—	— 90°	— 94° 30′	+ 100°	—	—	—	—
— 110°	—	—	— 100°	— 103° 20′	+ 110°	—	—	—	—
— 120°	—	— 109° 30′	— 110° 20	— 112° 30′	+ 120°	—	—	—	—
— 130°	—	—	— 123° 20′	— 121° 50′	+ 130°	—	—	—	—
— 140°	—	— 129° 50′	— 134° 30′	— 132° 40′	+ 140°	—	—	—	—
— 150°	—	— 142° 20′	— 144° 40′	— 144° 10′	+ 150°	—	—	—	—
— 160°	—	—	— 155° 10′	—	+ 160°	—	—	—	—
— 170°	—	— 168° 10′	— 166° 30′	—	+ 170°	—	—	—	—
— 180°	—	— 180°	— 180° —	—	+ 180°	—	—	—	—

Hieraus folgt dann für die Grösse der Rollung $\beta - \omega$:

Tabelle für die Rollung ($\beta - \omega$).

Radialseite.					Ulnarseite.				
β	$\alpha = 20°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 5°$	β	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
— 10°	—	—	— 3° 20′	— 2°	+ 10°	+ 1° 50′	—	—	+ 5° 10′
— 20°	— 6° 10′	— 5° 10′	— 4° 30′	— 4° 40′	+ 20°	—	—	—	+ 6° 50′
— 30°	— 8° 10′	— 6° 30′	— 6° 20′	— 5° 50′	+ 30°	—	—	—	+ 7° 40′
— 40°	— 10° 20′	— 7° 10′	— 6° 20′	— 5° 50′	+ 40°	—	—	+ 6° 50′	+ 9° 20′
— 50°	—	— 8° 10′	— 8° 30′	— 5° 40′	+ 50°	—	—	+ 9° 20′	—
— 60°	—	— 11°	— 9° 40′	— 5°	+ 60°	—	—	+ 10°	—
— 70°	—	—	— 10° 50′	— 4° 50′	+ 70°	—	—	—	—
— 80°	—	—	— 10° 40′	— 4° 50′	+ 80°	—	—	—	—
— 90°	—	—	—	— 5°	+ 90°	—	—	—	—
— 100°	—	—	— 10°	— 5° 30′	+ 100°	—	—	—	—
— 110°	—	—	— 10°	— 6° 40′	+ 110°	—	—	—	—
— 120°	—	— 10° 30′	— 9° 40′	— 7° 30′	+ 120°	—	—	—	—
— 130°	—	—	— 6° 40′	— 8° 10′	+ 130°	—	—	—	—
— 140°	—	— 10° 10′	— 5° 30′	— 7° 20′	+ 140°	—	—	—	—
— 150°	—	— 7° 40′	— 5° 20′	— 5° 50′	+ 150°	—	—	—	—
— 160°	—	—	— 4° 50′	—	+ 160°	—	—	—	—
— 170°	—	— 1° 50′	— 3° 30′	—	+ 170°	—	—	—	—
— 180°	—	0°	0°	—	+ 180°	—	—	—	—

Aus der letzten Tabelle geht hervor, dass bei den Bewegungen des Zeigefingers eine Rollung stattfindet, wenn man von der oben erwähnten Mittelstellung des Fingers aus Flexionen in verschiedenen Richtungen ausführt, wobei unter Flexionen alle Bewegungen in allen möglichen Richtungen verstanden werden, so dass unter diesen allgemeinen Begriff auch die Abductions- und Adductionsbewegungen fallen, die wir sonst wie früher als Ulnarflexion und Radialflexion bezeichnen. Wenn der Finger nach der Ulnarseite (Kleinfingerseite) in irgend einer Richtung flectirt wird, so findet, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, für den Beobachter am eigenen Finger gleichzeitig eine Rollung um die Längsachse statt, in demselben Sinne, wie sich der Zeiger an der Uhr bewegt, oder in gleichem Sinne, wie die Supinationsbewegung des zugehörigen Radius. Wird der Finger in irgend einer Richtung nach der Radialseite hin bewegt, so findet auch eine Rollung um die Längsachse statt, aber in entgegengesetztem Sinne, also gleichartig wie die Pronationsbewegung des zugehörigen Radius. Die Rollung erreichte bei den gemessenen Bewegungen im Maximum eine Grösse von 11°.

Nur bei den Flexionen in der Volar-Dorsalebene zeigte sich keine Rollung.

Je grösser die Flexion, desto grösser stellt sich die Rollung heraus. Hier muss übrigens ausdrücklich bemerkt werden, dass wir uns nur in mittleren Flexionsstellungen bewegten, weil wir fürchteten, bei Bewegungen bis an die Grenzen der Möglichkeit gewaltsame Anstrengungen anzuwenden, welche leicht die Hand aus ihrer Lage bringen konnten, eine Ruhelage, die auch so schon schwer genug festzuhalten war.

Es wurde deshalb die ruhige Haltung der Hand bei allen Bewegungen sorgsam controlirt.

Bei grösseren Flexionsgrössen hätte sich voraussichtlich auch die Rollung vergrössert.

Aus der Tabelle ist fernerhin, soweit sie vollständig ist, ersichtlich, dass für zur Verticalebene symmetrische Bewegungen des Fingers um dieselbe Flexionsgrösse (soweit sie innerhalb der Bewegungsgrenzen fallen) sich auch mit grosser Annäherung gleiche Rollungsgrössen, nur in entgegengesetztem Sinne, einstellen.

Nachdem für unsere zunächst beliebig angenommene Ausgangsstellung bei den Flexionen in allen möglichen Richtungen, mit Ausnahme der reinen Volar-Dorsalflexion erkennbare Rollungen aufgetreten waren, musste es die weitere Aufgabe sein, zu prüfen, ob sich auch für alle übrigen Ausgangsstellungen Rollungen einstellen; denn es musste ja die Möglichkeit ins Auge gefasst werden, dass die Anordnung der bewegenden Muskeln hier eine ähnliche ist, wie beim Auge, an dem es bekanntlich eine Stellung gibt, von der aus die Muskeln die Bewegungen auslösen ohne jegliche Rollung (Raddrehung der Iris). Diese Stellung, die am Auge als Primärstellung bezeichnet wird (Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig 1867, p. 463), suchten wir nun am Finger zu bestimmen und werden sie, wenn sich eine solche auffinden lässt, auch als P r i m ä r s t e l l u n g einführen. Wenn eine solche Primärstellung für den Finger überhaupt existirt, so kann sie nur oberhalb, also dorsalwärts von unserer bisherigen Ausgangsstellung liegen; denn für alle Stellungen unterhalb der Primärstellung müssen die Rollungen in dem oben angeführten Sinne auftreten, für alle Stellungen oberhalb der Primärstellung aber gerade im entgegengesetzten Sinne (Helmholtz a. a. O. p. 463).

Da wir aus unseren Beobachtungen ersahen, dass bei der reinen Dorsal-Volarflexion keine Rollung auftrat, so war dadurch schon die Ebene bestimmt, in welcher allein die gesuchte Primärstellung, falls sie überhaupt vorhanden und auffindbar war, liegen konnte.

Wir gingen daher in dieser Ebene mit dem Finger dorsalwärts bis zur völlig gestreckten Lage, in welcher er die Verlängerung seines Metacarpalknochens bildet und konnten uns alsbald überzeugen, dass dies die gesuchte Primärstellung war.

W e n n m a n n ä m l i c h i n d i e s e r L a g e d e n F i n g e r s e n k r e c h t z u r P r o j e c t i o n s t a f e l s t e l l t e, s o k o n n t e m a n i n j e d e r b e l i e b i g e n F l e x i o n s e b e n e d e n F i n g e r b e w e g e n, o h n e d a s s e i n e R o l l u n g a u f t r a t. Es blieb immer der Schatten der vorher in die Bewegungsebene eingestellten Stahlnadel in der Schnittlinie, welche diese Flexionsebene mit der zu ihr senkrechten Projectionstafel bildete. Es mag hierbei nochmals erwähnt werden, dass auch bei diesen Versuchen die Projectionstafel fortwährend senkrecht zu den Sonnenstrahlen gerichtet blieb.

Es zeigt sich also hier dasselbe Gesetz für die Bewegungen des

Fingers wie am Auge (Listing'sches Gesetz). Der Versuch wurde an drei Individuen mit übereinstimmendem Befunde angestellt und mehrmals wiederholt.

Nun ist allerdings die physiologische Bedeutung des Gesetzes der constanten Orientirung für das Auge (Donders) sofort ersichtlich, weil beim Richten des Blickes von einem Punkt nach einem anderen beim Wiederholen dieser Bewegung jedesmal nicht nur derselbe Grad der Flexion, sondern auch derselbe Grad der Rollung (Rotation, Raddrehung) sich einstellt, sodass dieselben Punkte der Retina wieder von denselben Lichtstrahlen getroffen werden. Für den Finger ist so ohne Weiteres dieser physiologische Effect nicht zu übersehen, und es muss weiteren Arbeiten vorbehalten werden, den physiologischen Werth dieses Bewegungsgesetzes für den Finger klar zu legen. Soviel ist aber sicher, dass, wenn wir den Finger als Tastorgan gebrauchen, um z. B. im Dunkeln an Stelle des Auges uns durch Tasten Vorstellungen von bestimmten Formen der Aussenwelt zu verschaffen, es gewiss für die Orientirung nicht ohne Bedeutung ist, dass jedesmal dieselben Stellen der Fingerspitzen bei Wiederholung der Bewegung mit denselben Stellen eines ruhenden betasteten Gegenstandes zusammenfallen.

Bei den anderen Fingern stellte sich bei wiederholten Versuchen ganz dasselbe Bewegungsgesetz heraus. Nur vom Daumen und Kleinfinger vermögen wir nichts zu berichten, da wir an diesen Fingern, die am Rande der Hand liegen, noch keine Beobachtungen angestellt haben.

Dagegen erschien es uns erforderlich, die analogen Versuche am Handgelenk anzustellen. Die Versuche waren hier ziemlich erschwert, weil die Fixirung des Vorderarmes und damit die Verhinderung der Radiusrotation nur sehr schwer zu bewerkstelligen war. Das totale Eingypsen des Vorderarmes führte zu nichts, da innerhalb der Gypshülse die Weichtheile so nachgiebig blieben, dass immer noch Rotationen des Radius um die Ulna innerhalb der verschiebbaren Weichtheile des Vorderarmes auch im festesten Gypsverbande ausführbar waren.

Sicher vermochten wir dagegen die Radiusbewegungen auszuschliessen, wenn wir den entblössten Vorderarm mit mittlerer Pronationsstellung in eine angegossene, oben offene, halbe Gypsrinne legten, die auf der einen Seite bis in die Nähe des Handgelenkes, auf der anderen Seite bis in die Mitte des gebeugten Oberarmes reichte, und wenn wir dann mittels einer anschraubbaren Pelotte den Radiusknochen fest an seine Unterlage andrückten. Dabei wurde eine weitere Controle über die Ausschliessung der Radiusrotation noch dadurch ausgeübt, dass ein zweiter Beobachter auf das Köpfchen der Ulna drückte und dafür sorgte, dass auch die Ulna sich nicht aus ihrer Lage bewegte. Hierdurch ward jede Bewegung des Vorderarmes bei den Bewegungen der Hand sicher ausgeschlossen.

Bei den nun ausgeführten Bewegungen der Hand, die auf dieselbe Weise registrirt wurden, wie vorher der Zeigefinger, liess sich constatiren, dass das Gesetz der constanten Orientirung auch für die Bewegungen im Handgelenk gilt.

Sobald man das Schattenbild oder auch das Spiegelbild an irgend eine Stelle der Projectionstafel gebracht hatte, liess sich dasselbe wiederholt an dieselbe Stelle nur mit wieder genau derselben Orientirung bringen, und jeder Versuch durch Rollung (Rotation um die Längsachse des dritten Metacarpusknochen) an derselben Stelle das Bild zu drehen, machte sich für den zweiten Beobachter sofort an den Vorderarmknochen bemerklich, war also nur durch Bewegung im Radio-Ulnargelenk möglich, nicht aber durch Rollung im Handgelenk selbst.

Es ergab sich ferner, dass auch für die Hand eine Primärstellung existirt, von der aus die Flexionen in allen möglichen Richtungen reine Rotationen sind, ohne jegliche Rollung, dass also auch das Listing'sche Gesetz für die Hand Gültigkeit hat.

Wie die Muskeln um jeden der drei untersuchten Finger sich so gruppiren, dass sie Rücken- und Volarseite, Radial- und Ulnarrand des Fingers anfassen, also in ähnlicher Richtung wie die vier graden Augenmuskeln, wenn dieselben alle wirklich gerade am Auge angriffen, so gruppiren sich auch für das Handgelenk als Muskeln des Ulnarrandes der Ulnaris externus und internus, als Muskeln des Radialrandes der Radialis internus und die externi mit Abductor pollicis longus, für die Streckseite die Streck- und für die Volarseite

die Beugemuskeln. Es muss einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben, diese Verhältnisse der Muskelansätze und der Muskelwirkung genauer festzustellen, wozu wir eben erst durch die Kenntniss des Bewegungsgesetzes in den Stand gesetzt werden.

Um die Resultate kurz zusammenzufassen, ergiebt sich aus der vorliegenden Untersuchung, dass für die Bewegungen der drei mittelsten Finger im Metacarpo-Phalangalgelenk und für die Bewegungen im Handgelenk dasselbe Gesetz der constanten Orientirung gilt wie beim Auge.

Darin liegt ein ganz wesentlicher Unterschied zwischen diesen Gelenken und den Gelenken am Oberarm und am Oberschenkel. Während man an letzteren Gelenken, nachdem man den Oberarmknochen resp. den Femur in eine bestimmte Lage flectirt hat, immer noch in dieser Lage Rollungen (Rotationen um die Längsachse des Knochens) ausführen kann, ist dies für die ersteren Gelenke nicht mehr möglich. Aus diesem Grunde zeigen die bewegten Knochen bei jenen Gelenken, wenn sie wieder in dieselbe Stellung flectirt werden, immer wieder dieselbe Orientirung; die dabei gleichzeitig erfolgende Rollung (Rotation um die Längsachse) zeigt also immer wieder denselben Werth. Kinematisch betrachtet stellen das Humerusgelenk und das Hüftgelenk in ihren Functionen Mechanismen dar mit drei Graden der Freiheit, während das Handgelenk und die drei mittelsten Metacarpo-Phalangalgelenke für ihre resultirenden Bewegungen nur zwei Grade der Freiheit besitzen. Die Metacarpo-Phalangalgelenke schliessen durch ihren Gelenkbau an sich nicht den dritten Grad der Freiheit aus; denn sie lassen in der That eine Rollung (Rotation um die Längsachse des Fingers) zu, wenn man mit äusserer Gewalt den Finger dreht, also ihn passiv bewegt, aber die Anordnung und gleichzeitige Wirkung der einzelnen Muskeln ist eine solche, dass bei den willkürlichen Bewegungen von diesem dritten Grade der Freiheit, d. h. von dieser Rollungsmöglichkeit kein Gebrauch gemacht wird. Genau dieselben Verhältnisse zeigen sich, wie längst bekannt, beim Auge. Auch hier tritt, trotz des Kugelgelenkes, welches an sich die drei Grade der Freiheit zulassen würde, nur eine Beweglichkeit von zwei Graden der Freiheit auf; denn wir sind nicht im Stande, bei irgend einer Stellung des Auges noch eine Rollung

(Rotation um die Blicklinie) des Auges willkürlich auszuführen, so dass die Iris dabei eine Raddrehung macht.

Somit wird jede Flexionsbewegung, die man dem bewegten Knochen vorschreibt, zu einer Zwangsbewegung, was beim Humerus und beim Femur nicht der Fall ist. Und zwar ist diese Bewegung deshalb eine Zwangsbewegung zu nennen, weil sie nur auf einerlei Weise auszuführen ist, während z. B. der Humerus eine vorgeschriebene Flexion auf beliebig viel Arten ausführen kann, da man im Stande ist, während der Flexion den Knochen in beliebiger Weise um seine Längsachse zu drehen.

Es finden also die Flexionsbewegungen in den hier behandelten Metacarpo-Phalangalgelenken und im Handgelenk von irgend einer zunächst beliebig gewählten aber dann festgehaltenen Ausgangsstellung der Längsachse des bewegten Knochens aus in gesetzmässiger Weise statt, während für die Flexionsbewegungen des Humerus von einer bestimmten Anfangsstellung aus kein Gesetz existirt. Diese Gesetzmässigkeit der Bewegungen in jenen Gelenken drückt sich nach unseren Untersuchungen so aus, dass für die hier behandelten Gelenke von einer einzigen bestimmten Stellung der bewegten Knochen aus die Flexionen ohne Rollung stattfinden, während eine solche für alle übrigen Ausgangsstellungen vorhanden war, wenn auch stets in bestimmter Grösse. Für diese ausgezeichnete Stellung wurde die für die Augenbewegungen gebräuchliche Bezeichnung Primärstellung eingeführt. Es lässt sich das Gesetz der Bewegungen in den betreffenden Metacarpo-Phalangalgelenken und im Handgelenk auch so aussprechen, dass die Flexionen in diesen Gelenken von der Primärstellung der Längsachse des bewegten Knochens aus reine Rotationen (Flexionen, nicht Rollungen) um Achsen sind, die alle zu dieser Primärstellung senkrecht stehen, so dass alle diese Rotationsachsen in einer Ebene liegen, nämlich in der im Mittelpunkt des Gelenkes auf der Primärstellung der Längsachse des bewegten Knochens senkrecht stehenden Ebene. Dieses Gesetz gilt auch für die Augenbewegungen, wurde dort zuerst gefunden und wird als Listing'sches Gesetz bezeichnet.

Nach diesem Gesetz erfolgt erst dann eine Rollung, wenn man von einer Secundärstellung in eine andere übergeht. Nun könnte man dagegen einwerfen, dass beim Ausgehen von einer Primärstellung

in eine andere, secundäre Stellung noch eine ganze Reihe von Secundärstellungen durchschritten wird, und somit die Bewegung zerlegt werden kann in eine Reihe von Bewegungen aus der Primärstellung in die erste Secundärstellung, von der ersten Secundärstellung in die zweite, dritte, vierte u. s. f., dass also jede Bewegung von der Primärstellung aus auch eine Reihe von Bewegungen aus Secundärstellungen in andere involvirt. Wenn nun bei letzteren keine Rollung um die Längsachse (Raddrehung) stattfindet, so ist damit ein Specialfall gegeben für die Bewegungen zwischen Secundärstellungen, welcher sagt, dass auch dann keine Rollung stattfindet, wenn die beiden Secundärstellungen, zwischen denen die Bewegung stattfindet, in einer Ebene liegen, die durch die Primärstellung geht.

Schlussbemerkung.

Nachdem die vorliegende Untersuchung ergeben hat, dass für Gelenke von durchaus gleich gestalteten Gelenkflächen doch die resultirenden Gelenkbewegungen principielle Verschiedenheiten aufweisen, so ist unzweifelhaft dargethan, dass es nicht richtig ist, bei der Untersuchung der Gelenke das alleinige Gewicht auf die Form der Gelenkflächen zu legen und die Gelenke allein nach den Gelenkformen einzutheilen. Man hat vielmehr zuerst die Functionen des Gelenkes d. h. die resultirenden Bewegungen ins Auge zu fassen und erst in zweiter Linie zu untersuchen, wie sich die so gewonnenen Resultate zu den Formen der Gelenkflächen stellen.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

PAPILLAE FOLIATAE ET CIRCUMVALLATAE

DES

KANINCHEN UND FELDHASEN

VON

O. DRASCH.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº V.

MIT ACHT TAFELN.

(Aus dem physiologischen Institute zu Leipzig.)

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Von d. w. Mitgliede C. Ludwig vorgelegt in der Sitzung v. 9. Mai 1887.
Das Manuscript übergeben am 21. Juni 1887.
Der Abdruck vollendet den 10. October 1887.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

PAPILLAE FOLIATAE ET CIRCUMVALLATAE

DES

KANINCHEN UND FELDHASEN

VON

DR. OTTO DRASCH.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich die Vermuthung ausgesprochen, dass die in den Geschmacksknospen vorfindlichen »Sinneszellen« nicht das Maass für die Summe der im Stamme des Glossopharyngeus verlaufenden Geschmacksfasern sein könnten, oder mit anderen Worten, dass man nebst den Uebergang der Geschmack leitenden Fasern in die »Sinneszellen« noch eine andere Endigungsweise ersterer annehmen müsse. Gestützt habe ich diese meine Annahme hauptsächlich durch die Thatsache, dass die Zahl der Nervenfasern, in welche der Glossopharyngeus unmittelbar unter der Knospenregion der verschiedenen Geschmacksorgane zerfällt, die Summe sämmtlicher »Sinneszellen« in jenen Organen um Vieles übertrifft.

Ich habe seitdem meine Untersuchungen nicht nur an der Pap. foliata des Kaninchen und Hasen weiter geführt, sondern selbe auch auf die Pap. circumvallatis dieser Thiere sowie auf die des Rindes, Kalbes, Schweines, Rehes, Hirsches, der Gemse, Maus, Fledermaus ausgedehnt.

Man möge nun entschuldigen, wenn ich an dieser Stelle zunächst nochmals die Pap. foliatae der ersten zwei genannten Thiere vornehme. Dazu bestimmten mich mehrere Gründe. Ich habe nämlich bezüglich dieser Geschmacksorgane nicht nur neue Thatsachen anzuführen, sondern auch einige Irrthümer zu berichtigen, denen ich bei meiner ersten Untersuchung anheimgefallen bin. Darum muss ich auch für das Folgende, was Nomenclatur, Präparations- und Vergoldungsmethode anlangt, auf oben citirte Abhandlung verweisen, und werde hier nur das wiederholen, was zum Verständniss des Ganzen unumgänglich nothwendig erscheint.

An die Besprechung der Pap. foliatae werde ich nur die der Pap. circumvallatae des Hasen und Kaninchen anschliessen, weil sie, so viel ich bis jetzt gefunden habe, die einzigen umwallten Papillen sind, welche sich bezüglich ihres Baues auf die Pap. foliatae zurück-

1) Histologische und physiologische Studien über das Geschmacksorgan. Wiener Sitzber. Bd. LXXXVIII. III. Abth.

führen lassen. Einen besonderen Werth muss ich auf die beigegebenen Tafeln legen. Ich verdanke die Herstellung der Originalzeichnungen derselben der Liberalität Herrn Prof. C. Ludwig's, dem ich dafür hier öffentlich meinen Dank abstatte. Ebenso fühle ich mich verpflichtet, dieses dem hohen k. k. österr. Ministerium für Cultus und Unterricht gegenüber zu thun, welches mich durch Gewährung eines namhaften Stipendiums in den Stand setzte, meine Arbeit ausführen zu können.

Wie bekannt sind die Geschmacksknospen auf den secundären Blättern (Taf. I, Fig. 2) der Pap. fol., von einer bestimmten Höhe des Blattes an beginnend, übereinander gelagert in nebeneinander parallel verlaufenden Reihen angeordnet. Ich habe nun bereits mitgetheilt, dass dementsprechend das Stroma der Blätter einen eigenthümlichen Bau aufweist. Die Knospen sitzen nämlich nicht ohne Weiteres auf demselben auf, sondern jede derselben steckt, bis ungefähr zu einem Drittel ihrer Höhe, in einer Nische. Diese Nischen oder Täschchen, terrassenförmig übereinander gelagert, werden dadurch gebildet, dass in der Knospenregion aus dem Blatte sich von unten nach oben parallel verlaufende Längsfältchen erheben, die bis an den oberen Blattrand hinziehen. Selbe, welche an entsprechenden Präparaten stets sofort in die Augen fallen, würden, wenn man von gleich zu erwähnenden Querfältchen absieht, Halbrinnen zwischen sich fassen. Querfältchen jedoch, welche unter abgerundeten Winkeln die Längsfalten verbinden, vollenden das Fachwerk, welches für die Aufnahme der Knospen bestimmt ist.

Da ich diesmal nur Flächenpräparate, d. h. einzelne secundäre Blätter oder je zwei einander gegenüberliegende ausgebreitet, studierte, indem ich selbe entweder ganz betrachtete oder durch Spaltung und Zerklüftung etc. unter dem Präparirmikroskope für weitere mikroskopische Untersuchungen zurecht machte, so war mein nächstes Bestreben darauf gerichtet, solche Goldpräparate zu erhalten, welche nach der Entfernung des Epithels die Nischen für die Geschmacksknospen zeigten. Ich legte nämlich den Schwerpunkt meiner Untersuchung zunächst darauf, über den Verlauf der Nerven in den Nischenwänden ins Klare zu kommen. Denn wie ich glaube, würde man der Lösung der Frage, ob alle Fasern des Glossopharyngeus mit bestimmten Zellen der Knospen in Verbindung treten, näher kommen,

wenn es sich constatiren liesse, dass zu dem Grunde jeder Nische ein Bündel von Fasern hinzöge und daselbst wie abgerissen ende. Andererseits ist es aber auch klar, dass obige Annahme nicht mehr in ihrem ganzen Umfange aufrecht erhalten werden kann, wenn es sich herausstellte, dass eine Anzahl Nerven ihren Verlauf in den Nischenwänden selbst nehme, und so die Knospen gleichsam umkreise, da wenigstens bis jetzt ein seitlicher Eintritt von Nerven in die Knospen von Niemandem behauptet wurde.

Mein Bemühen, die gewünschten Präparate zu erlangen, hatte aber nur einen theilweisen Erfolg.

Wenn ich in Erinnerung bringe, dass die Darstellung der Knospennischen an und für sich schon eine sehr schwierige ist, indem nur vorsichtiges Maceriren von in Chromsäure gehärteten Papillen in Trypsin zum Ziele führt, wird das Fehlschlagen meiner Absicht verständlich erscheinen.

Das untrüglichste Kriterium für das Gelungensein der Vergoldung eines Gewebsstückes ist immer das Hartwerden des letzteren im Goldbade. Ich habe mich immer und immer wieder überzeugt, dass, wenigstens für die Gewebstheile, welche ich bisher durch die Vergoldungsmethode auf Nerven untersuchte, nicht nur der Procentsatz des Goldchlorides, sondern auch der Ameisensäuregehalt der Reductionsflüssigkeit für den beabsichtigten Erfolg vollkommen gleichgültig ist. Hauptsache bleibt stets, dass das Nerveneiweiss von vornherein schon in einer bestimmten Modification vorliegt, welche es befähigt, das Goldchlorid energischer aufzunehmen, als die übrigen Gewebsbestandtheile. Welcher Art diese Modification ist, vielleicht bestimmte Sintonine oder Kalialbuminate, kann ich nicht angeben; ich führe sie herbei, dass ich die Nerven bei niederer Temperatur absterben lasse.

Wenn man nun Papillen in toto in die Goldlösung bringt und sie daselbst bis zum Hartwerden verweilen lässt, dann zur Reduction in verdünnte Ameisensäure gibt, so zeigt sich nach der Reduction, dass die betreffenden Stücke das eine Mal mehr minder hart geblieben sind, das andere Mal sich vollständig erweichten. Im ersteren Falle sitzt das Epithel dem Bindegewebe fest auf, im letzteren ist es gelockert und lässt sich durch leichtes Schütteln des Präparates von diesem vollständig entfernen. Der Säuregehalt der Reductions-

flüssigkeit ist, wie ich Anfangs vermuthete, für diese Erscheinung nicht bestimmend. Denn wie ich oft gefunden habe, werden Stücke, welche nach einer bestimmten Zeit in der Reductionsflüssigkeit nicht weich geworden sind, dieses auch nicht mehr, wenn man sie noch weitere Zeit in derselben Lösung liegen lässt, oder selbst mit dem Procentgehalt der Ameisensäure steigt. Andrerseits werden Stückchen sehr oft in ganz verdünnter Ameisensäure — 3 Tropfen Ameisensäure auf 10 ccm Wasser — in kurzer Zeit weich. Auffallend ist nun die Thatsache, dass in den Präparaten ersterer Art die Nerven dunkelblau oder schwarz, das übrige Gewebe gar nicht, in denen der zweiten Art die Nerven dunkelroth oder dunkelviolett, das übrige Gewebe schwach rosenroth gefärbt sind. Auch für diese Erscheinung will ich nicht versuchen, eine Erklärung zu geben. Erwähnen will ich nur, dass man auch bei vorausgehender Behandlung frischer Stücke mit Säuren rothe, bei Anwendung verdünnter Alkalien blaue Reduction erhält.

Die Figuren Taf. II und Taf. III, 1 stellen ausgebreitet je zwei einander gegenüberliegende secundäre Blätter der Pap. fol. des Feldhasen dar. (Zuerst Schnittführung in der Richtung *ab*, dann nach *cd*, *cd* in Fig. 2, Taf. I.) Das eine Präparat, welches die blaue Reduction zeigt, entstammt einer Papille, welche nach der Reduction hart blieb; das Epithel mit den Knospen musste durch Scalpell und Pinsel entfernt werden. Das andere mit rother Reduction wurde von einer weich gewordenen Papille abgespalten und das Epithel durch bloses Schütteln abgespült. Betrachtet man nun zunächst die Knospenregionen (*KR*) beider Präparate, so ist von den Knospennischen nichts zu sehen und es würde dem Ungeübten schwer fallen, bei einem Vergleiche dieser Goldpräparate mit Präparaten, welche die Nischen zeigen, dieselben Parenchyme wieder zu erkennen. Aber eine beiden Präparaten zukommende Eigenthümlichkeit fällt sofort in die Augen: es sind dies die blauen unter sich mehr minder parallel bis an den Rand hinziehenden und breite Rinnen zwischen sich fassenden Faserbündel der einen Blätter (*NB* Fig. Taf. II), und die ebenfalls parallelen aber nahe aneinander gerückten rothen Stränge der anderen Blätter (*NB* Fig. 1, Taf. III). Diesen analoge Zeichnungen zeigten sich stets an allen meinen Präparaten und ich konnte schliesslich constatiren, dass die blauen oder rothen Bänder um so näher

aneinander gerückt waren, je weiter die Quellung des Bindegewebes vorgeschritten war. Es war mir von vornherein wahrscheinlich, dass diese Faserbündel — Nerven — ihren Weg durch die Längsscheidewände der Knospennischen nehmen, und dass die Querscheidewände zerstört worden sein müssten. Ich sah meine Annahme in letzterer Beziehung bestätigt, als es mir im Verlaufe meiner Untersuchung doch gelang, bei besonders günstigen Präparaten, welche in der Reductionsflüssigkeit nicht zu hart geblieben, aber auch nicht zu stark gequollen waren, durch vorsichtiges Abpinseln des Epithels, Fragmente der Querscheidewände, beim Kaninchen einigemale selbst die ganzen Knospennischen zu erhalten. Es ist nun leicht einzusehen, dass die Querwände der Nischen in dem einen Falle durch den mechanischen Insult vernichtet werden, welcher auf sie bei der Entfernung des Epithels durch Scalpell und Pinsel geübt wird. Man erhält im günstigsten Falle eben nur Fragmente derselben.

Anders bei den gequollenen Präparaten. Hier zeigt schon die vollständige Lockerung des Gesammtepithels, dass die Knospen aus ihren Behältnissen gleichsam ausgepresst wurden. Die Nischen werden also Anfangs durch Quellung kleiner, und zu ihrem schliesslichen Verschwinden trägt wohl hauptsächlich das Aneinanderrücken der Längsscheidewände bei.

Man könnte nun vermuthen, dass der übermässigen Quellung dadurch zu begegnen sei, dass man die Präparate ab und zu aus der Reductionsflüssigkeit nimmt und auf ihre Erweichung prüft. Ich habe dieses auch vielfach versucht, aber keinen besonderen Erfolg damit erzielt.

Obschon ich also mein Ziel, an dem normalen Blattstroma analogen Goldpräparaten über die oben aufgeworfene Frage Anhaltspunkte zu bekommen, nicht vollständig erreicht habe, kann ich jetzt doch, wie im Folgenden klar werden wird, den positiven Ausspruch thun, dass in der That eine grosse Menge von Glossopharyngeusfasern mit den Sinneszellen der Knospen nichts zu thun hat.

Beide Arten von Präparaten, sowohl gequollene als nicht gequollene, lassen nun schon ohne jede weitere Zerlegung, untereinander und nebeneinander verglichen, gewisse Eigenthümlichkeiten erkennen. So zeigen beide eben in Betracht gezogene Figuren einen weiteren Unterschied darin, dass die eine mit Kernen dicht besäet

ist, die andere derselben ermangelt. Es sind dies zwei so zu sagen extreme Fälle. Denn in Bezug auf das Vorkommen dieser Kerne, welche, wie ich vorgreifend constatiren muss, grösstentheils in die Nerven eingestreute Ganglien sind, herrscht die grösste Mannigfaltigkeit. Oft trifft man in einem secundären Blatte reichliche Ganglienzellen; das diesem gegenüberliegende ist im Vergleiche damit arm an solchen. Dann zeigt ein und dasselbe Blatt stellenweise die Ganglien dicht gedrängt, an anderen Stellen liegen sie wieder zerstreut. Namentlich ist der Fall ziemlich häufig, dass eine Anzahl von Nervenbündeln, welche an den beiden Seitenrändern des Blattes emporziehen, keine oder nur ganz spärliche Ganglien besitzen. Die übrigen Bündel enthalten dieselben wieder, und zwar treten sie von der Seite her anfangs zerstreut auf, und häufen sich allmählich gegen die Blattmitte zu (Fig. 1, Taf. VI).

Das hier Gesagte gilt in seiner Allgemeinheit nur für die oberflächlichen Partieen des Blattes, denen auch die beiden Zeichnungen entsprechen. Denn von einem bestimmt tief liegenden optischen oder wirklichen Flächenschnitt an werden die Ganglien an keinem gut gelungenen Goldpräparate vermisst. Fig. I, Taf. VI möge die erörterten Verhältnisse illustriren. Dieselbe wurde mit der grösstmöglichsten Genauigkeit abgebildet und sind namentlich die Farbentöne vollständig dieselben, welche das Präparat zeigte. Viele von den Kernen könnte man für Bindegewebszellen halten; sie stehen in der Zeichnung nicht überall mit Fasern in Verbindung. Und doch sind es Gebilde, die dem Nervensysteme angehören. Es traten nämlich die zu ihnen gehörigen Nerven aus der Tiefe herauf, ein Verhältniss, welches in der Zeichnung nicht wiedergegeben werden konnte, ohne dieselbe undeutlich und verwirrend zu machen. Die Figur entspricht etwa dem vierten Theile eines secundären Blattes vom Feldhasen, entworfen mit *D*, Oc. 2 Zeiss, ausgeführt mit Oelimmersion. Der Theil *b* zeigt bei hoher Einstellung das Blatt, wie es sich nach der Entfernung des Epithels darstellt; von *a* ab war dasselbe der Fläche nach gespalten.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen will ich nun näher auf die Anordnung der Nerven im Blattstroma eingehen. Dabei muss ich das Hauptgewicht auf die angeschlossenen Zeichnungen legen, und ich darf jetzt um so mehr hoffen, dass denselben Vertrauen entgegen-

gebracht wird, nachdem sich auf dem Anatomencongress zu Leipzig eine Anzahl von Forschern überzeugte, dass sie die Originale treu wiedergeben.

Was den Plexus betrifft, welchen der Glossopharyngeus bildet, bevor seine Auffaserung stattfindet, so habe ich meiner ersten Beschreibung desselben beizufügen, dass er nebst doppelt contourirten Fasern eine beträchtliche Anzahl REMAK'scher Nerven enthält.

Die Auffaserung dieses Plexus beginnt nun, wie ich ebenfalls schon mitgetheilt habe, bereits unterhalb der Knospenregion, in jenem Theile des secundären Blattes, welchen ich in Fig. 2 Taf. I, Taf. II, Fig. 1 Taf. III mit *B* bezeichnet habe. »Man findet nämlich zunächst, dass Nervenfibrillen durch die ganze Blattdicke hindurch vertheilt sind, dass bald nach der Auffaserung des Plexus markhaltiger Fasern in Fibrillen, diese von Neuem sich zu verflechten beginnen und ein überaus complicirt ineinander greifendes Gefüge bilden. Nicht nur einander benachbarte Faserbüschel vereinigen ihre Fibrillen, sondern auch Bündel, welche weit von einander abstehen, senden sich ihre Fasern gegenseitig zu. Während eine Partie Fasern eines Bündels geradlinig und parallel gegen den Blattrand zieht, strahlt eine andere fächerförmig auseinander, eine dritte biegt plötzlich um, verläuft eine Strecke weit quer durch das Blatt und gesellt sich zu den Fasern eines fern abstehenden Büschels. Wie der Fläche nach, wiederholen sich diese verwirrenden Anastomosen auch in die Blatttiefe.«

Fig. 1, Taf. III möge diese Beschreibung versinnlichen. Sie stellt nur einen optischen Flächenschnitt durch die Regionen B_1 B_1 dar, und doch übertreffen, wie eine ganz beiläufige Schätzung ergibt, schon die daselbst befindlichen Nervenfibrillen allein die »Sinneszellen« der betreffenden Knospenregionen.

Wenn man nun bei der Betrachtung des Auffaserungsbezirkes den Tubus allmählich hebt, und zunächst die Umgebung der Drüsenausführungsgänge (*DA*) ins Auge fasst, so wird allmählich ein Plexus aus Nervenfibrillen sichtbar, der an der Oberfläche mit einem feinmaschigen Nervennetze abschliesst (Fig. Taf. II). Er entwickelt sich theils aus dem Stammplexus direct, theils tragen zu seiner Bildung Fasern bei, welche bereits bis in die Regionen *BB* vorgedrungen sind. In den Knotenpunkten seines Maschenwerkes sind meistens

Ganglien vorhanden. Bemerkenswerth ist, dass aus ihm Fasern abzweigen, welche zu den Drüsenausführungsgängen hinziehen. Wenn bei der Herstellung des Blätterpräparates der Schnitt *ab* Fig. 2, Taf. I nicht gar zu tief im Zungenparenchym geführt wurde, so fällt sehr häufig das Epithel des Ausführungsganges heraus. In solchen Fällen kann man bemerken, dass obige Fasern spiralartig an der äusseren Wand des Ausführungsganges in die Tiefe ziehen. Ich habe diese Nerven nicht weiter verfolgt, und kann kein Urtheil darüber abgeben, ob sie zu den Zellen des Ausführungsganges in irgend welcher Beziehung stehen. Die Aufgabe des Plexus selbst kann nur die sein, das am Grunde des Wallgrabens sitzende Epithel mit Nerven zu versehen.

Fasst man bei hoher Einstellung den Auffaserungsbezirk bis an die Knospenregion hin speciell ins Auge, dann gewahrt man sehr oft die eigenthümlichen Nerven, von denen ich in Fig. 4, Taf. II oben citirter Schrift eine Abbildung gegeben habe. Es sind das zarte Stämmchen, welche ich jetzt als Abkömmlinge der blassen Fasern des Stammplexus auffassen möchte. Wenigstens konnte ich immer für eine Anzahl derselben diese Provenienz zweifellos festsetzen. Sie dringen aus der Tiefe und ziehen nahe aneinander gerückt knapp an der Oberfläche des Bindegewebes bis an den Rand der Knospenregion hin. Ein Theil von ihnen gesellt sich zu den Nerven, welche in den Längsscheidewänden verlaufen, der andere Theil hört an dem Rande der Knospenrinne wie abgerissen auf. Das Eigenthümliche dieser Fasern ist, dass sie schmal beginnend allmählich breiter werden. Wie gesagt konnte ich ein constantes Vorkommen dieser Fasern in der eben beschriebenen Anordnung und Menge nicht feststellen. Am öftersten traf ich sie beim Kaninchen. In wechselnder Anzahl sind sie aber stets zu beobachten, und mit Rücksicht auf ihre Rissenden und weil der enorm entwickelte intraepitheliale Plexus in der Knospenregion seinen Anfang an den untersten Knospenreihen nimmt, möchte ich annehmen, dass diese Fasern es sind, welche einen grossen Theil zur Bildung desselben beitragen.

Wenn man nun aber den Bezirk in seiner ganzen Dicke und auf die ganze Blattlänge hin durchmustert, so stösst man auf jedem optischen Flächenschnitt auf jenes Gewirre von Fasern und Faserbündeln, von dem ich oben eine allgemeine Beschreibung gegeben

habe. Abgesehen von dem Zuge der Fasern an und für sich, erhöhen noch die in denselben eingestreuten verschieden geformten Ganglien die Complicirtheit der mikroskopischen Bilder.

In der Knospenregion des Blattes fallen vor Allem die in den Längsscheidewänden der Nischen liegenden Nerven in die Augen. Eine übersichtliche Untersuchung derselben ergibt, dass sie hauptsächlich jene Fasern enthalten, welche, nach dem Zerfall des Grundplexus in seine Elemente, »auf dem kürzesten Wege bis an den oberen Rand des Blattes ziehen«; zu ihnen gesellt sich überdies ein beträchtlicher Theil der übrigen im Auffaserungsbezirke befindlichen Nerven.

Zum leichteren Verständniss des Folgenden erscheint es mir nothwendig, Einiges über diese Bündel, als Ganzes betrachtet, vorauszuschicken. Stellt man auf dieselben hoch ein, so wird zuerst ein mitunter ganz scharfer Kamm sichtbar [1]). Bei allmählicher Senkung des Tubus sieht man, dass die Breite des optischen Querschnittes, welcher die noch zu den Längsfaserbündeln gehörigen Nerven enthält, immer zunimmt und endlich nahe an der hinteren Blattwand sein Maximum erreicht. Die Fasern bilden also in ihrer Gesammtheit, schematisch ausgedrückt, ein Prisma, dessen Basis auf der hinteren Wand des Blattes aufsitzt und dessen Seiten ausgeschweift sind.

Die Figg. 1 Taf. II, Taf. III, 1 Taf. V, 1 Taf. VI stellen also nur bestimmte optische Querschnitte der in Rede stehenden Bündel dar. Um nun diese wichtigen Bündel zu studiren und ferner, um über die Nerven in der Tiefe des Blattes ins Klare zu kommen, genügen ganze Blätter in der Regel nicht mehr. Hier muss man zu der sehr viele Mühe und Zeit in Anspruch nehmenden Flächenspaltung der Blätter unter dem Präparirmikroskope seine Zuflucht nehmen [2]).

---

1) Ich bringe hier in Erinnerung, dass nicht nur die ganzen Blätter, sondern auch die Schnitte aus denselben durch zwischen Deckglas und Objectträger eingelegte Glassplitter vor Druck geschützt werden müssen.

2) Ich möchte an dieser Stelle nochmals betonen, dass es ein hoffnungsloser Irrweg ist, dadurch an das Ziel kommen zu wollen, dass man gehärtete Präparate in Schnittserien zerlegt. Ich habe dieses selbt einige Male versucht, bin aber bald zur Ueberzeugung gekommen, dass die betreffenden Präparate bei Weitem nicht das bieten, was die Handschnitte von den in verdünntem Glycerin liegenden Papillen. Doch bemerke ich, dass es auch bei der von mir eingeschlagenen Methode nicht

In den meisten Fällen genügt schon eine einmalige Abspaltung; die beiden Blatttheile sind dann hinreichend dünn, um zu ihrer mikroskopischen Durchmusterung selbst die stärksten Systeme in Anwendung zu bringen. Die Details nun, welche man an ihnen zu Gesichte bekommt, mögen zunächst die Abbildungen Fig. 1 Taf. IV, Fig. 1 Taf. V und Fig. 2 Taf. VI veranschaulichen. Erstere Figur ist ungefähr der fünfte Theil eines ganzen Blattes. Dasselbe wurde der Fläche nach in zwei Theile getrennt und es stellt Fig. 1 Taf. V jenen Theil dar, welcher von der Strecke *a* Fig. 1 Taf. IV abgetragen wurde. Der trennende Schnitt konnte aber nur bis an den Anfang des Bezirkes geführt werden, welcher mit *op* bezeichnet ist. Es sind also die bis dahin ziehenden Nerven solche, welche die Oberfläche des wirklichen Querschnittes zeigte. Die Region *op* zeigt hingegen theils die Fortsetzungen jener Fasern im optischen Querschnitte (*NB*), theils Fasern und Ganglien, welche höher in den Knospenrinnen (zwischen *NB*, *NB*) liegen (also entsprechend den in Fig. 1 Taf. V bei *N* sichtbaren Nerven). Wenn man aber an solchen Präparaten den Tubus nach und nach senkt, so wiederholen sich fort und fort den abgebildeten ähnliche Geflechte, bis man an die hintere Blattwand gelangt, in welcher endlich die armleuchterartigen Nerven auftauchen, welche ich bereits früher beschrieben und abgebildet habe. An dem Schnitte Fig. 1 Taf. V wurde die Einstellung so gewählt, dass die Nerven auf dem Rinnengrunde *N* deutlich sichtbar waren; die Bündel *NB* sind daher wieder Bilder des optischen Querschnittes.

An den Zeichnungen, auf welche soeben verwiesen wurde, denen nun auch noch die Figg. Taf. VII und VIII angereiht werden mögen, ist ersichtlich, dass die Formen und Dimensionen nicht nur der Nervenfasern, sondern auch der Ganglien und ganglienartiger Gebilde, mit welchen erstere in Zusammenhange stehen, innerhalb eines grossen Spielraumes wechseln. Mit dem Ausdrucke »ganglienartiger Gebilde« bezeichne ich die vielgestaltigen knotigen Massen,

---

möglich ist, ein Blatt der ganzen Länge nach z. B. in zwei vollständige Hälften zu trennen. Die Spaltung des Blattes in dem Auffaserungsbezirk ist leicht zu bewerkstelligen, in der Knospenregion aber dadurch sehr erschwert, weil es unmöglich ist, selbst mit dem feinsten Messerchen immer unter den Nischen zu bleiben. Dieselbe jedoch auf grössere Strecken hin auszuführen, gestattet immerhin längere Uebung.

zu welchen Nerven in ihrem Verlaufe anschwellen, oder welche gleichsam als Sammel- oder Ausgangspunkte für Nervenfasern dienen (Fig. 3, 4 Taf. VII; Fig. 2 Taf. VIII *gla*).

Von wahren Ganglien unterscheiden sich selbe durch den Mangel eines Kernes und Kernkörperchens. Wenigstens ist es mir nicht gelungen, an einer grossen Anzahl von Gebilden, welche man bei oberflächlicher Beobachtung ohne Weiteres wegen ihrer Form für Ganglien hätte ansehen können, jene Attribute der Ganglienzelle zu finden. Ausser einer bald gröberen bald feineren Granulation konnte ich an ihnen nichts Bemerkenswerthes sehen. Aufmerksam machen muss ich noch auf breite kurze brückenartige Verbindungen zwischen je zwei Fasern (Fig. 2, 3 Taf. VII; Fig. 2 Taf. VIII *br*). Man trifft sie sehr häufig in jedem Präparate, so dass schon dieses constante Vorkommen gegen die Annahme spricht, dass man es hier mit Kunstproducten, etwa blossen Goldniederschlägen, zu thun habe.

Die weitere Beschreibung dieser verschiedenen Bilder will ich aber an die eingehendere Besprechung der in den Längsscheidewänden der Nischen verlaufenden Nervenbündel knüpfen.

Um sich nun in Bezug auf diese Faserbündel keiner Täuschung auszusetzen, ist es unumgänglich nothwendig, Schnitte zu erzielen, welche nicht nur möglichst parallel der Fläche des Blattes bis an den oberen Rand desselben gehen, sondern auch in verschiedenen Tiefen ausgeführt wurden, Bedingungen, die wie leicht ersichtlich, nach meiner Präparationsmethode nur dem Zufall anheimgestellt sind. Zwei solchen verschiedenen Tiefen angehörige Schnitte stellen Fig. 1 Taf. VII und Fig. 2 Taf. VIII dar. Jener ist ungefähr aus der Mitte, dieser aus der Tiefe des Blattes.

Ich muss nun vor Allem nachdrücklich hervorheben, dass ich an den bezüglichen Präparaten, welcher Partie des Blattes in Bezug auf dessen Dicke sie immer entsprachen, das Eine ausnahmslos feststellen konnte, dass bei weitem die Mehrzahl der in Rede stehenden Fasern bis an den oberen Rand des Blattes ziehen. Und dazu kommt noch eine andere wichtige Thatsache. Wenn nämlich seitlich aus dem Längsbündel eine grössere Partie von Fasern dicht zusammengedrängt abzweigt, so nehmen selbe ihren Weg durch die Querscheidewände und gesellen sich theils zu dem Nachbarlängsbündel, theils ziehen sie in die Tiefe des Blattes. Dieses habe ich zuerst an

Präparaten aus der Pap. foliatae des Kaninchen gesehen, welche die Querwände erhalten zeigte (Fig. 2 Taf. V *QB*). Alle diese Längsfaserbündel können mithin unmöglich zu den Knospen respective zu deren Sinneszellen in directer Beziehung stehen; ja sie weichen denselben geradezu aus. Ihre Endigung muss daher im Epithel ober den Knospen gesucht werden.

Was nun die Frage betrifft, zu welcher Kategorie die einzelnen Fasern gehören, so glaube ich, werden mich die Abbildungen der Tafeln VII und VIII einer weitläufigen Auseinandersetzung überheben. Wenn man in Fig. 2 Taf. VIII (entworfen mit Oelimmersion, Apert. 1.30, Ocul. 18, Apochromat Zeiss) die feinsten, varicösen Fädchen (*pf*) als Nervenprimitivfibrillen auffasst, wird man die nächstdickeren Stränge (*fb*) als Primitivfibrillenbündel, als nackte Achsencylinder ansehen müssen. Die verhältnissmässig dicken, sich gabelig theilenden Stämmchen (*rn*) sind Remak'sche Fasern, man kann sie, wie Eingangs erwähnt, stets leicht bis in den Grundplexus verfolgen. Schwieriger zu erklären ist aber das Wesen der Fasern, welche ich mit dem Namen breiter Fasern bezeichnen will (*bf*). Meistens nehmen sie ihren Anfang und zwar sehr schmal beginnend aus einer Ganglienzelle oder ganglienartigen Anschwellung, verbreitern sich dann durch Hinzutritt einer granulirten Masse oft ganz enorm, werden dann wieder schmal und ziehen endlich als fast parallelrandiges Band weiter. Eine nie fehlende Eigenthümlichkeit dieser Fasern ist ihre spiralartige Windung, welche aber ab und zu auch schmächtigere Remak'sche Bündel zeigen. Offenbar liegen in den »ganglienartigen Gebilden« Analoga der Nervenkörperchen S. Mayer's vor. Ich schliesse mich der Auffassung dieses Autors über die Bedeutung derselben, abgesehen von dem spontanen Auftreten eines Kernes in ihnen, insofern an, dass sie das Bildungsmaterial bei der Regeneration von Fasern bilden. Von diesem Gesichtspunkte aus könnten demnach die »breiten Fasern« entweder dem Stadium der Regeneration oder Degeneration angehören. Dass man aber in der That auf eine fortwährende Neubildung von Nerven in unseren Objecten schliessen dürfe, dafür sprechen die Eingangs erwähnten Thatsachen über das wechselnde Vorkommen von Kernen, oder wie ich jetzt sagen darf von Ganglien und ganglienartigen Gebilden an den secundären Blättern.

Die in den Längsscheidewänden der Knospennischen geborgenen

Nervenbündel sind mithin ein Convolut von Nervenprimitivfibrillen, nackten Achsencylindern und Remak'schen Fasern. Dazu gesellen sich noch Ganglien und ganglienartige Gebilde der verschiedensten Gestalt, welche das schon durch die Fasern an und für sich geschaffene Wirrniss noch erhöhen.

Was nun die Ganglien anlangt, so geht es aus meinen Präparaten zur Evidenz hervor, dass durch sie in der That eine Vermehrung von Fasern stattfindet. Was mir in dieser Beziehung besonders aufgefallen ist, ist Folgendes. Man sieht eine verhältnissmässig dicke Faser von einem Bündel abzweigen und gegen die Peripherie hinziehen, d. h. gegen den oberen Blattrand zu. Nach kürzerm oder längerm Verlauf senkt sie sich in eine Ganglienzelle. Aus dieser kommen nun drei, vier oder auch mehrere ebenfalls wieder nach den Rand hinziehende Fasern hervor, deren Gesammtquerschnitt entschieden dicker ist als der zur Zelle hintretende Zweig. Umgekehrt ist aber auch der Fall sehr häufig, dass von einem Bündel mehrere Fasern oder von mehreren getrennten Bündeln je Fasern zu einer Ganglienzelle gehen, wieder in der Richtung gegen die Peripherie, und aus der Ganglienzelle eine einzige dickere Faser hervorgeht und peripherisch weiter verläuft. Siehe Figg. 1 Taf. V; 1, *a*, *b* Taf. VI; 1, 2 Taf. VII; 1, 2 Taf. VIII.

In meiner ersten Abhandlung habe ich Elemente aus den Längsscheidewändebündeln beschrieben und abgebildet (Fig. 6, Taf. II), welche ich als Nervenenden hingestellt habe. Wiederholen muss ich hier nun, dass ich dieselben auch diesmal immer und immer wieder fand, und dass es namentlich für sehr viele breite Fasern ganz unzweifelhaft ist, dass sie noch im Blattstroma enden. In solchen Fällen läuft die betreffende Faser spitz zu und liegt zwischen anderen Fasern des Bündels wie eingekeilt. Ich muss von vornherein dem Vorwurf begegnen, dass ich mich etwa durch Schnittenden täuschen liess. Meine Behauptungen gründen sich ausschliesslich auf klare Bilder von optischen Flächenschnitten. Die Bedeutung dieser Endigung ist vor der Hand unklar, denn meine frühere Hypothese[1]), dass selbe ebenfalls zur Perception schmeckbarer Substanzen dienen, muss ich als nicht stichhaltig fallen lassen, weil mir Injectionen mit

1) l. c. pag. 13 ff.

gefärbten Flüssigkeiten von der Oberfläche der Papille aus in das Innere der Knospen bis auf deren Grund nie gelungen sind.

Die Fig. 1, Taf. VII (Oelimmersion, Apert. 1.30, Oc. 4, Apochromat) diene zur Demonstration des Gesagten. Sie zeigt zwei benachbarte Längsfaserbündel in ihrem ganzen Verlauf. Sie ist, wie ich nebenbei bemerken will, nach einem verhältnissmässig einfachen Präparate gezeichnet. Um einen möglichst klaren Einblick über die Beziehungen der Ganglien zu den Nerven und den Bündeln zu bekommen, habe ich in Fig. 2 und 3 die Partien um *a* und *b* der Zeichnung 1 entsprechend der Vergrösserung mit Oc. 19 abgebildet. Selbe zeigen noch Verbindungen mit Fasern, welche an dem Uebersichtspräparate nicht zu Tage treten. Es rührt dieses davon her, dass in Fig. 1 das Bild des wirklichen und nur Einiges aus dem nächstfolgenden optischen Flächenschnitte wiedergegeben ist. Daher sind auch jene Fasern, welche scheinbar Endigungen zeigen, theils wirkliche Schnittenden (dunkler gehalten), theils sind deren Fortsetzungen in der Tiefe gelegen. Fasern und Geflechte, welche das Präparat noch unter den Längsbündeln zeigte, sind weggelassen und man hat sich zur Vollständigkeit der Zeichnung unter und zwischen den abgebildeten Nerven noch ein dem in Fig. 1, Taf. IV analoges Faserwerk hinzuzudenken. Mit diesem also standen einige der von den Ganglien der Fig. 2 und 3 weggehenden Fasern in Verbindung.

Ich habe jetzt noch das Geflecht auf dem Rinnen- und Nischengrunde zu besprechen.

Bei vielen Präparaten, sowohl ganzen Blättern als oberflächlichen Schnitten derselben, habe ich diesmal bei hoher Einstellung eine feine rothe oder dunkelviolette, von unten nach oben laufende Schraffirung beobachtet, ähnlich der, welche die hintere Wand des Blattes immer zeigt. Ich ziehe daraus den Schluss, dass auch die Knospenfläche des Blattes ein Grenzhäutchen abschliesst. Selbes muss jedoch um Vieles zarter sein als die Grenzmembran der Hinterfläche, denn sie setzt dem Messer bei der Herstellung der Schnitte kein Hinderniss entgegen, was der Fall ist, wenn man das Blatt von der Hinterfläche aus durchtrennen will.

Das in Rede stehende Geflecht liegt nun unter dieser Haut, denn wenn zugleich mit den Nerven auch die Schraffirung gekennzeichnet ist, zieht diese über demselben weg. Es entwickelt sich

theils aus den Längsfaserbündeln und zwar meistens in der eigenthümlichen Weise, dass ein und dieselbe zuhöchst in der Scheidewand verlaufende Remak'sche Faser in den Rinnen links und rechts Zweige abgibt (Fig. 4, Taf. VII), theils aus Fasern, welche unmittelbar aus dem Auffaserungsbezirke kommen. Das letztere gilt für den Anfang der Rinnen.

Gerade an diesen Stellen aber habe ich nun zu wiederholten Malen gesehen, dass die betreffenden Fasern in ein wirkliches Nervennetz übergehen, wie ich ein solches in Fig. 5, Taf. VII (Oelimmersion, Apert. 1.30, Oc. 18) gezeichnet habe. Es ist dasselbe, wie man an den Rissenden erkennt, nur ein Fragment, und es glückte mir beim Hasen nie, dasselbe vollständig zu erhalten, denn nachdem ich beim Kaninchen Präparate bekommen hatte, an denen die Knospennischen vollkommen erhalten waren und dieselben von den in Fig. 2, Taf. V abgebildeten korbartigen Netzen überzogen fand, zweifelte ich nicht mehr, dass dieselben auch constant beim Feldhasen vorkommen müssen und also das Geflecht unter der Grenzmembran schliesslich in ein die Nischen auskleidendes Netz übergehe. Die jedesmalige Zerstörung desselben erklärt sich aus der Abtragung des Epithels. Bei neuen Untersuchungen wird man auf dieses Netz ein besonderes Augenmerk richten müssen. Zwischen den Maschen des Geflechtes sieht man endlich Fasern oder Faserbündel aus der Tiefe kommen und am Grunde der Nischen, wenn selbe vorhanden sind, enden. Diese Fasern sind es nun, welche vermöge ihrer Richtung und Lage nur in den Knospen respective deren Sinneszellen enden können.

Wenn ich nun das Ergebniss meiner Untersuchungen über die Nerven des secundären Blattes zusammenfasse, so komme ich zu dem Schlusse: der Glossopharyngeus enthält nebst doppelt contourirten Nerven noch viele Remak'sche Fasern. Dessen Auffaserung findet bereits unterhalb der Knospenregion statt. Die Vorstellung also, dass sich dieser Nerv dadurch erschöpft, dass Stämmchen desselben unter die Knospen treten und nach und nach ihre Fasern an dieselben abgeben, ist unrichtig. Nur eine verhältnissmässig geringe, der Summe der »Sinneszellen« entsprechende Anzahl von Fasern geht direct zu den Knospen, um in ihnen in Form der Sinneszellen zu enden. Ein weitaus grösserer Theil derselben zieht zu Büscheln angeordnet durch die Längsscheidewände der Knospennischen bis an den Blattrand und

geht dort in das oberhalb der Knospen gelegene Epithel über. Viele Fasern enden aber auch schon im Blattstroma.

Unter der Knospenregion in der ganzen Dicke des Blattes befindet sich eine zusammenhängende Lage von Ganglienzellen, welche zur Vermehrung der Fasern beitragen. Denn wie eine oberflächliche Schätzung ergibt, übertrifft die Summe der Querschnitte der Nerven von nur einigen Blättern gewiss den Querschnitt des Stammes des Glossopharyngeus. Ausser den Ganglien sind in die Nerven noch ganglienähnliche Massen eingefügt, welche möglicher Weise das Material für regenerative Processe bilden. Jede Knospennische ist von einem Nervennetze überzogen, in welches das unter der Basalmembran des Nischengrundes befindliche Geflecht übergeht.

Ueber die Nerven des primären Blattes habe ich nichts Neues zu sagen. Wohl aber habe ich in Bezug auf die Anatomie des Blattes selbst einen Irrthum zu berichten, dem ich bei meiner ersten Untersuchung anheimgefallen bin. Was ich damals als Lymphgefäss aufgefasst habe, ist ein venöser Sinus, welcher unter den verschiedensten Formen auftritt. Eine solche zeigt Fig. 2, Taf. III. Verleitet zu meiner falschen Auffassung wurde ich einst hauptsächlich durch die Form des Gefässes und durch den Umstand, dass ich dasselbe stets leer von Blut fand. Zudem wurde ich in meiner Ansicht noch durch eine früher erschienene Arbeit KLEIN's[1]) bestärkt, welcher auf Einstichinjectionen hin das in Rede stehende Gefäss ebenfalls für ein Lymphgefäss erklärte. Der Abfluss des Blutes aus den Sinusen findet hauptsächlich gegen die innere Seite der Papille hin statt. Dort geben selbe zunächst Anastomosen unter sich ein, welche schliesslich zu den daselbst befindlichen grösseren Venen führen.

Ueber den Bau der Pap. circumvallatae des Hasen und Kaninchen und über die Nerven in jenen kann ich mich kurz fassen.

An einem aus der Mitte einer z. B. in FLEMING'scher Mischung erhärteten Papille hergestellten senkrechten Schnittpräparate sieht man, dass die Knospen nicht nur an beiden Seiten des Stromas der Papille, sondern auch auf der äusseren Umwallung des Grabens aufsitzen. Sie beginnen in einiger Höhe vom Grabengrunde an gerechnet und ihr Bezirk erstreckt sich nicht über den Graben hinaus. Das

1) Appendix B zu der im Jahre 1873 erschienenen Schrift: The anatomy of the lymphatic system.

Papillarstroma erscheint in Zapfen, welche sich in ein mächtig entwickeltes Epithel einsenken, das in den tiefsten Lagen zahlreiche Mitosen aufweist. Solche trifft man auch in den Knospen selbst an.

An Querschnitten zeigt sich die dem Graben entsprechende kreisförmige Furche beiderseits von Knospen eingesäumt (Fig. 4, Taf. I). Dieselben reihen sich sowohl an der äusseren wie inneren Peripherie in einzelnen Fällen ununterbrochen eine neben der andern an, meistens aber sind diese Reihen auf kürzere oder längere Strecken hin durch Epithelbrücken unterbrochen (Fig. 4, Taf. I). An den tiefsten Schnitten, welche eben den Boden des Grabens tangiren, sieht man auf jenem die Querschnitte der Drüsenausführungsgänge in einem Kreise angeordnet, innerhalb welches Quer-, Schief- und Längsschnitte doppelt contourirter Nervenbündel erscheinen. An der Fig. 2, Taf. I erkennt man ferner, dass sich sowohl die innere als äussere Knospenreihe an einen bindegewebigen Streifen anlehnt, auf welchen resp. nach innen und aussen eine breite Epithellage folgt. Combinirt man nun Längs- und Querschnitt und vergleicht damit noch die Fig. 3, Taf. I abgebildete, vom Epithel befreite Papille, so wird der Gesammtbau einer solchen verständlich. Daraus geht hervor, dass die Knospen in der Pap. circumvallatae ebenfalls auf Blättern aufsitzen, welche sowohl innerhalb des Wallgrabens als ausserhalb desselben die Papillen umkreisen. Diese Blätter entsprechen nun in Bezug auf ihren feineren histologischen Bau, die Vertheilung und Anordnung der Nerven in ihnen vollkommen den secundären Blättern der Pap. foliatae.

Der Querschnitt Fig. 4, Taf. I zeigt ausserdem noch seitlich nach aussen ein grosses Gefäss (*VS*). Es ist dies ebenfalls ein venöser Sinus, welcher sich, wie Schnittserien zeigen, ziemlich tief in das Parenchym der Zunge hinein erstreckt. Ich halte ihn für das Analogon des Sinus in den primären Blättern der Pap. foliatae. Merkwürdig ist, dass durch denselben oft Ausführungsgänge der Drüsen hindurch gehen.

Ueber die Pap. circumvallatae der übrigen von mir untersuchten Thiere will ich hier als vorläufige Mittheilung Folgendes bemerken.

Das Stroma derselben erhebt sich aus dem Bindegewebe der Zunge mit einem ringsum vollkommen glatten Halse von mässiger Höhe und verbreitert sich dann pilzförmig, bei den verschiedenen Thieren in verschieden ausgedehntem Maasse, am stärksten beim Schweine. An der Verbreiterungsstelle verliert sich die Glätte des Halses und es

treten niedrige spitz zulaufende Fältchen in ziemlich regelmässigen Abständen, auf die Peripherie der Papille bezogen, aus dem Stroma hervor. Bald nehmen diese an Höhe zu, werden in meridianer Richtung länger und setzen sich schliesslich nach oben in förmliche Blätter mit secundären plattgedrückten Papillen fort. Die Papillen sind also mit Blättern bedeckt, welche, niedrig und vereinzelt beginnend, allmählich höher werdend, nach Art einer Halskrause dieselben bis zu zwei Drittel ihrer Höhe umgeben. Von hier an erheben sich aus dem Stroma spitz zulaufende Zapfen, welche im regellosen Durcheinander die übrige Oberfläche bedecken. Die Knospen sitzen nun auf den Falten, und diesen habe ich hauptsächlich meine Aufmerksamkeit, die Nerven betreffend, zugewendet.

Eigenthümlich ist das Stroma der Pap. circumv. der Fledermaus. Es zeigt immer die Form eines Kelches. Im Uebrigen sind die Falten an dem Umfange ebenso beschaffen, wie bei den Papillen der übrigen Thiere.

Auch weitere Beobachtungen über die Wirkungen direct an die Papillen applicirter chemischer, mechanischer und electrischer Reize habe ich diessmal wieder angestellt. Das Ziel, welches ich dabei vor Augen hatte, war, zu untersuchen, welche Erscheinungen überhaupt verschiedene schmeckbare Substanzen an sich, auf oder in die Nähe der Papillen gebracht, hervorriefen und wie sich diese Erscheinungen ändern, wenn dieselben Substanzen auf Papillen gebracht wurden, deren Geschmacksnerv durchschnitten worden war. Ebenso wollte ich auch meine früheren Versuche mechanischer und electrischer Reizungen an normalen Kaninchen und solchen mit excidirtem Glossopharyngens controliren.

Zu dem Ende hatte ich bei einer Anzahl Kaninchen aus dem Glossopharyngeus der einen Seite unmittelbar vor seinem Eintritte in die Zunge ein Stück von ungefähr 4—5 mm Länge ausgeschnitten. An diesen experimentirte ich in Zwischenzeiten von 10 zu 10 Tagen. Die Operation zur Bloslegung der Papillen wurde in der von mir schon beschriebenen[1]) Weise ausgeführt. Nur habe ich diesmal die Thiere durch Injection von 6—10 cmm einer 10%igen Chloralhydratlösung in die Vena cruralis narcotisirt und die Zunge immer so weit

1) l. c. pag. 38 ff.

lospräparirt, dass ich auch die beiden Pap. circumvallatae übersehen konnte. Eines der Kaninchen wurde 6 Monate nach der Durchschneidung des Nerven der Untersuchung unterzogen. Ueberdies wurden auch Kaninchen vorgenommen, an welchen der Glossopharyngeus nicht durchschnitten wurde.

Ich will nun zunächst die Unterschiede hervorheben, welche eine normale Papille und eine Papille 30 Tage nach der Durchschneidung des Geschmacksnerven zeigt. Die blosgelegte normale Papille habe ich beschrieben »als bläulich gefärbten, etwas geschwellten elliptischen Körper, von welchem an der hinteren und inneren Seite gegen den Zungengrund hin jederseits ein stark injicirtes Gefässbündel abgeht. Die Papillenfurchen lassen sich ganz deutlich erkennen und sind mit Flüssigkeit gefüllt.«

Ich muss dieser Beschreibung jetzt noch hinzufügen, dass auch an dem vorderen inneren Rande der Pap. fol. constant eine von vorn nach hinten laufende Vene sichtbar ist, welche, ebenfalls stets prall gefüllt, in Verbindung mit den Sinusen der primären Blätter steht. Ferner fallen die knospentragenden Blätter bei Betrachtung mit der Lupe als graulich weisse Streifen auf, neben den primären Blättern gelegen, welche letztere durch die in ihnen befindlichen injicirten Sinuse zu erkennen sind. Das cyanotische Ansehen verdanken mithin die Papillen fast ausschliesslich den Centralgefässen der primären Blätter.

Ein ganz anderes Aussehen bietet die abnormale Papille dar. Sie erscheint vor Allem in der Richtung von hinten nach vorn verkürzt, d. h. wenn man an ihr nur die Blätter und Furchen in Betracht zieht und damit die der gesunden Papille vergleicht, so ergibt sich, dass eine Anzahl derselben verschwunden ist. An Stelle derselben erscheint eine weissliche eigenthümlich geformte, vertiefte atrophische Stelle, aus welcher sich ganz deutlich erkennen lässt, wie weit die Papille einst nach vorn reichte. Doch ist die Abgrenzung der atrophischen Stelle gegen die übrige Partie der Papille nicht scharf ausgedrückt. Die noch vorhandenen knospentragenden Blätter sind nicht mehr deutlich zu erkennen und die primären Blätter nur mehr schwach mit Blut gefüllt, daher auch das Gesammtaussehen dieses Papillentheiles im Vergleiche mit der gesunden Papille ein blasses ist. Nur der innere Rand erscheint noch bläulich. Von der oben angeführten Vene ist nichts mehr zu sehen.

Analoge Veränderungen zeigen nun alle Papillen kürzere oder längere Zeit nach Durchschneidung des Glossopharyngeus, und es ergibt sich aus ihrer Nebeneinanderstellung, dass die Atrophie der Papillen vorn beginnt und allmählich nach rückwärts greift. Wenn man nun irgend eine schmeckbare Substanz, sei es im gelösten oder ungelösten Zustande, mit einer normalen Papille in Berührung bringt, so beginnen sofort ausnahmslos die Binnendrüsen der Zunge zu seceniren, die Papille wird von einem wasserklaren Secret überströmt und unmittelbar darauf wird selbe scharlachroth. Kurze Zeit nachher sistirt die Secretion wieder und die bläuliche Farbe der Papille kehrt zurück. Werden Stoffe in minimalen Dosen in Substanz angewendet, so hält die Secretion längere Zeit an, anscheinend bis der betreffende Körper gelöst und vom Secrete fortgespült ist. Bestreicht man die Papille mit einer 2%igen Cocaïnlösung, so secerniren die Drüsen während dieser Manipulation. Werden einige Zeit nachher wieder schmeckbare Substanzen in Anwendung gebracht, so vergeht eine beträchtliche Zeit, bis sich Secretion einstellt. Während der Secretion lässt sich jedesmal durch die Lupe ein leises Flimmern der Papillenblätter wahrnehmen, und nach derselben oder auch während derselben macht das Thier Schluckbewegungen, welche absolut fehlen, wenn mit dem Experimente ausgesetzt wird. Wurde die Operation rasch ausgeführt und ohne vielen Blutverlust, so treten dieselben Erscheinungen zu Tage, wenn man die betreffenden Substanzen nicht direct auf die Papillen, sondern in einiger Entfernung von ihnen auf die Zunge bringt. Ob es sich in diesem Falle nur darum handelt, dass die rasch auf der Zungenoberfläche auseinanderfliessenden gelösten Substanzen erst bei ihrem Uebertritte auf die Papillen die Drüsen reflectorisch zur Secretion anregen oder dies auch von andern, von den Papillen entfernten Stellen aus stattfindet, kann ich nicht entscheiden. Wahrscheinlichkeit für sich hat erstere Annahme.

Diese Versuche stellte ich mit verdünnten Säuren und Alkalien, mit Salzen, mit Zuckerarten, mit Chinin und Quassiaextract an. Alle diese Substanzen ergaben die nämlichen Resultate.

Wenn man normale Papillen mechanisch reizt, indem man entweder mit einem Glasstabe auf dieselben drückt oder quer über ihre Falten mit einem Pinsel wiederholt hinstreicht, so erhält man keine Secretion. Diese stellt sich aber ein, wenn man eine fein-

geknöpfte Nadel oder eine Schweinsborste in eine Furche einführt und innerhalb derselben hin und her bewegt.

Electrische Reize, selbst die schwächsten Inductionsschläge auf die Oberfläche normaler Papillen applicirt, lösen profuse Secretion aus. Selbe erhält man auch, wie bereits von mir mitgetheilt wurde, wenn man unmittelbar nach der Durchschneidung des Glossopharyngeus den peripheren Stumpf reizt. Keine Secretion erzielt man an der gesunden Papille, wenn der centrale Stumpf gereizt wird. Wenn man alle diese Versuche an Papillen wiederholt, an welchen der zutretende Nerv längere Zeit vorher durchschnitten worden war, so ändern sich die Erscheinungen in beträchtlicher Weise.

Acht Tage nach der Operation zeigt die betreffende Papille noch keine bedeutende für das blosse Auge sichtbare Aenderung in ihrem Aeusseren. Reizung des noch vorhandenen peripheren Stumpfes ergibt aber keine Secretion mehr. Ebenso bleiben die Versuche mit schmeckbaren Substanzen in dieser Beziehung erfolglos. Wird aber die Oberfläche der Papille electrisch gereizt, so erhält man zwar Secret, aber in spärlicher Menge, und die Inductionsschläge müssen ungleich stärker sein, als jene, mit welchen man die Secretion an der normalen Papille in Anregung bringen kann. Je länger die Zeit ist, welche zwischen Durchschneidung des Nerven und Reizungsversuch liegt, desto kräftigerer Ströme bedarf es, um noch eine Wirkung auf die Drüsen zu erzielen, und vom 35. bis 40. Tage ab stellt sich überhaupt keine Secretion mehr ein. Das Secret scheint auch an Alkalescenz einzubüssen.

Bei dem Kaninchen, welches 6 Monate nach der Durchschneidung des Glossopharyngeus untersucht wurde, waren beide Nervenstumpfe wieder vereinigt. Die Papille selbst erwies sich mit Bezug auf die an ihr angestellten Experimente als vollkommen normal functionirend.

Noch habe ich anzuführen, dass ich meine Versuche auch an einem Kaninchen angestellt habe, dessen Trigeminus intercraniär durchschnitten wurde. Einen Einfluss dieser Operation auf die nachfolgenden Experimente an der Papille der entsprechenden Seite habe ich nicht gefunden. Auch Reizung des Halssympathicus hatte keinen weiteren Erfolg, als Blasswerden der Papille und ihrer Umgebung.

Ausser der directen Reizung des Glossopharyngeus und der Papillen werden die Zungendrüsen noch durch Injection von Pilocarpin

zur Secretion angeregt. Kurz nach der Einspritzung von einen ccm einer 1 %igen Lösung beginnt das Hervorquellen des Secretes. Es ist klar und etwas fadenziehend und reagirt alkalisch. Nach einiger Zeit, während welcher die Papille roth bleibt, wird es zähflüssig. Die Papille nimmt dann eine dunkelblaue Farbe an. Ich konnte diesmal bei der mikroskopischen Untersuchung des dünnflüssigen Secretes den Speichelkörperchen ähnliche Gebilde finden.

Was den mikroskopischen Befund der abnormalen Papillen betrifft, so fand ich im Ganzen nur bestätigt, was schon v. Vintschgau und Hönigschmid beschrieben haben. Meine Aufmerksamkeit lenkte sich aber hauptsächlich auf die Drüsen, Gefässe, namentlich den Sinus des primären Blattes, und die Nerven. Dass hierin grosse Veränderungen Platz greifen, lassen schon Schnittserien aus den in Chromsäure erhärteten Papillen erkennen. Ich will die bezüglichen Befunde aber später veröffentlichen.

Die angestellten Versuche ergeben nun, dass überhaupt alle schmeckbaren Substanzen, auf oder in die Nähe der Geschmackspapillen gebracht, Secretion der in die Blätterfurchen und Wallgräben einmündenden Zungendrüsen hervorrufen. Diese Secretion wird auf reflectorischem Wege ausgelöst, und ich muss meine frühere Annahme, dass diesen Reflex hauptsächlich der über den Knospen befindliche intraepithele Nervenplexus vermittelt, aufrecht erhalten. Nicht eindeutig sind die Resultate der electrischen Reizung. Hier können sowohl electrolytische Producte, wie in die Tiefe dringende Stromschleifen in Betracht kommen. Schwer zu erklären ist die Wirkung electrischer Reizungen auf die Drüsen nach lange vorausgegangener Durchschneidung des Glossopharyngeus. Die Frage, ob noch functionirende Ganglien und von diesen abzweigende und zu den Drüsen hinziehende Fasern in Erwägung gezogen werden können, muss offen bleiben. Das Drüsensecret dient zur Wegspülung gelöster schmeckbarer Substanzen, zur fortwährenden Reinigung der Papillen. Die Zeit, welche zwischen der Berührung der Papille mit einer schmeckbaren Substanz und der folgenden Secretion verfliesst, muss eine derartige sein, dass die betreffende Substanz in Lösung bis an die Knospen vordringt. Doch bleibt die Annahme nicht ausgeschlossen, dass über die ganze Papille geschmackempfindende Fasern verbreitet sind, welche frei enden.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Bindegewebiges Stroma eines Theiles der Pap. foliatae des Feldhasen. *PBl* die primären, *SBl* die secundären Blätter. In letzteren sind stellenweise die Nischen für die Knospen erhalten. Man sieht, dass in der Regel je zwei Paare von secundären Blättern durch ein primäres getrennt sind. Doch kann sich ein secundäres Blattpaar gabelig theilen, Partie bei *a*; jeder Theil bildet wieder zwei Blätter, und beide Theile schliessen ein kurzes primäres Blatt zwischen sich. Desgleichen können sich auch zwei primäre Blätter zwischen je zwei secundäre Blattpaare einschieben, Partie bei *b*. Goldpräparat, Epithel durch Scalpell und Pinsel entfernt, Lupenvergrösserung.

Fig. 2. Senkrechter Schnitt durch eine in Chromsäure gehärtete, natürlich injicirte Pap. foliatae des Feldhasen. *SBl* secundäre, *PBl* primäre Blätter, *KR* Knospenregion, *B* die Region der ersteren Blätter, in welcher die Auffaserung des Glossopharyngeus stattfindet. *VS* der venöse Sinus in den primären Blättern, *DA* Ausführungsgänge der Drüsen, *ab*, *cd*, *cd* gibt die Schnittführung für die Abspaltung der secundären Blätter an. Haematoxilinfärbung, Lupenvergrösserung.

Fig. 3. Bindegewebiges Stroma der Pap. circumvallatae des Kaninchens. *K*, *K* die knospentragenden Blätter, *W* Wallgraben. Goldpräparat, Lupenvergrösserung.

Fig. 4. Mittlerer Querschnitt durch eine in FLEMING'schem Gemisch gehärtete Pap. circumvallatae des Feldhasen, mit Haematoxilin gefärbt. *Ep* Epithel, *K* Knospen, *St* Bindegewebsstroma, *SlD* Schleimdrüsen, *VS* venöser Sinus, *W* Wallgraben, *DA* Drüsenausführungsgang. Lupenvergrösserung.

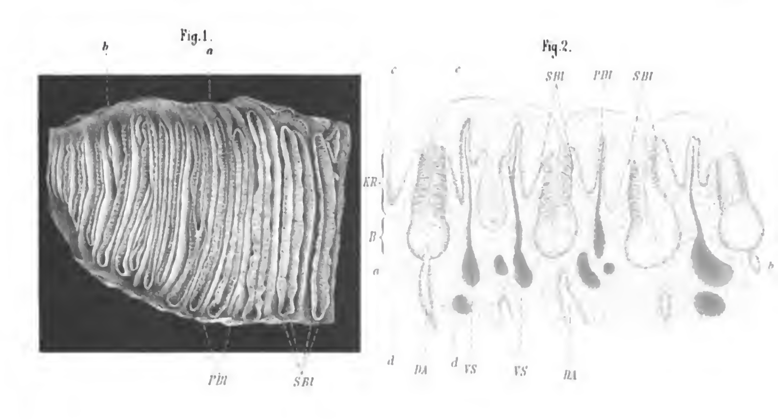


Fig. 3.

W

Fig. 4

St

Ep

h

W

K

K

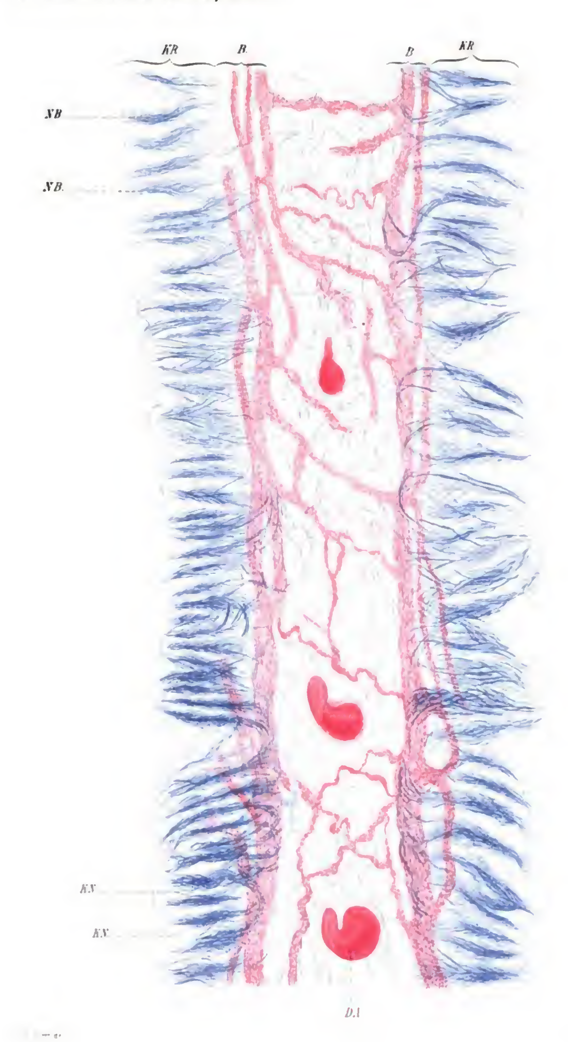
St D

DA

VS

Tafel II.

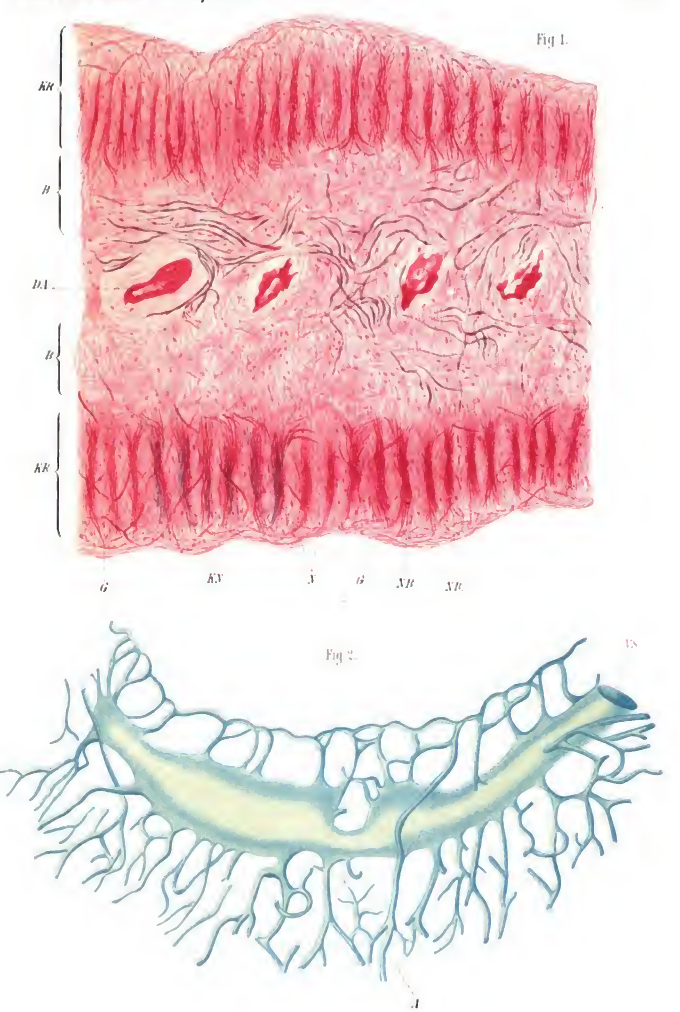
Fig. 1. Zwei einander gegenüberliegende Blätter aus der Pap. foliatae des Hasen, ausgebreitet. Uebersichtspräparat für die in den Längsscheidewänden verlaufenden Nervenbündel, und den Plexus am Grunde des Wallgrabens. Der grobe Plexus des Glossopharyngeus war im Originalpräparate ebenfalls blau reducirt und wurde nur der leichteren Uebersicht wegen roth gezeichnet. Die Auffaserungsregion desselben *B* erscheint verkürzt. Der Grund liegt darin, dass zwischen Deckglas und Objectträger das Präparat vor Druck schützende Glassplitter eingeschoben wurden und dadurch die beiden Blätter nicht vollständig auseinander gebreitet werden konnten. *NB* die Nervenbündel, *KN* Knospenrinnen, *KR* Knospenregion, *DA* Drüsenausführungsgänge. Entworfen mit Zeiss A Oc. 2, ausgeführt mit Zeiss D Oc. 2.


KR
B.
B
KR
NB
NB.
KN
KN
D.A

Tafel III.

Fig. 1. Ebenfalls zwei ausgebreitete secundäre Blätter der Pap. foliatae des Hasen. Rothe Reduction. Bezeichnung wie in Fig. der Tafel II. *G* Gefässe. Entworfen und ausgeführt wie oben.

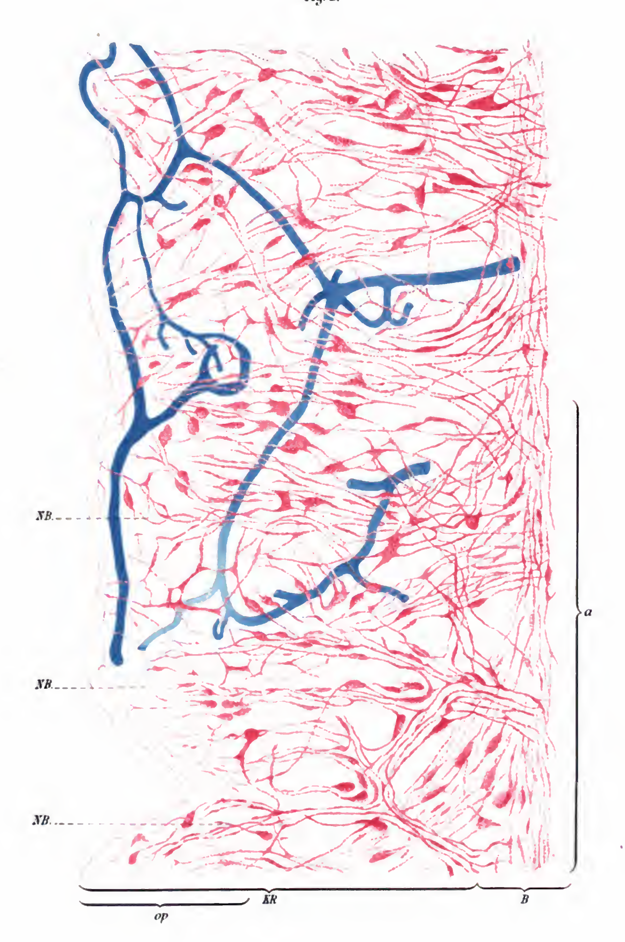
Fig. 2. Uebersichtspräparat über die Anordnung der Gefässe im primären Blatte und ihre Beziehung zu dem venösen Sinus *VS*. *A* eine Arterie, aus welcher ein Theil der längs der Blattfirste hinziehenden Capillaren entsteht. Lupenvergrösserung.


Fig. 1.
KR
B
DA
B
KR
G
KN
N
G
NB
NB
Fig. 2.
A

Tafel IV.

Fig. 1. Schnitt aus der Tiefe eines secundären Blattes der Pap. foliatae des Hasen. Der Schnitt konnte nur bis an den Anfang der mit *op* bezeichneten Gegend geführt werden und es wurden die in jener enthaltenen Nerven aus dem optischen Querschnitt abgebildet. Bezeichnung von *KR* und *B* wie früher. *NB* bedeuten die Nerven, welche den in den Längsscheidewänden verlaufenden Bündeln angehören. Das Präparat war nicht injicirt, nur aus den mehrfach angeführten Gründen das Gefäss blau angelegt. Entworfen und ausgeführt mit Oelimmersion, Apert. 1.30, Oc. 8, Apochromat Zeiss.

Fig. 1.

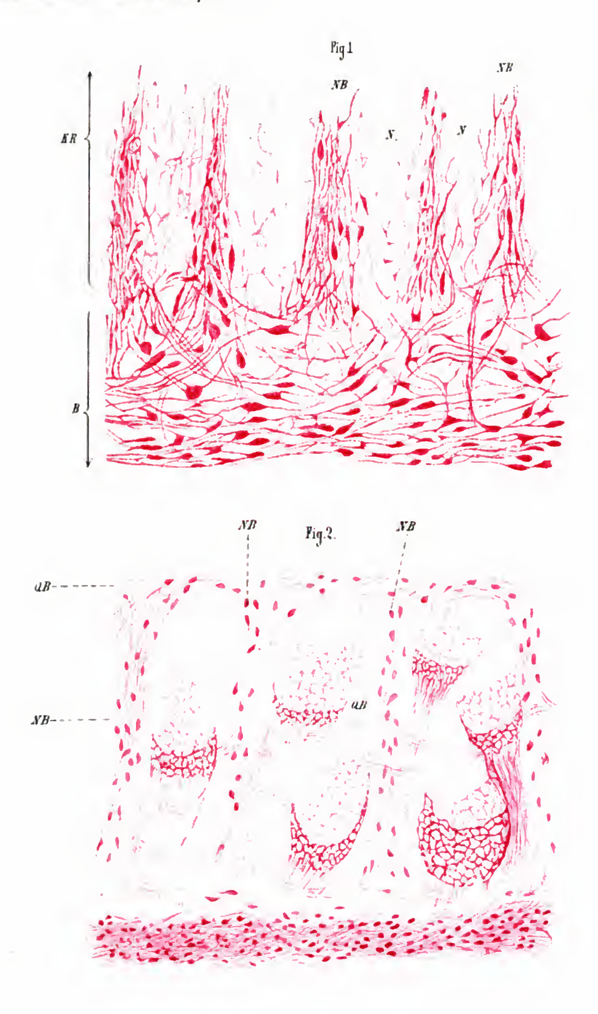


Reinert del. Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig

Tafel V.

Fig. 1. Jener Theil des Blattes, welcher vom Präparate der Fig. 1, Taf. IV in der Strecke *a* bis nach *op* hin abgetrennt wurde. *N* das auf dem Nischengrunde enthaltene Geflecht. Die Bündel *NB* aus dem optischen Querschnitte entnommen. Entwurf und Ausführung wie oben.

Fig. 2. Unterer Theil eines secundären Blattes aus der Pap. foliatae des Kaninchens. Selber zeigte die Knospennischen vollkommen erhalten. *W* der in meiner ersten Abhandlung als Wulst bezeichnete Theil des Auffaserungsbezirkes. *NB* die längs verlaufenden Nervenbündel, *QB* Bündel in den Querscheidewänden. Die wie Körbe angeordneten Netze hängen mit den Nervenbündeln zusammen. Entwurf und Ausführung wie oben.



Ruchert del.
Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Tafel VI.

Fig. 1. Theil eines secundären Blattes der Pap. foliatae des Hasen. In der Strecke *b* ist das Blatt vollständig, in *a* abgespalten. Erstere Region zeigt wieder einen bestimmten optischen Flächenschnitt der Längsfaserbündel; in denselben sind keine Ganglien sichtbar. Selbe treten allmählich auf und mehren sich gegen den Theil *a* hin, welcher die Nerven des wirklichen Flächenschnittes zeigt. *KR*, *B* wie oben. Gezeichnet mit Oelimmersion. Oc. 4, Apochromat Zeiss.

Fig. 2. Aus einem mit Berlinerblau injicirten Geschmacksorgane des Kaninchens. Analogon der Fig. 1, Taf. IV.

Fig. 1.

KR

B

a

b

Fig. 2.



Tafel VII.

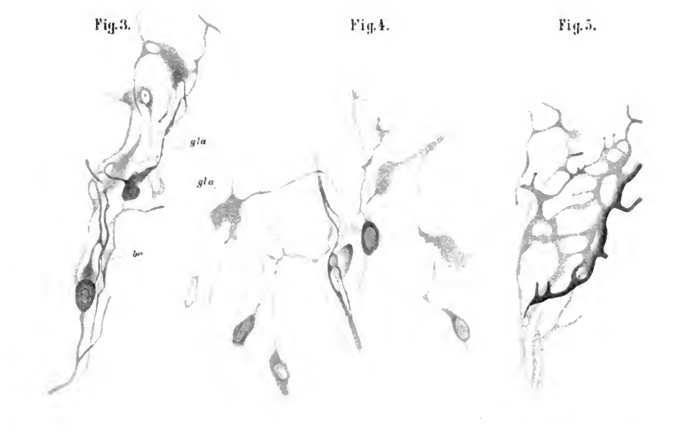
Fig. 1. Schnitt ungefähr durch die Mitte eines secundären Blattes der Pap. foliatae des Hasen. *N*, *N* zwei Längsfaserbündel, *G* Gefässe. Die anscheinenden Endigungen der Nerven sind theils wirkliche Schnittenden (kräftiger schattirt), theils hat man sich die Fortsetzung derselben in der Blatttiefe zu denken. Gezeichnet und ausgeführt mit Oelimmersion. Oc. 8, Apochromat.

Fig. 2 und 3. Die Partien *a* und *b* der Fig. 1 mit Oc. 19 vergrössert gezeichnet. *br* Verbindungsbrücke zweier Fasern.

Fig. 4. Eine Remak'sche Faser aus dem Kamme einer Längsscheidewand und ihr Zusammenhang mit einem Theile des Netzes auf dem Rinnengrunde. Ueberdies Ganglien und ihnen ähnliche Gebilde. Vergleiche Fig. 1, Taf. V, *N*. Oelimmersion, Oc. 19.

Fig. 5. Fragment aus dem Netze einer Knospennische vom Hasen. Analogon der in Fig. 2, Taf. V dargestellten Körbe.

Fig. 1. Fig. 2.



Tafel VIII.

Fig. 1. Schnitt aus der tiefsten Schicht eines secundären Blattes der Pap. foliatae des Hasen. *Dp N* eine doppelt contourirte Faser, welche hoch in das Blatt hinauf zu verfolgen ist. *G* Gefässe, *St* die Schraffirung der hinteren Wand. Oelimmersion, Oc. 8.

Fig. 2. Partien aus zwei benachbarten Längsfaserbündeln und aus tiefer Lage mit Oelimmersion und Oc. 19 gezeichnet. *pf* Primitivfibrillen, *fb* Fibrillenbündel (nackte Achsencylinder), *rn* Remak'sche Fasern, *gl* Ganglien, *gla* ganglienartige Anschwellungen, *br* Verbindungsbrücke zweier Fasern, *bf* breite Fasern.

Fig. 3. Partie von Ganglien und ganglienartigen Gebilden aus einem secundären Blatte des Hasen. Oelimmersion, Oc. 19.

Fig. 1

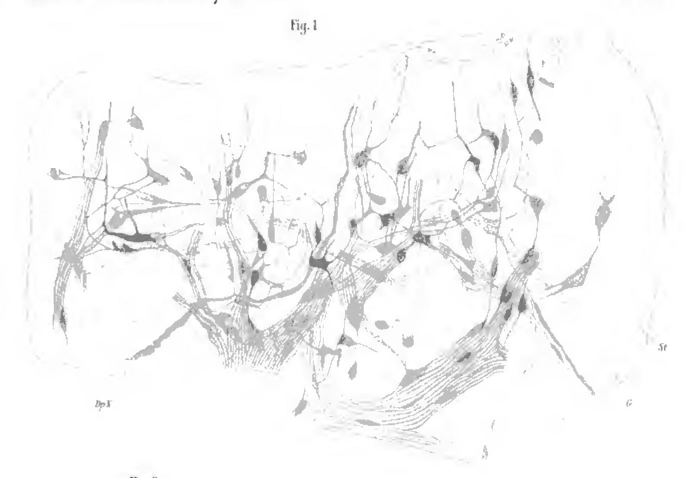


Fig. 2.

Fig. 3.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

ACHTZEHNTE ABHANDLUNG.

FORTSETZUNG DER VERSUCHE ÜBER DAS ELEKTRISCHE VERHALTEN DER QUARZ- UND DER BORACITKRYSTALLE.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VI.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Vom Verfasser übergeben den 27. Juli 1887.
Der Abdruck vollendet den 8. October 1887.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

ACHTZEHNTE ABHANDLUNG.

FORTSETZUNG DER VERSUCHE ÜBER DAS ELEKTRISCHE VERHALTEN DER QUARZ- UND DER BORACITKRYSTALLE.

I. Thermo- und piëzoelektrisches Verhalten der Quarzkrystalle von Suttrop bei Warstein in Westphalen.

In der Abhandlung über die Pyroelektricität des Quarzes in Bezug auf sein krystallographisches System[1]) theilt Herr von Kolenko eine Untersuchung der bei Suttrop (Warstein) in Westphalen vorkommenden Quarzkrystalle mit, und zeigt, dass die von ihm der Prüfung unterworfenen Exemplare als aus einer Verwachsung rechter und linker Individuen entstandene Zwillinge aufzufassen sind.

Diese Krystalle waren mir bei meinen Untersuchungen über die elektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles[2]) nicht bekannt gewesen. Es ist mir jetzt gelungen, eine Anzahl derselben, wenn auch von nur geringer Grösse, zu erlangen und ich bin dadurch in den Stand gesetzt worden, ihr thermoelektrisches Verhalten mittelst meines Elektrometers einer genauen Prüfung zu unterwerfen.

Herr von Kolenko hat bei seinen Versuchen das von Herrn Kundt vorgeschlagene Bestäubungsverfahren angewandt. Er erhitzte die Krystalle bis etwa 50° C. in einem Luftbade, überfuhr sie mit der Flamme einer Alkohollampe und bestäubte sie dann mit einem Gemenge aus Mennige und Schwefel. Dabei erschienen auf den von ihm untersuchten Exemplaren die Kanten des Prismas gelb, während auf den Flächen desselben sich mehrere rothe Streifen zeigten. Herr von Kolenko schloss nun aus dieser Vertheilung des Schwefels und

---

1) Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie von Groth. Bd. 9. S. 1—28. Herr von Kolenko nennt den Fundort Lutrop; derselbe heisst aber Suttrop, ein kleines Dorf bei Warstein im Kreise und Regierungsbezirk Arensberg.

2) Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XIII. S. 319—392 (1866) und Bd. XX. S. 459—547 (1881).

der Mennige, dass thermoelektrisch beim Erkalten die Kanten positiv und die Flächen negativ elektrisch wären.

In einem Aufsatze in WIEDEMANN's Annalen Bd. 26, S. 150—156 habe ich aber gezeigt, dass dieser Schluss nicht richtig ist. Herr VON KOLENKO überführt die Krystalle mit der Alkoholflamme in der Absicht, die Oberfläche derselben von jeder Elektricität zu reinigen. In meiner Abhandlung »Ueber die aktino- und piëzoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen« ist von mir in einem besonderen Abschnitte[1]) unter der Ueberschrift: »Ueber die Wirkung des Ueberstreichens eines Bergkrystalles mit einer Alkoholflamme« der Nachweis geführt worden, dass bei einem solchen Ueberstreichen auf der Oberfläche des Bergkrystalles eine starke Elektricität künstlich angehäuft wird. Durch die Flamme wird nämlich im Krystalle die Aktinoelektricität erregt; durch diese wird nun aus der leitenden Flamme die entgegengesetzte Elektricität nach der Oberfläche des Krystalles gezogen, daselbst angehäuft und gebunden. Nach dem Zurückziehen der Flamme verschwindet in ungefähr 40 Secunden die Aktinoelektricität im Krystalle, während die auf der Oberfläche angehäufte gebundene Elektricität durch die isolirenden Eigenschaften derselben erhalten bleibt und frei wird. Die von Herrn VON KOLENKO zuvor ausgeführte Erwärmung bis 50° C. dient nur dazu, diese isolirende Eigenschaft zu erhöhen.

Nun ist die bei einer Bestrahlung an einer Kante auftretende Aktinoelektricität dieselbe, welche thermoelektrisch beim Erkalten daselbst beobachtet wird. Die mittelst des Ueberstreichens mit der Flamme auf der Oberfläche künstlich angehäufte Elektricität ist also gerade derjenigen, welche die betreffende Kante beim Erkalten zeigt, entgegengesetzt.

Bei dem Bestäuben nach dem Ueberstreichen mit der Flamme sind, einen vollkommenen Zwilling vorausgesetzt, infolge der auf der Oberfläche des Krystalles künstlich angehäuften Elektricität in der That die Kanten positiv und die Flächen negativ. Soll nun aus dieser Vertheilung ein Schluss auf das thermoelektrische Verhalten während des Erkaltens gemacht werden, so sind die beiden elektrischen Modificationen gerade zu vertauschen. Aus den Bestäubungsversuchen

1) Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XX. S. 521—529.

des Herrn von KOLENKO folgt also als Resultat, dass die von ihm geprüften Krystalle von Suttrop aus rechten und linken Individuen gebildete Zwillinge sind, an welchen thermoelektrisch beim Erkalten die Kanten des Prismas negative, die Flächen aber positive Elektricität besitzen.

Da die durch die Bestäubung sichtbar gemachte elektrische Vertheilung nicht direct durch die Thermoelektricität, sondern durch das Auftreten und Verschwinden der Aktinoelektricität hervorgerufen ist, so kann man aus den hierbei gewonnenen Zeichnungen nur im Allgemeinen einen Schluss auf einzelne thermoelektrische Vorgänge machen, weil zwischen der Thermoelektricität und der Aktinoelektricität zwar eine gewisse Beziehung stattfindet, alle Vorgänge der Thermoelektricität aber nicht in der aktinoelektrischen Vertheilung erscheinen und daher auch durch das Bestäubungsverfahren, wie es durch Herrn von KOLENKO ausgeübt worden, nicht zur Anschauung gebracht werden können.

Ausserdem ist die Bestäubung auch nicht ausreichend empfindlich, um feinere Unterschiede in der elektrischen Vertheilung darzustellen.

Es schien mir daher nöthig, die Quarzkrystalle von Suttrop einer genauen Prüfung mittelst des von mir bisher angewandten Verfahrens, welches sämmtliche thermoelektrische Vorgänge der Beobachtung zugänglich macht, zu unterwerfen. Eine solche Prüfung in Bezug auf das thermo- und ebenso auf das piëzoelektrische Verhalten hat nun gezeigt, dass die von Herrn von KOLENKO aufgestellte Ansicht im Allgemeinen richtig ist, dass aber die Zusammensetzung dieser Krystalle überhaupt eine viel complicirtere ist, als von ihm angenommen worden.

A. Gestalt und Beschaffenheit der Quarzkrystalle von Suttrop.

Die Quarzkrystalle von Suttrop sind häufig ringsum sehr vollkommen ausgebildet und tragen an jedem Ende abwechselnd grosse und kleine Pyramidenflächen, dergestalt, dass eine Prismenfläche, welche oben eine grosse Pyramidenfläche zeigt, unten eine kleine besitzt und umgekehrt. Ihrer Gestalt nach könnten dieselben also vollständig normal ausgebildete einfache Individuen sein. Indess ist

der Unterschied zwischen den grossen und kleinen Pyramidenflächen bei ihnen nicht so beträchtlich, wie er bei wirklich einfachen Krystallen vorkommt. Während bei diesen letzteren die kleinen Flächen oft um das 50- bis 100fache von den grossen Flächen an Ausdehnung übertroffen werden, ist das Verhältniss zwischen den beiden Flächengruppen bei den Suttroper Krystallen wie 1 : 2 oder höchstens wie 1 : 3.

Nach meiner Ansicht haben wir bei den Krystallformen des Quarzes nicht eine tetartoedrische, sondern vielmehr eine hemimorphe Bildung[1]) vor uns. Die an ihm auftretenden trigonalen Trapezoeder und Pyramiden sind hemimorphe Ausbildungen der hexagonalen Trapezoeder und der Pyramiden zweiter Ordnung, deren Flächen nur an den beim Erkalten elektrisch positiven Enden der Nebenachsen auftreten, während sie an den negativen fehlen. Ferner sind die grossen Pyramidenflächen zu betrachten als die Flächen eines trigonalen Trapezoeders, bei welchem der Ableitungscoefficient für die Nebenachse $n = 1$ geworden ist, und eben dies gilt von dem Systeme der kleinen Pyramidenflächen.

Man betrachtet die Pyramidenflächen gewöhnlich als zwei Rhomboeder, die man als Rhomboeder erster Ordnung (grosse Flächen) und Rhomboeder zweiter Ordnung (kleine Flächen) unterscheidet. Bei einem Rhomboeder steht jede obere Fläche zu den beiden benachbarten unteren in gleicher Beziehung. In meinen Abhandlungen habe ich aber nachgewiesen und die weiterhin mitgetheilten Untersuchungen werden es wieder bestätigen, dass dies beim Bergkrystall nicht der Fall ist, dass vielmehr jede obere Fläche nur mit einer der unteren, entweder der rechten oder der linken (je nach der Beschaffenheit des Krystalles, ob er ein rechter oder ein linker ist) zusammengehört.

Bei einem einfachen Quarzkrystalle sind nun die Prismenkanten beim Erkalten abwechselnd positiv und negativ. Bei vielen Krystallen von Suttrop erscheinen jedoch sämmtliche Kanten in ihrem grössten Theile beim Erkalten negativ. Dies weist, wie schon Herr von Kolenko ausgesprochen, auf eine Zwillingsbildung hin und es

---

1) Vergl. meine eben angeführte Abhandlung über die aktino- und piëzoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles.

kann dieselbe, wie sich aus der Anordnung der grossen und kleinen Pyramidenflächen ergibt, nur aus einer Verwachsung rechter und linker Individuen hervorgegangen sein.

Fig. 1, Taf. I soll den Querschnitt durch einen rechten, Fig. 2 durch einen linken einfachen Krystall darstellen. Die Abstumpfungen der abwechselnden Ecken deuten die Lagen der Flächen der trigonalen Trapezoeder und Pyramiden an, während die über den Seiten der Sechsecke gezeichneten grossen und kleinen Dreiecke die Vertheilung der grossen und kleinen Pyramidenflächen an den oberen Enden des Krystalles angeben. Die Zeichen + und — weisen die an den betreffenden Achsenenden bei der Abkühlung auftretenden elektrischen Polaritäten nach.

Bei der Stellung eines rechten und linken Krystalles zu einander müssen wir die Beschaffenheit der Nebenachsen zu Grunde legen und die beiden Individuen so stellen, dass die positiven und negativen Enden der Nebenachsen dieselbe Lage haben, wie dies in Fig. 1 und 2 geschehen ist.

Eine Verwachsung zweier solcher Individuen zu einem krystallographischen Zwillinge kann nur dann eintreten, wenn der eine in seiner Stellung gegen den andern (z. B. der linke Krystall Fig. 2 rechts) um 60° gedreht wird. Dann liegen die grossen und die kleinen Pyramidenflächen bei beiden Individuen an jedem Ende in demselben Sextanten.

Ein vollkommener Zwilling würde entstehen, wenn wir den linken und den rechten Krystall mittelst Schnitte, welche durch die Hauptachse parallel mit einer Fläche eines Prismas zweiter Ordnung gehen, in Sextanten zerlegen, und zur Bildung des Zwillings abwechselnd einen Sextanten aus dem rechten und aus dem linken Individuum einsetzen [1]).

Bei dieser Zusammensetzung sind aber, wie die Fig. 3 und 4 nachweisen, zweierlei Zwillinge möglich, je nachdem die Sextanten aus dem rechten Krystalle unterhalb einer grossen Pyramidenfläche links (Fig. 3) oder rechts (Fig. 4) stehen. Wären an den einfachen Krystallen die Flächen der trigonalen Trapezoeder und Pyramiden

---

1) Die Sextanten des rechten und linken Individuums sind durch römische und arabische Zahlen unterschieden.

vorhanden, so würden solche bei dem in Fig. 3 gezeichneten Zwillinge nirgends erscheinen, dagegen auf dem Fig. 4 abgebildeten an allen Kanten. Bei dem nach Fig. 3 zusammengesetzten Zwillinge werden beim Erkalten sämmtliche Kanten negative, die Prismenflächen aber mehr oder weniger starke positive Elektricität zeigen, während bei dem gemäss Fig. 4 gebildeten die elektrische Vertheilung gerade entgegengesetzt erscheint. Um die beiden Arten der Zwillinge kurz und bezeichnend anführen zu können, will ich die nach Fig. 3 zusammengesetzten Zwillinge 1. Art und die nach Fig. 4 zusammengesetzten Zwillinge 2. Art nennen.

Im Folgenden werde ich nun nachweisen, dass in den Suttroper Quarzen die beiden zuvor beschriebenen Zwillinge, wenn auch in ungleicher Ausdehnung, vereinigt vorkommen, sowie auch, dass in ihnen noch Stücke eines einfachen Krystalles vorhanden sind.

B. Verfahren bei der Untersuchung des elektrischen Verhaltens der Quarze von Suttrop.

Um aus dem elektrischen Verhalten der Krystalle sichere Schlüsse auf ihre Zusammensetzung machen zu können, empfiehlt es sich, nicht blos die thermoelektrischen, sondern auch die piëzoelektrischen Vorgänge auf denselben festzustellen.

a. Thermoelektricität.

Behufs der Untersuchung der Quarze auf ihr thermoelektrisches Verhalten habe ich die Krystalle, ebenso wie früher, bis auf eine Fläche oder Kante in Kupferfeilicht eingehüllt, in einem Luftbade bis 130—150° C. längere Zeit erhitzt, und dann nach dem Herausnehmen aus demselben während der Abkühlung den verschiedenen Punkten der Fläche oder Kante die Spitze eines mit dem Goldblättchen meines Elektrometers verbundenen Platindrahtes mittelst einer Hebelvorrichtung genähert[1]). Um den ganzen Verlauf der auftretenden elektrischen Spannungen kennen zu lernen, wurden die Beobach-

1) Jede Berührung des Krystalles mit der Spitze des Drahtes ist zu vermeiden, weil dadurch Reibungselektricität entsteht.

tungen gleich nach dem Herausnehmen aus dem heissen Bade begonnen und bis zur fast gänzlichen Erkaltung fortgesetzt; es geschah dies, um zu erfahren, ob durch die Zwillingsbildung etwa Umkehrungen oder Verschiebungen der elektrischen Zonen im Verlaufe der Abkühlung einträten.

Da mehrere der untersuchten Krystalle nur schwache elektrische Spannung zeigten, so habe ich bei allen Beobachtungen die Empfindlichkeit des Elektrometers so weit gesteigert, dass die an den Polen eines bereits seit längerer Zeit zusammengestellten Elementes Zink-Kupfer-Wasser vorhandene Spannung beim directen Anlegen des einen Poles an den zum Goldblättchen führenden Draht, während der andere Pol zur Erde abgeleitet war, einen Ausschlag von 50 Skalentheilen ergab. Für die an den Polen eines Daniell'schen Elementes auftretende Spannung würde der Ausschlag etwas über 60 Skalentheile gestiegen sein.

Der Quarzkrystall, welchen Herr von Kolenko in natürlicher Grösse abbildet, hat eine Hauptachse von 25 mm Länge und seine Prismenflächen besitzen eine Breite von 6,2 mm, während die mir zur Verfügung stehenden Krystalle beträchtlich kleiner sind; ihre Hauptachse beträgt ungefähr 15 mm und die Breite der Prismenflächen 4 mm. Ein Versuch, bei diesen kleinen Krystallen die elektrischen Polaritäten nach dem von Herrn von Kolenko angewandten Verfahren sichtbar zu machen, gab kein deutliches Resultat, sodass ich allein auf die Untersuchung derselben mittelst des Elektrometers angewiesen war.

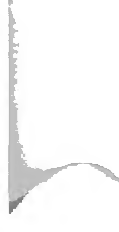
b. Piëzoelektricität.

Die Piëzoelektricität entsteht nur durch einen Druck oder Nachlassen eines solchen in der Richtung einer hemimorphen Achse, also beim Quarz durch Druck in der Richtung der Nebenachsen. Um nun bei den vorliegenden Quarzkrystallen einen bestimmten Druck auf die verschiedenen Punkte der Kanten in gegebener Richtung ausüben und die dadurch erzeugte Piëzoelektricität messen zu können, wurde der Krystall auf einen metallenen mit der Erde leitend verbundenen Untersatz gelegt oder auf demselben befestigt, und auf die oben befindliche zu prüfende Stelle der Kante eine senkrecht gegen dieselbe gestellte Zinnschneide aufgesetzt, welche also die Kante nur

in einem Punkte berührte. Die Zinnschneide war mittelst Schellack in einem Stück Hartkautschuk befestigt; letzteres sass in der Mitte eines einarmigen eisernen Hebels, dessen anderes Ende durch angehangene Gewichte niedergedrückt wurde. Der von der Schneide auf die von ihr berührte Stelle ausgeübte Druck betrug bei allen folgenden Versuchen 1000 g.

Durch den Schellack und den Hartkautschuk war die Schneide hinreichend isolirt. Von ihr führte ein möglichst kurzer Draht zu dem Goldblättchen des Elektrometers. Die Empfindlichkeit desselben war bei den piëzoelektrischen Messungen so gross, dass beim Anlegen des einen Poles eines längere Zeit zusammengesetzten Elementes Zink-Kupfer-Wasser, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war, ein Ausschlag von 40 Skalentheilen entstand. Um die Oberfläche der Krystalle möglichst isolirend zu erhalten, wurden dieselben auf 30—40° C. erwärmt.

Sollte eine seitliche Prismenkante untersucht werden, so wurde der Krystall in eine auf einem Messingstücke eingefeilte Rinne, deren Wände einen Winkel von 120° bildeten, eingelegt und auf die verschiedenen Punkte der obenliegenden Kante die Zinnschneide aufgesetzt. Die Rinne hatte eine solche Tiefe, dass die beiden in der unteren Kante zusammenstossenden Flächen in ihrer ganzen Ausdehnung das Metall berührten. Handelte es sich dagegen um die Prüfung einer Pyramidenkante, so wurde der Krystall in einer gleichen Rinne, welche aber in schräger Richtung in einem Messingstück verlief, mittelst eines übergelegten Messingbugels festgeschraubt, sodass die betreffende Pyramidenkante nahe horizontal lag. Die Rinne machte gegen die Verticale einen Winkel von 51°. Auf die verschiedenen Punkte der in dieser Weise nahe horizontal gestellten Kante wurde nun die Zinnschneide aufgesetzt. Der Druck derselben erfolgte jetzt zwar in einer durch die Hauptachse und die betreffende Nebenachse gelegten Ebene, jedoch nicht in der Richtung der Nebenachse selbst; seine Richtung bildete mit dieser einen Winkel von 39°; nach der Richtung der Nebenachse zerlegt, beträgt derselbe ungefähr $^3/_4$ des verticalen. Die auf einer solchen Kante angestellten Messungen sind untereinander vergleichbar, aber nicht mit den auf den seitlichen Prismenkanten ausgeführten. Eine strenge Vergleichung mit den letzteren wird auch noch dadurch unmöglich, dass der Krystall bei den



beiden Versuchen verschiedene Ableitungen erhält. Diese Ableitungen sind aber, wie ich zeigen werde, von Einfluss auf die Grösse der entstehenden Elektrometerausschläge. Liegt z. B. der Krystall No. 1 mit der Prismenkante 3 . 4 in der Rinne des Messingstückes und ist die an dem Hebel befestigte Zinnschneide quer über die Mitte der oberen Kante 6 . 1 gelegt, so zeigt beim Druck das Elektrometer, wenn die Schneide mit ihm verbunden, das Messingstück aber abgeleitet ist, einen starken positiven Ausschlag. Wird umgekehrt das isolirte Messingstück mit dem Goldblättchen verbunden, die Schneide aber zur Erde abgeleitet, so beobachtet man einen noch etwas grösseren negativen Ausschlag.

Wird die untere Kante nicht in die Rinne, sondern auf eine ebene metallische Unterlage gesetzt, so wird bei abgeleiteter Unterlage die positive Spannung der Schneide geringer (ungefähr halb so gross als zuvor) und ebenso die negative Spannung der Unterlage bei abgeleiteter Schneide. Bei dieser Einrichtung übertrifft aber der positive Ausschlag der Schneide den negativen der Unterlage an Grösse.

Ersetzt man die Unterlage durch eine rundliche Zinnschneide, legt die Mitte der unteren Kante 3 . 4 auf dieselbe und setzt ihr gegenüber auf die Mitte der oberen Kante 6 . 1 die am Hebel befindliche Zinnschneide, so gibt jetzt jede der beiden Schneiden, wenn die andere abgeleitet ist, positive Spannung[1]), die aber nur ungefähr 1/4 so gross ist als diejenige, welche an der oberen Schneide beobachtet wurde, als der Krystall in der Rinne lag.

Die piëzoelektrischen Vorgänge wurden sowohl beim Eintritt des Druckes als auch bei der Aufhebung desselben bestimmt; in den folgenden Mittheilungen sind aber stets nur die beim Eintritt des Druckes beobachteten elektrischen Spannungen angegeben, die beim Nachlassen des Druckes auftretenden sind entgegengesetzt gleich.

Ich habe schon früher nachgewiesen[2]), dass beim Bergkrystalle die beim Erkalten entstehende Thermo- und die durch Druck erzeugte

---

1) Diese gleiche Polarität in beiden Schneiden ist eine Folge der Zwillingsbildung.

2) In der mehrfach citirten Abhandlung: »Ueber die aktino- und piëzoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles u. s. w.« S. 539.

Piëzoelektricität im Vorzeichen entgegengesetzt sind. Da die in die Fig. 1 bis 4 eingetragenen Polaritäten sich auf die beim Erkalten auftretenden thermoelektrischen beziehen, so müssen für die piëzoelektrischen die Zeichen + und — umgekehrt werden.

Bei den vollständigen Untersuchungen der Pyramidenkanten der Quarzkrystalle von Suttrop auf ihr piëzoelektrisches Verhalten tritt in der Nähe der Enden der Hauptachse der Fall ein, dass ein und dieselbe Stelle einer solchen Kante in verschiedenen Richtungen gedrückt wird. Dabei erzeugt dann jeder Druck die seiner Richtung entsprechende Polarität.

Bei den einfachen Quarzkrystallen sind, wie schon mehrfach erwähnt, die Pyramidenflächen abwechselnd gross und klein. Es mögen der Reihe nach die um den oberen Endpunkt der Hauptachse liegenden Flächen mit den Ziffern 1—6 bezeichnet werden und zwar so, dass die ungeraden Zahlen auf die grossen, die geraden auf die kleinen Flächen fallen. Dann schneiden sich in der Nähe des oberen Endes der Hauptachse die grossen Flächen 1 und 3, ferner 3 und 5, und ebenso 5 und 1 in einer oberhalb der Flächen 2, 4, 6 gelegenen Kante.

Gesetzt der einfache Krystall sei ein rechter; es liegen mithin die trigonalen Trapezoeder und Pyramiden an den Enden der Kanten 1 . 2, 3 . 4 und 5 . 6. Diese Kanten werden also bei der Abkühlung thermoelektrisch positiv, folglich piëzoelektrisch beim Druck negativ. Ist nun der Krystall z. B. mit der Prismenkante 4 . 5 in die schräge Rinne des oben beschriebenen Messingklotzes eingelegt, während die Prismenkante 1 . 2 sich in den zum Festhalten dienenden Bügel legt und die Pyramidenkante 1 . 2 nahe horizontal läuft, so liegt auch die durch den Durchschnitt der grossen Flächen 1 und 3 gebildete Kante oben, und empfängt durch die aufgelegte Schneide einen Druck in einer durch die Kanten 1 . 2 und 4 . 5 gelegten Ebene. Die hierdurch erzeugte Piëzoelektricität ist negativ.

Wird nun der Krystall in seinem Lager um 60° gedreht, sodass die Prismenkante 5 . 6 in der Rinne des Messingklotzes, die Prismenkante 2 . 3 aber unter dem Bügel liegt, so wird beim Aufsetzen der Schneide auf die von den grossen Pyramidenflächen 1 und 3 gebildete Kante auf dieselbe ein Druck in einer durch die Kanten 2 . 3 und 5 . 6 gehenden Ebene ausgeübt. Entsprechend der auf der

Prismenkante 2 . 3 durch einen solchen Druck erzeugten positiven Elektricität gibt jetzt dieselbe Stelle, welche zuvor negativ erschien, eine positive Spannung.

Eben diese entgegengesetzten Polaritäten entstehen auch, wenn andere Stellen eines Quarzes in der Richtung zweier benachbarten Nebenachsen gedrückt werden. Ein grosser einfacher rechter Bergkrystall von rauchgrauer Farbe war in einer durch die Prismenkanten 1 . 2 und 4 . 5 gehenden Ebene durchschnitten worden. Wurde nun die Hälfte, welche die Prismenfläche 5, 6 und 1 enthält, so in den Messingklotz befestigt, dass die durch den Durchschnitt der Schnittfläche mit der Pyramidenfläche 1 entstandene scharfe Kante in der Richtung der durch die Kanten 1 . 2 und 4 . 5 gehenden Ebenen gedrückt wurde, so zeigte sie in ihrem ganzen Verlaufe negative Elektricität. Dieselbe ging in die positive über, als die Krystallhälfte so in den Messingklotz befestigt wurde, dass der Druck in der durch die Kanten 2 . 3 und 5 . 6 gehenden Ebene erfolgte.

Um die späteren piëzoelektrischen Beobachtungen auf Zwillingskrystallen richtig deuten zu können, bedarf es noch der Darlegung der Aenderungen, welche in diesen Spannungen unter verschiedenen äusseren Bedingungen eintreten.

Ein schwarzer Turmalin von 20,6 mm Länge, der an beiden Enden senkrecht gegen die Hauptachse angeschliffene ebene Flächen trug, war mit dem beim Erkalten positiven Pole auf eine ebene metallische Unterlage gestellt, und wurde in der Richtung der Hauptachse durch die auf die obere Fläche aufgesetzte Schneide mit einem Gewicht von 1000 g gedrückt. Das Elektrometer zeigte einen positiven Ausschlag von + 47 Skalentheilen[1]).

Darauf wurde der Krystall auf eine gefirnisste ebene Glasplatte gestellt; derselbe Druck wie zuvor bewirkte jetzt einen Ausschlag von + 43 Skalentheilen.

Als nun eine nur 1,7 mm dicke senkrecht gegen die Hauptachse geschnittene Platte eines durchsichtigen grünen Turmalins in gleicher Weise behandelt wurde, so betrug der Ausschlag, wenn die Platte mit ihrer unteren Fläche auf Metall lag, + 43,5; derselbe sank aber auf + 29, wenn die untere Fläche sich auf dem gefirnissten Glase

1) Beim Turmalin geben Abkühlung und Druck dieselbe Elektricität.

befand. Durch die Isolirung der unteren Fläche wird also bei der dünnen Platte die auf der oberen Fläche gemessene Spannung beträchtlich verringert. Viel geringer ist dieser Einfluss bei der 20,6mm langen Säule. Ist die untere Fläche nicht abgeleitet, so wirken nämlich die auf beiden Endflächen erzeugten, entgegengesetzten Polaritäten auf die Schneide; die in derselben hervorgerufene elektrische Vertheilung entspricht dann nur der Differenz der Wirkungen, die, obwohl beide Elektricitäten in gleicher Menge auftreten, doch wegen der grösseren Nähe im Sinne der oberen erfolgt.

Es wurde nun die dünne grüne Platte auf die obere Fläche der auf Metall stehenden schwarzen Turmalinsäule gelegt, so dass bei beiden Krystallen der positive Pol nach oben gerichtet war. Beim Druck von 1000g betrug der Ausschlag + 45 Skth. Darauf wurde die dünne Platte umgedreht, so dass sie mit ihrer positiven Fläche auf der oberen gleichfalls positiven Fläche des schwarzen Turmalins lag. Jetzt betrug der Ausschlag beim Druck + 9 Skth.; der Ausschlag war also positiv, während die Schneide auf der negativen Fläche der dünnen Platte stand. Wurde die dünne Platte allein in der oben angegebenen Richtung, während sie auf einem isolirenden Glase lag, gedrückt, so wurde, wie schon oben angeführt, ein Ausschlag von — 29 Skth. beobachtet. Als auf die obere positive Fläche des 20,6mm langen schwarzen Turmalins eine 1,4mm dicke Glasplatte gelegt und auf diese die Schneide aufgesetzt wurde, erfolgte ein Ausschlag von + 35 Skth.; während derselbe, wenn die Schneide unmittelbar auf dem Turmalin stand, + 47 Skth. betrug. Liegt die grüne Turmalinplatte in der zuletzt beschriebenen Anordnung auf der schwarzen Turmalinsäule, so wird die Wirkung — 29 der oberen Platte durch die Wirkung + 35 des unteren Krystalles übertroffen, und der Ausschlag erscheint noch in geringer Stärke positiv.

C. Piëzo- und thermoelektrisches Verhalten der Quarzkrystalle von Suttrop.

Krystall No. I.

a. Piëzoelektricität.

Wenn man bei der piëzoelektrischen Untersuchung den Druck auf die Kanten mittelst einer Schneide, wie oben S. 278 beschrieben, ausübt, so ist es möglich, die an den verschiedenen Punkten derselben auftretenden Elektricitäten gesondert zu beobachten und hieraus einen Schluss auf die Zusammensetzung des Krystalles zu machen.

Um die auf den verschiedenen Punkten der Kante ausgeführten Beobachtungen möglichst übersichtlich darzustellen, habe ich dieselben auf gerade Linien No. I B, Taf. I aufgetragen[1]). Die zwischen den beiden horizontalen Linien aa' und bb' eingeschlossenen Stücke der verticalen Linien stellen die 6 Prismenkanten vor. Die Linien aa' und bb' sind durch die von den Prismenflächen mit den grossen Pyramidenflächen gebildeten Kanten gelegt. Die oberhalb aa' und unterhalb bb' gelegenen Linien sollen die unter Betheiligung der Pyramidenflächen gebildeten Kanten andeuten. Das an die Linien aa' und bb' angrenzende Stück entspricht dem Durchschnitte einer grossen Pyramidenfläche mit einer benachbarten Prismenfläche ($\delta\gamma$ in No. I A). Das daran sich anschliessende grössere Stück entspricht dem Durchschnitte zweier benachbarten Pyramidenflächen, also einer grossen und einer kleinen ($\gamma\beta$ derselben Figur), während das Endstück dem Durchschnitte zweier grossen Pyramidenflächen angehört ($\beta\alpha$). Von den fünf Beobachtungen, welche gewöhnlich auf einer solchen gebrochenen Kante gemacht und in die sie andeutenden geraden Linien eingetragen worden sind, fällt im Allgemeinen die den Enden der Hauptachse zunächst befindliche auf das zuvor mit $\beta\alpha$ bezeichnete Stück, die drei darauffolgenden auf das Stück $\gamma\beta$ und die den Prismenkanten zunächst stehende auf das Stück $\delta\gamma$.

Die Länge der Hauptachse des Krystalles No. I beträgt 15,2 mm,

---

1) Bei dem Eintragen der Beobachtungen in ein wie Fig. I A gezeichnetes Netz war der Ueberblick weniger leicht, weshalb ich der obigen Darstellung den Vorzug gegeben.

die Länge der Nebenachse im Mittel 9,3 mm. Seine Masse ist fast durchsichtig. Auf den unteren Pyramidenflächen 4 und 5 liegen einzelne Partien von Eisenocker. No. I A stellt das Netz dieses Krystalles in ungefähr doppelt linearer Vergrösserung und No. I B die Kantenlinien in der zuvor beschriebenen Weise dar. In diese letzteren sind nun die durch den Druck (1000 g) von einer Schneide auf die verschiedenen Punkte erzeugten elektrischen Spannungen eingetragen.

Eine und dieselbe Fläche ist in beiden Figuren durch dieselbe Ziffer bezeichnet. Es liegen also am oberen Ende die Kanten 6 . 1, 2 . 3, und 4 . 5 am linken, die Kanten 1 . 2, 3 . 4 und 5 . 6 am rechten Rande einer grossen Pyramidenfläche.

Betrachten wir nun zuerst die an den beiden Enden der Hauptachse beim Druck auftretenden elektrischen Polaritäten, so finden wir die Kanten abwechselnd positiv und negativ. Dies weist an den betreffenden Stellen auf einen einfachen Krystall hin und zwar, wie ich sogleich erläutern werde, auf ein rechtes Individuum. Bei einem solchen liegen nämlich an dem oberen Ende am rechten Rande der grossen Pyramidenflächen bei der Abkühlung die positiven, also die beim Drucke negativen Kanten; und in der That erscheint die negative Piëzoelektricität an den durch den Durchschnitt der grossen Pyramidenflächen gebildeten Kanten, wenn dieselben in der Richtung einer durch die Hauptachse und die Kanten 1 . 2, 3 . 4 und 5 . 6 gelegten Ebene gedrückt werden, während die positive Elektricität auf denselben Punkten jener Kanten durch den Druck in der Richtung einer durch die Hauptachsen und die Kanten 6 . 1, 2 . 3 und 4 . 5 gelegten Ebene auftritt.

Wenden wir uns zu dem mittleren Theile der zwischen den Linien $a a'$ und $b b'$ enthaltenen Prismenkanten, so sehen wir überall positive Spannungen auftreten; nur auf der Kante 2 . 3 wird die positive Polarität auf einer sehr beschränkten Stelle durch die negative unterbrochen. Daraus folgt, dass die obere Schicht des mittleren Theiles des Prismas aus einem nach dem Schema Fig. 3 gebildeten Zwilling besteht, den ich oben als einen Zwilling erster Art bezeichnet habe. Sämmtliche Kanten sind piëzoelektrisch beim Druck positiv, also thermoelektrisch beim Erkalten negativ, was mit den in Fig. 3 an die Kanten gesetzten Vorzeichen, die sich eben

auf die bei der Abkühlung auftretende Polarität beziehen, übereinstimmt.

Gehen wir aber in die nächste Umgebung der von den Prismen- und Pyramidenflächen gebildeten Kanten, so erscheinen gerade entgegengesetzt alle Kanten negativ (nur auf der Kante 6 . 1 ist die negative Polarität nicht beobachtet worden). Diese ebenfalls auf den Kanten gleiche Polarität weist nun auf einen Zwilling hin, welcher nach dem Schema Fig. 4 (Zwilling zweiter Art) gebildet ist. Seine Ausdehnung ist aber nur gering.

Nach den Enden hin erscheinen auf sehr kurzen Stücken die Kanten wieder positiv; dies bekundet also wieder einen Zwilling der ersten Art, der dann schliesslich an den Enden in den schon oben erwähnten einfachen rechten Krystall übergeht.

Der vorliegende Krystall besteht sonach an der Oberfläche aus einem einfachen rechten Individuum, einem Zwillinge der ersten Art in grösserer und dann nochmals in sehr geringer Ausdehnung, und schliesslich einem Zwillinge zweiter Art von ebenfalls nur geringer Ausdehnung. Man könnte sich nun die Zusammensetzung des Krystalles so vorstellen, dass der mittlere prismatische Theil in seinem ganzen Querschnitte ein Zwilling erster Art sei, an welchen sich oben und unten ebenfalls den ganzen Querschnitt einnehmende Schichten eines Zwillings zweiter Art angesetzt haben, auf welche wieder eine dünne Platte eines Zwillings erster Art und dann schliesslich ein einfaches Individuum folgt. Ich halte indess eine andere Auffassung für naturgemässer. Um den inneren Kern eines rechten Individuums, der beim Fortwachsen sich in der Achse und ihrer Nachbarschaft erhält, hat sich ein Zwilling der ersten Art als Hülle gelegt. Derselbe tritt in der schmalen positiven Zone auf den Pyramidenkanten an die Oberfläche. Diesen Zwilling umgibt eine Zwillingsbildung der zweiten Art, welche in der Nähe der Enden der Prismenkanten an der Oberfläche erscheint, und diese umgibt schliesslich wieder eine Zwillingsbildung erster Art, wie sie an den Prismenkanten sich zeigt.

Wenn, wie auf der Prismenkante 2 . 3 in der positiven Zone die negative Elektricität auf einer kleinen Stelle auftritt, so kann dies daher rühren, dass an dieser Stelle die Schicht des Zwillings erster Art, welche die Zwillingsbildung zweiter Art bedeckt, nur eine geringe Dicke hat, sodass noch die Polarität des darunterliegenden

Zwillings in ihrer Wirkung überwiegt. Aehnlich wird auf der oberen Pyramidenkante 4 . 5 die positive Zone auf eine kurze Strecke von einer negativen Spannung unterbrochen.

Der vorliegende kleine Krystall ist ausgezeichnet durch die trotz der mannigfachen Aenderungen in seinem Wachsthum doch fast vollkommen gleichförmige Ausbildung der einzelnen Schichten.

b. Thermoelektricität.

Bevor ich die an diesem Krystall gemachten thermoelektrischen Beobachtungen mittheile, will ich im Allgemeinen angeben, wie sich nach der im Vorstehenden erläuterten Zusammensetzung die bei der Abkühlung auftretende elektrische Vertheilung gestalten muss.

In meinen beiden oben (S. 271) erwähnten Abhandlungen habe ich nachgewiesen, dass auf einem einfachen an beiden Enden vollkommen normal ausgebildeten Bergkrystalle die elektrischen Zonen eine schiefe Lage haben, und dass die Richtung dieser schiefen Lage bei rechten und linken Krystallen verschieden ist. Fig. 5, Taf. I stellt durch Farben eine solche vollkommen regelmässige Vertheilung auf linken und Fig. 6 auf rechten Krystallen dar. Bei den ersteren gehen die negativen Zonen von links oben nach rechts unten von den grossen Pyramidenflächen des oberen Endes über die Prismenkanten, an welchen die Flächen der trigonalen Trapezoeder oder Pyramiden fehlen, zu den entsprechenden grossen unteren, und in derselben Richtung die positiven von den kleinen Pyramidenflächen des oberen Endes über die mit Flächen der trigonalen Trapezoeder und Pyramiden versehenen Kanten zu den entsprechenden kleinen Flächen am unteren Ende. Bei rechten Krystallen verlaufen (Fig. 6) die Zonen in der Richtung von rechts oben nach links unten.

Ferner habe ich in meiner Abhandlung vom Jahre 1881 [1]) dargethan, dass beim Bergkrystalle auch auf den Enden der Hauptachse elektrische Pole auftreten, und zwar müssen, weil nach dieser Richtung keine Hemimorphie stattfindet, beide Enden die gleiche Polarität zeigen. Dieselbe ist bei den Suttroper Krystallen positiv. In den Figuren 5 und 6 sind diese positiven Elektricitäten auf den an den

1) Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XX. S. 497.

Enden der Hauptachse gelegenen Theilen der Pyramidenflächen eingezeichnet.

Tragen wir nun in das Netz eines nach dem Schema Fig. 3 gebildeten Zwillings die auf den jedesmaligen Hälften der Flächen in Fig. 5 und 6 vorhandenen elektrischen Spannungen ein, so ergibt sich die in Fig. 7 dargestellte Vertheilung der beiden Polaritäten. Die Pyramidenflächen sind in der Nähe der Enden der Hauptachse positiv; daran schliesst sich auf den grossen Pyramidenflächen eine negative Polarität, die sich über den anstossenden Theil der Prismenflächen ausdehnt und dann nach den Kanten hin weiter verläuft, während von den kleinen Pyramidenflächen die positive Elektricität sich über die Prismenflächen in einer sich allmählich verschmälernden Zunge fortsetzt. Sämmtliche Prismenkanten zeigen negative Spannungen.

So würde also die elektrische Vertheilung bei der Abkühlung sich gestalten, wenn der Krystall No. I nur ein Zwilling der ersten Art wäre. Nun habe ich aber oben gezeigt, dass in der Nähe der Randkanten (der Linien *aa'* und *bb'*) allerdings in geringerer Ausdehnung eine Zwillingsbildung zweiter Art, wie sie in Fig. 4 dargestellt ist, auftritt.

Tragen wir in das Netz Fig. 8 eines solchen Zwillings die entsprechenden Spannungen, wie ich sie auf einfachen Krystallen beobachtet habe, ein, so gehen von den kleinen Pyramidenflächen positive Zonen rechts und links zu den kleinen Flächen am unteren Ende, während die negative Polarität sich nur auf einer begrenzten Stelle zeigt; sie beginnt auf den Rändern an den grossen Pyramidenflächen mit einer gewissen Breite und verläuft sodann, sich allmählich verschmälernd, gegen das andere Ende der Prismenfläche hin.

Um nun die auf dem Krystalle No. I zu erwartende elektrische Vertheilung zu erhalten, haben wir die bei beiden Zwillingen beobachteten Vertheilungen zu combiniren, jedoch die zweite (Fig. 8) in geringerer Intensität als die in No. 7 dargestellte, weil an der Oberfläche die Zwillingsbildung erster Art eine viel grössere Ausdehnung besitzt als die zweiter Art.

Dabei tritt uns nun die Frage entgegen, in welcher Stellung die beiden Zwillinge sich vereinigen.

In der Zwillingsbildung äussert sich das Bestreben einer Zurück-

führung auf grössere Regelmässigkeit. Wenn beim Quarz zwei gleichartige Individuen, d. h. zwei rechte oder zwei linke, in gleich grossen Sectoren zu einem Zwillinge zusammentreten, so entsteht eine Gestalt, welche eine grössere Regelmässigkeit zeigt, als das einzelne Individuum sie darbietet. Die trigonalen Trapezoeder und Pyramiden treten entweder an allen Kanten auf oder fehlen überall, die Pyramidenflächen werden gleich gross und sämmtliche Prismenkanten gleichnamig elektrisch.

Tritt ein rechter und ein linker Quarz zu einem vollkommenen Zwilling zusammen, so werden die Prismenkanten zwar gleichnamig, dagegen bleibt die Ungleichheit der Pyramidenflächen bestehen. Soll letztere ausgeglichen werden, so muss sich mit einem Zwillinge der ersten Art ein Zwilling der zweiten Art und zwar in solcher Stellung verbinden, dass an beiden Enden die kleinen Pyramidenflächen des einen Zwillings auf die grossen Flächen des andern fallen. Die beiden Zwillinge werden sich also in der Stellung verbinden, in welcher sie in Fig. 3 und 4 nebeneinander gezeichnet sind.

Bei dem vorliegenden Krystalle No. I ist die Ausdehnung des Zwillings zweiter Art geringer, als die des Zwillings erster Art. Die kleinen Pyramidenflächen dieses letzteren können also durch den Hinzutritt des Zwillings zweiter Art nicht dieselbe Grösse erlangen, wie seine grossen Pyramidenflächen. Wohl aber gibt sich das Auftreten eines Zwillings der zweiten Art schon in dem geringen Unterschiede in der Grösse der Pyramidenflächen kund; wie S. 262 bemerkt, beträgt die Ausdehnung der grösseren Pyramidenflächen nur das zwei- bis dreifache der kleineren, während bei wirklich einfachen Krystallen die ersteren die letzteren 50 bis 100mal an Grösse übertreffen können.

Schliesslich haben wir unsere Aufmerksamkeit noch auf die Intensitäten zu richten, mit welchen jede der beiden Elektricitäten auf den beiden Zwillingen auftritt.

Schon Canton hat durch einen entscheidenden Versuch bewiesen, dass auf dem Turmaline beide Elektricitäten, sowohl bei der Erwärmung als auch bei der Abkühlung stets in gleicher Menge auftreten. Er warf einen Turmalin in heisses Wasser. Das isolirte Gefäss, in welchem sich letzteres befand, zeigte weder gleich nach dem Hineinwerfen des Turmalins, noch auch später, elektrische Spannung.

Einen analogen Versuch habe ich mit dem Boracit ausgeführt[1]). Beim Boracit tritt beim Erwärmen bis 250° und ebenso beim Erkalten an jeder Ecke ein doppelter Wechsel der Polarität ein. Um nun zu erfahren, ob auch hierbei stets die Summe der beiden in jedem Augenblicke vorhandenen Elektricitäten gleich Null sei, schloss ich einen Boracit, rings umgeben von Platinsand, in einen Messingwürfel ein und warf diesen während des Einschüttens von stark erhitztem Eisenfeilicht in ein eisernes wohl isolirtes Gefäss, sodass er ungefähr in die Mitte des Eisenfeilichts zu liegen kam. Das Gefäss zeigte weder, während der Boracit in seiner Temperatur stieg, noch auch später während des Erkaltens elektrische Spannungen.

Wären also die Quarzkrystalle von Suttrop beim Erkalten ringsum von Luft umgeben, so würde selbst in diesem Falle infolge der starken positiven Polarität an den Enden der Hauptachse die gleichnamige positive Elektricität auf den Prismenflächen in geringerer Intensität als die negative auf den Kanten aufzutreten vermögen, wie sich auch noch aus folgender Betrachtung ergeben wird.

Beim Bergkrystall haben wir zweierlei thermoelektrische Erregungen zu unterscheiden: 1) eine polarelektrische Vertheilung nach den hemimorphen Nebenachsen und 2) eine Vertheilung wie auf einem symmetrischen Krystalle des tetragonalen und hexagonalen Systemes, z. B. einem Wiluit, Apophyllit, Beryll oder Schneeberger Kalkspath. Bei diesen Krystallen sind die Endflächen $0P$ oder die an den Enden der Hauptachse liegenden Pyramiden- oder Rhomboederflächen beim Erkalten positiv, die prismatischen Seitenflächen aber negativ. Gerade so würden sich die vorliegenden Quarze verhalten, wenn ihre Nebenachsen nicht hemimorph gebildet wären. Die oben erwähnte erste polare Vertheilung erregt in den nach dem Schema Fig. 3 gebildeten Zwillingen negative Elektricität auf sämmtlichen Kanten und positive auf den Flächen. Die zweite nicht polare dagegen erzeugt an den beiden Enden der Hauptachse positive und ringsum auf den Prismenflächen und deren Kanten negative Spannung. Legen wir nun diese beiden Vertheilungen aufeinander, so ergibt sich auf den Kanten eine Verstärkung der negativen und auf den Flächen eine Schwächung der positiven Polarität[2]).

---

1) Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. der Wissensch. Bd. VI. S. 236.

2) Ich will gleich hier bemerken, dass bei den Beobachtungen selbst noch

Betrachten wir einen nach dem Schema Fig. 4 gebildeten Zwilling, auf dem die elektrische Vertheilung wie in Fig. 8 erscheint, so wird beim Zusammenlegen der polaren und nichtpolaren Vertheilung die negative Polarität auf den Prismenflächen in stärkerer Intensität auftreten müssen, als die positive. Es ergibt sich dies Verhalten auch schon aus dem Umstande, dass die negative Polarität auf einen viel kleineren Raum beschränkt ist als die positive.

Denken wir uns nun die beiden elektrischen Vertheilungen und zwar in den Fig. 7 und 8 gezeichneten Stellungen, die zweite aber in geringerer Intensität, aufeinander gelegt, so erhalten wir folgende elektrische Vertheilung auf der Oberfläche: Die Pyramidenflächen sind in der Nähe der Enden der Hauptachse stark positiv; daran schliesst sich auf den grossen Pyramidenflächen in der Nähe der Randkanten eine negative Polarität, welche nach der Mitte der Prismenflächen hin abnimmt (auch unter Umständen in eine schwache positive übergeht), und gegen die kleinen Pyramidenflächen hin wieder an Stärke wächst, jedoch nicht dieselbe Stärke erreicht, wie an den grossen Pyramidenflächen.

Vergleichen wir nun diese aus der Zusammensetzung des Krystalles hergeleitete elektrische Vertheilung mit der beim Erkalten thatsächlich beobachteten, wie sie in No. I A eingetragen ist, so zeigt sich vollkommene Uebereinstimmung.

Die Pyramidenflächen sind in den nach den Enden der Hauptachse hin gelegenen Theilen stark positiv. Daran schliesst sich auf dem in der Nähe der Randkanten gelegenen Theile der grossen Pyramidenfläche und in den anliegenden Stücken der Prismenflächen negative Elektricität, welche nach der Mitte hin abnimmt und an den kleinen Pyramidenflächen wieder etwas an Stärke zunimmt. Dabei erscheint öfter auf den Prismenflächen in der Mitte oder in der Nähe

---

eine weitere Schwächung jener positiven Spannung auf den Prismenflächen durch den Einfluss der Ableitung infolge des Einsetzens der Krystalle in das Kupferfeilicht erfolgt. Bei einem Turmalin tritt nämlich an dem einen Pole die elektrische Spannung stärker auf, wenn der andere Pol abgeleitet wird, als wenn derselbe isolirt ist. Bei den in das Netz No. I A eingetragenen thermoelektrischen Messungen sind nun die Quarzkrystalle an den stark positiven Enden der Hauptachse durch das Kupferfeilicht abgeleitet; dies bewirkt also auf den Prismenflächen eine Erhöhung der negativen und eine Schwächung der positiven Spannungen.

der kleinen Pyramidenflächen auch wohl positive Polarität, wie auf den Flächen 3, 4, 5. Die Prismenkanten sind sämmtlich negativ[1]). Ich habe dieselben einer speciellen Prüfung unterzogen, wobei der ganze Krystall bis auf die zu untersuchende Kante in Kupferfeilicht eingehüllt war. Die bei dieser Anordnung gemachten Beobachtungen sind in die unterhalb des Netzes No. I A gezeichneten Linien, welche die einzelnen Kanten darstellen sollen, eingetragen.

Die in das Netz No. I A eingeschriebenen, auf den Pyramiden- und Prismenflächen ausgeführten Messungen sind in 18 verschiedenen Versuchen, bei denen jedesmal die betreffende Fläche allein von Kupferfeilicht frei war, ausgeführt worden. Da bei diesem Verfahren die ganze Fläche frei liegt, so wirken alle Theile derselben mit der auf ihnen vorhandenen Elektricität je nach ihrem Abstande auf den genäherten Platindraht. Wenn nun auch vorzugsweise die unmittelbar unter der Spitze des Platindrahtes liegenden auf denselben eine Vertheilungswirkung ausüben, so werden doch unter Umständen daselbst befindliche nur schwache Spannungen durch in der Nähe gelegene starke entgegengesetzte verdeckt werden können. Solche schwache Spannungen lassen sich, wie ich dies mehrfach in meinen früheren Abhandlungen gezeigt habe, durch einen speciellen Versuch, bei welchem man die stark elektrischen benachbarten Theile ebenfalls noch mit Kupferfeilicht bedeckt, nachweisen. Es wäre daher wohl möglich, dass durch ein solches Verfahren ausser auf 4 auch noch in der Mitte anderer Prismenflächen, z. B. auf der Fläche 3, die positive Spannung beobachtet werden könnte. Uebrigens wird, wie ich schon S. 290 erläutert habe, diese positive Spannung in der Mitte der Prismenflächen durch die Art der Einhüllung des Krystalles geschwächt.

Krystall No. II (Taf. I, No. II A und B).

Die Masse dieses Krystalles ist weisslich und nur durchscheinend. Die Länge seiner Hauptachse beträgt 18,2 mm, die Grösse der Nebenachsen im Mittel 9,2 mm. No. II A stellt das Netz in ungefähr doppelt linearer Vergrösserung und No. II B die Kantenlinien, wie sie S. 271 beschrieben, dar.

1) Nur an der Kante (2.3) findet sich eine kleine positive Stelle.

Nach der vollständigen Erläuterung der elektrischen Vorgänge auf dem Krystall No. I wird eine kurze Angabe genügen, um die Zusammensetzung und das elektrische Verhalten des Krystalles No. II zu übersehen.

Aus den in No. II B eingetragenen piëzoelektrischen Beobachtungen ergibt sich, dass der vorliegende Krystall in der Mitte ein Zwilling erster Art ist; in der Nähe der oberen und unteren Randkanten zeigt sich, ebenso wie beim Krystall No. I, ein Zwilling der zweiten Art, während die an den Enden der Hauptachse liegenden Stücke einem einfachen linken Individuum angehören. Von einer kurzen Wiederholung des Zwillings erster Art auf den Pyramidenkanten, wie wir sie bei No. I wahrnahmen, zeigt sich hier nur eine Andeutung auf der oberen Kante 6 . 1 und wohl auch auf der unteren Kante 3 . 4.

Die beim Erkalten auf den Prismen- und Pyramidenflächen gemachten thermoelektrischen Beobachtungen sind in das Netz No. II A, die auf den Prismenkanten ausgeführten in die unterhalb des Netzes gezeichneten Linien eingetragen. Die elektrische Vertheilung ist im Allgemeinen dieselbe, wie auf dem Krystall No. I. Sämmtliche Prismenkanten erscheinen in ihrer ganzen Länge negativ elektrisch.

Krystall No. III (Taf. I, No. III A und B).

Die Masse dieses Krystalles ist ziemlich rein und fast durchsichtig. Die Länge seiner Hauptachse beträgt 14,9 mm, seine Nebenachsen im Mittel 8,1 mm. In seiner Zusammensetzung gleicht er dem Krystall No. I. In der Mitte erscheint er (No. III B) als ein Zwilling erster Art, woran sich in der Nähe der Randkanten ein Zwilling zweiter Art anschliesst; an den Enden der Hauptachse liegt ein einfaches Individuum, und zwar wie bei No. I ein rechtes. Eigenthümlich sind die wiederholten Abwechselungen zwischen positiver und negativer Elektricität auf der Kante 6 . 1.

Die auf seiner Oberfläche und seinen Prismenkanten gemachten thermoelektrischen Beobachtungen sind in das Netz No. III A und die darunter befindlichen Kantenlinien eingetragen. Aus ihnen ergibt sich ein den beiden vorhergehenden Krystallen gleiches Verhalten. Auch sämmtliche Prismenkanten sind noch negativ.

Krystall No. IV (Taf. I, No. IV A und B).

Während in den zuvor beschriebenen Zwillingen jedes der beiden Individuen in nahe gleicher Grösse aufgetreten war, finden sich nun aber auch Zwillingskrystalle, bei welchen das eine Individuum beträchtlich vorwaltet, und zwar ist es stets dasjenige, welches an den Enden der Hauptachse allein vorhanden ist.

Durch diesen Umstand kann der Fall eintreten, dass die thermoelektrischen und piëzoelektrischen Beobachtungen in vollem Widerspruch erscheinen. Indess ist derselbe nur ein scheinbarer, und findet seine Erklärung in den S. 282 beschriebenen Versuchen.

Die Masse des Krystalles No. IV ist ziemlich durchsichtig; die Länge seiner Hauptachse beträgt 15,8 mm, die Länge seiner Nebenachsen im Mittel 8,5 mm.

Betrachten wir zunächst die in No. IV B eingetragenen piëzoelektrischen Beobachtungen, so erscheint der Krystall fast als ein einfaches linkes Individuum, indem sowohl die Prismen- als auch die Pyramidenkanten abwechselnd negative und positive Spannungen zeigen. Nur vereinzelt tritt auf der Prismenkante 2 . 3 die Zwillingsbildung erster Art, und in der Nähe der Randkanten auf der Kante 3 . 4 die Zwillingsbildung zweiter Art hervor.

Dass indess z. B. auf den Prismenkanten die Zwillingsbildung erster Art wirklich überall vorhanden ist, zeigen die thermoelektrischen Versuche (No. IV A), namentlich die auf den Prismenkanten ausgeführten. Während piëzoelektrisch diese Kanten abwechselnd negativ und positiv sind, ergibt die thermoelektrische Untersuchung auf allen Kanten gerade wie bei den Krystallen I, II und III negative Spannung: ein deutlicher Beweis der hier vorhandenen Zwillingsbildung erster Art. Nur ist hier auf den Prismenkanten die Schicht der auf den Kanten 6 . 1, 2 . 3 und 4 . 5 liegenden Stücke des rechten Individuums so dünn, dass sie zwar durch ihr thermoelektrisches Verhalten sich noch kund gibt, dagegen beim Druck durch die dem grösseren linken Individuum entsprechende Polarität überwunden wird.

Herr von Kolenko hatte gerade die Suttroper Krystalle gewählt, um die von mir gefundene schiefe Lage der Zonen nachzuweisen. Auch wenn diese Krystalle wirklich einfache gewesen wären, so hätte die von ihm angewandte Bestäubungsmethode jene Lage doch

nicht angeben können, da die bei dem Bestreichen mit der Alkoholflamme auf der Oberfläche künstlich angehäufte Elektricität nur der mit der hemimorphen Bildung zusammenhängenden Aktinoelektricität entspricht, während die an den Enden der Hauptachse auftretende gleichnamige Polarität bei diesem Verfahren in keiner Weise aufzutreten vermag.

Die oben S. 286 von mir bezeichnete schiefe Lage der elektrischen Zonen wird durch die Vertheilung auf den ziemlich vollkommenen Zwillingskrystallen No. I, II und III bestätigt. Nur bei Annahme dieser schiefen Lage ist die auf denselben beobachtete Vertheilung möglich.

Tritt in dem Zwillinge das eine Individuum, wie in No. IV das linke vorwaltend auf, so wird auch die schiefe Lage der Zonen wieder sichtbar. Auf diesem linken Individuum sind bei der Abkühlung die Kanten 6 . 1, 2 . 3 und 4 . 5 positiv; über sie müssen also die positiven Zonen von links oben nach rechts unten gehen. In der That zeigt sich auf den Prismenflächen diese schiefe Lage der positiven Zonen, die auf den Kanten 6 . 1, 2 . 3 und 4 . 5 selbst aber durch die negative Polarität der daselbst eingelagerten kleinen Stücke eines rechten Individuums unterbrochen werden. Bei der Beobachtung auf den Prismenflächen kann diese negative Elektricität an den Kanten nicht hervortreten, weil sie infolge der Einhüllung der Kanten an der einen Seite durch das Kupferfeilicht zum Theil abgeleitet ist.

Krystall No. V (Taf. II, No. V A und B).

Die ziemlich durchsichtige Masse dieses Krystalles wird namentlich an den Enden durch Einlagerung wolkiger Partieen getrübt. Die Länge seiner Hauptachse beträgt 14,7 mm, die der Nebenachsen im Mittel 8,2 mm.

Aus den in No. V B eingetragenen piëzoelektrischen Beobachtungen ergibt sich, dass der Krystall No. V vorwaltend ein rechtes Individuum darstellt; sowohl auf den Prismen- als auch auf den Pyramidenkanten wechseln im Allgemeinen positive und negative Spannungen ab. In der Nähe der oberen und unteren Randkanten treten Anzeichen von Zwillingsbildungen zweiter Art auf.

Die Schicht der Zwillingsbildung erster Art wird in den piëzo-

elektrischen Versuchen nicht direct sichtbar, gibt sich nur in einigen Punkten der Kanten (Prismenkante 1 . 2, obere Pyramidenkante 3 . 4 und untere Pyramidenkante 1 . 2) durch die Schwächung der negativen Elektricität kund; dagegen tritt sie in den in das Netz No. V A eingetragenen thermoelektrischen Beobachtungen auf der Kante 3 . 4 und auf dem grössten Theile der Kante 5 . 6 hervor. Auf der Kante 1 . 2 vermag ihre Polarität aber die dem einfachen rechten Individuum zugehörige nicht zu überwinden.

Die schiefe Lage der positiven thermoelektrischen Zone an den Kanten 1 . 2 von rechts oben nach links unten tritt sehr deutlich hervor, weil die Kante 1 . 2 selbst thermoelektrisch positiv ist; an der Kante 3 . 4 kann sie nicht deutlich erscheinen, weil die Kante 3 . 4 negativ elektrisch ist; dagegen wird sie wieder erkennbar in der Nähe der Kante 5 . 6, wenn auch gestört durch die negative Beschaffenheit dieser Kante, weil die negative Intensität auf der letzteren geringer ist, als auf der Kante 3 . 4.

Krystall No. VI (Taf. II, No. VI A und B).

Dieser Krystall unterscheidet sich von den vorher behandelten dadurch, dass seine Pyramidenflächen am oberen Ende gleich gross sind und auch am unteren die Flächen 3 und 5 nur eine wenig geringere Ausdehnung haben als die übrigen vier. Er stellt also gewissermassen ein sechsseitiges Prisma mit der gewöhnlichen sechsseitigen Pyramide dar. Die Masse dieses Krystalles ist trübe. Die Länge seiner Hauptachse beträgt 14,2 mm, die Länge der Nebenachsen im Mittel 12,5 mm. In No. VI A ist das Netz desselben in ungefähr 1½facher linearer Vergrosserung abgebildet und sind in dieses die thermoelektrischen Beobachtungen eingetragen; die piëzoelektrischen Beobachtungen sind auf den Kantenlinien No. VI B verzeichnet; die kurzen mittleren Stücke derselben stellen die Prismenkanten dar.

Wie die piëzoelektrischen Spannungen (No. VI B) zeigen, besitzt der Krystall eine ähnliche Zusammensetzung wie die Krystalle I, II und III. Die sämmtlichen Prismenkanten sind beim Druck positiv, weisen also auf eine Zwillingsbildung der ersten Art hin. Daran schliesst sich auf dem oberen Ende in der Umgebung der Randkanten eine Zwillingsbildung der zweiten Art, worauf sich auf einigen Kanten

in kurzen Strecken eine Wiederholung des Zwillings der ersten Art zeigt und endlich das in der Nähe des oberen Achsenendes gelegene Stück als einfaches rechtes Individuum sich darstellt.

Bei den zuvor untersuchten Krystallen war bis auf geringe Abweichungen die Bildung des oberen und unteren Endes dieselbe, namentlich trat an beiden Enden der Hauptachse dasselbe einfache Individuum auf. Anders gestaltet sich dies bei dem vorliegenden Krystalle, bei welchem an dem unteren Ende der Hauptachse (mit Ausnahme der unteren Pyramidenkante 4 . 5) ein einfaches linkes Individuum erscheint; die Kanten 5 . 6, 6 . 1, 1 . 2, 2 . 3 und 3 . 4 zeigen an dem unteren Ende der Hauptachse gerade die entgegengesetzte Polarität als am oberen.

Thermoelektrisch sind beim Erkalten die Enden der Hauptachse nebst den anliegenden Theilen der Pyramidenflächen ebenso wie bei den vorhergehenden Krystallen positiv, während die an die Prismenflächen grenzenden Streifen der Pyramidenflächen sammt den Prismenflächen (jedoch mit Ausnahme der Fläche 3) negativ erscheinen.

Der Krystall No. VI verhält sich also thermoelektrisch im Allgemeinen wie ein vollkommen symmetrischer Krystall des tetragonalen oder hexagonalen Systemes; er gleicht in seiner elektrischen Vertheilung dem Apophyllit, Idokras (Wiluit), Mellit, Kalkspath von Schneeberg, Beryll, Apatit, Mimetesit und Pyromorphit, bei welchen die Enden der Hauptachse und die anliegenden Flächenstücke positiv, die Prismenflächen aber negativ sind.

Selbst der Vorgang, dass bei dem Krystall No. VI eine Prismenfläche (3) positiv ist, findet sich bei den symmetrischen Krystallen[1], z. B. manchen Beryllen und Mimetesiten, wo diese Abweichung wahrscheinlich infolge des Anwachsens oder Anliegens entstanden ist. Dass wir aber in dem vorliegenden Krystalle keine gewöhnliche einfache hexagonale Pyramide mit Prismen haben, zeigen auf das Entschiedenste die piëzoelektrischen Beobachtungen.

---

1) Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XVIII. S. 235 und Bd. XX. S. 556.

Krystall No. VII (Taf. II, No. VII A und B).

Zum Schlusse will ich noch die Beobachtungen auf einem Krystalle mittheilen, der in dem Verhalten seiner Prismenflächen etwas von den früheren abweicht.

In seiner Masse und Gestalt gleicht der Krystall No. VII den Krystallen IV und V; seine Mitte ist trüber als seine Endstücke. Die Länge seiner Hauptachse beträgt 16,5 mm, die Länge seiner Nebenachsen 9,0 mm. Auf Prismenfläche 5 hat derselbe einen fast 1 mm tiefen Eindruck, der von einem andern Quarzkrystalle herrührt, welcher sich mit seinem einen Ende so angelegt hatte, dass eine seiner Pyramidenflächen mit der Fläche 5 parallel war, und mit ihrer Spitze bis zur Kante 4 . 5 reichte.

Die in No. VII B eingetragenen piëzoelektrischen Beobachtungen zeigen, dass der Krystall No. VII im Allgemeinen ein linkes Individuum darstellt. Auf den Prismenkanten gibt sich auch das Vorhandensein einer Zwillingsbildung erster Art theils durch die an zwei Stellen (Kante 2 . 3 und 4 . 5) auftretende positive Spannung, theils durch die Schwächung der negativen Polarität auf der Kante 6 . 1 kund. In der Umgebung der Randkanten erscheint dann die Zwillingsbildung zweiter Art, welche endlich in das einfache linke Individuum, das auch schon auf den Prismenkanten erkannt wurde, übergeht.

Die in das Netz No. VII A eingeschriebenen thermoelektrischen Beobachtungen zeigen an den Enden und in der Nähe der Randkanten dasselbe Verhalten wie bei den früheren Krystallen. Die in der Nähe der Enden der Hauptachse gelegenen Stücke der Pyramidenflächen sind positiv; daran schliessen sich negative Zonen, die auf den grossen Pyramidenflächen und den anliegenden Theilen der Prismenflächen stärker hervortreten, als an den kleinen Pyramidenflächen. Während nun aber bei den früheren Krystallen auf den Prismenflächen die negative Polarität vorherrscht, nimmt auf den Prismenflächen dieses Krystalles die positive den grösseren Raum ein. Dies weist darauf hin, dass bei dem vorliegenden Krystalle an der Oberfläche des Prismas eine dünne Schicht der Zwillingsbildung zweiter Art liegt, die ihrer Zusammensetzung gemäss (Fig. 8, Taf. I) das Hervortreten der positiven Polarität begünstigt.

D. Ueber den Grund, weshalb bei den Suttroper Zwillingen die Prismenkanten negative Polarität zeigen.

Es sind, wie wir gesehen haben, aus rechten und linken Individuen nach dem Schema Fig. 3 und 4 gebildete Zwillinge möglich, und dieselben kommen auch, wie ich nachgewiesen habe, thatsächlich vor. Stets aber (jedoch vielleicht mit Ausnahme des Krystalles No. VII) überwog bei den untersuchten Krystallen die Bildung nach dem Schema Fig. 3, bei welchem sämmtliche Prismenkanten negativ sind.

Es drängt sich daher die Frage auf, weshalb bei den Suttroper Zwillingen diese Art der Zwillingsbildung vorwaltet. Der Grund für diese Erscheinung steht im Zusammenhang mit dem elektrischen Verhalten der Enden der Hauptachse. Bei den Suttroper Quarzen sind diese Enden positiv. Bilden wir nun einen Zwilling nach der Fig. 3, so erscheint die elektrische Vertheilung wie in Fig. 7; in ihr ist das Vorwalten der positiven Spannung an den Enden der Hauptachse durch die grössere Ausdehnung der negativen auf den Prismenflächen compensirt.

Bilden wir dagegen einen Zwilling nach Fig. 4, bei welchem die elektrische Vertheilung durch Fig. 8 dargestellt wird, so tritt zwischen der Ausbreitung der positiven und negativen Polarität ein arges Missverhältniss ein; die von der positiven Elektricität eingenommenen Flächenstücke würden mehr als doppelt so gross sein, als die mit der negativen bedeckten. Es kann daher diese zweite Art der Zwillingsbildung wohl in geringerer Grösse, wie wir gesehen haben, gewissermassen untergeordnet auftreten, aber nicht die hauptsächliche äussere Begrenzung bilden, die vielmehr, soweit nicht die Bildung eines einfachen Individuums vorhanden ist, der Zwillingsbildung erster Art zufällt.



II. Fortsetzung der Untersuchung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracits.

Bereits im Jahre 1840 habe ich in meiner Habilitationsdissertation[1]) gezeigt, dass der Boracit bei steigender Temperatur, wenn dieselbe bis über 200° C. geht und ebenso auch bei dem auf diese Erhitzung folgenden Erkalten an allen Ecken der würfelförmigen Krystalle einen zweimaligen Wechsel der elektrischen Polaritäten aufweist. Die Ecken mit glatten Tetraederflächen erscheinen beim Beginne der Erhitzung —, werden dann bei höherer Temperatur +, und bei noch höherer wieder —; beim Erkalten tritt zuerst +, dann —, und zuletzt wieder + auf. Gerade entgegengesetzt verhalten sich die Ecken mit matten Tetraederflächen; beim Erhitzen zeigen sie nacheinander +, — und +, beim Erkalten —, + und —.

In derselben Schrift habe ich ferner nachgewiesen, dass auch in der Mitte der Würfelflächen Elektricität erscheint, die bei steigender und sinkender Temperatur gleichfalls solche Wechsel erleidet.

Diese eigenthümlichen Umkehrungen an den Ecken der würfelförmigen Krystalle habe ich dann in meiner Abhandlung[2]) über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites (1857) genauer untersucht, und auch die elektrischen Vorgänge auf den Flächen einer sorgfältigen Prüfung unterzogen. Dabei ergab sich, dass die Mitten der Würfelflächen in ihrer Polarität einestheils mit den glatten Tetraederflächen, anderntheils mit den matten Tetraederflächen übereinstimmen.

Es heisst daselbst (S. 213): »Man sieht leicht ein, dass, wenn die Mitte der Würfelfläche mit zwei Würfelecken übereinstimmt, in der ganzen Länge der durch diese Ecken gelegten Diagonale eine und dieselbe Elektricität vorhanden sein wird. Man kann dann also die Spitze des Platindrahtes den einzelnen Punkten dieser Diagonale, von einer Ecke zur andern hin fortrückend, nähern, ohne dass ein Wechsel der Elektricität eintritt. Dagegen gelingt dies nicht beim Vorwärtsgehen in der andern Diagonale, indem hierbei die Ausschläge

1) Quaestiones de thermoelectricitate crystallorum. Pars altera. Halae 1840. — Poggend. Ann. Bd. L. S. 471.

2) Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. VI. S. 151—252.

des Elektrometers nach der Mitte sich umkehren. Parallel mit der einen Diagonale erstreckt sich also eine Zone, in welcher die Elektricität dem Zeichen nach (nicht etwa auch in Bezug auf die Stärke) sich nicht ändert. Diese Zone hat nun auf den verschiedenen Flächen eine sehr verschiedene Breite. Bald erscheint sie ziemlich ausgedehnt, und wird dann, soweit sich dies ermitteln lässt, fast von zwei geraden, mit der Diagonale parallelen Linien begrenzt; ein anderes Mal zieht sie sich von den Ecken, wo sie die grösste Breite besitzt, zusammen, sodass ihre Breite in der Mitte nur gering ist; in anderen Fällen, wo sie sehr ausgedehnt ist, nimmt sie die ganze oder fast die ganze Fläche ein, sodass an den beiden mit ihr ungleichnamigen Ecken die zugehörige Elektricität nur auf den äussersten Spitzen gefunden wird . . . Nach den von mir gemachten Beobachtungen scheint die Zone nicht immer der Diagonale genau parallel, sondern auf manchen Flächen etwas gekrümmt zu sein.«

Ein Verständniss dieser Vorgänge vermochte ich bei unserer damaligen Kenntniss der Thermoelektricität der Krystalle noch nicht zu gewinnen, und ich habe daher diese Untersuchungen, sowie mir geeignetes Material zur Verfügung kam, bis jetzt fortgeführt. Infolge der von mir im Laufe der letzten zwanzig Jahre bewirkten Erweiterung der Lehre von der Thermoelektricität bin ich jetzt im Stande, die Bedeutung der in der Mitte der Würfelflächen auftretenden Elektricität anzugeben, und nachzuweisen, durch welchen Umstand es bewirkt wird, dass diese Mitten in ihrer Polarität einestheils mit den glatten und anderntheils mit den matten Tetraederflächen übereinstimmen.

Da die Umkehrungen in der Polarität der Ecken und Flächen in meiner letzten Abhandlung ausführlich dargelegt worden sind, so habe ich mich jetzt auf die Untersuchung der elektrischen Vertheilung, welche nach mässiger Durchwärmung (bis 90° C.) beim Erkalten eintritt, beschränkt. Diese geringe Erhitzung sollte besonders den Zweck erfüllen, alle Störungen durch etwa eintretende Umkehrungen auszuschliessen.

Krystallisationsverhältnisse des Boracites.

Das optisch anomale Verhalten des Boracites hat Veranlassung gegeben, denselben nicht als dem tesseralen Systeme angehörend zu betrachten; seine Gestalten sollen nur durch eine eigenthümliche Verwachsung rhombischer Gebilde einen pseudo-tesseralen Charakter annehmen.

Nach Mallard[1]) sollen die Krystalle des Boracites entstehen durch Zusammenlegung von zwölf rhombischen Pyramiden, deren Basisflächen die Flächen des Rhombendodekaeders bilden, und deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen. Die Hemiedrie wird durch einen Hemimorphismus der einzelnen Individuen in der Richtung der kurzen Diagonale der Basis erklärt.

Baumhauer glaubt aus seinen Aetzversuchen eine andere Zusammensetzung erschliessen zu müssen. Er betrachtet dabei ebenfalls die gewöhnliche aus Würfel, Rhombendodekaeder und den beiden Tetraedern gebildete Form als eine rhombische Krystallgestalt. Vier Flächen des Würfels sollen die Flächen ∞P, die beiden übrigen $0P$ sein. Zwei der verticalen Rhombendodekaederflächen sollen $\infty \bar{P} \infty$, die beiden anderen $\infty \breve{P} \infty$ und die übrigen acht die Flächen P darstellen. Von den acht oktaedrischen Flächen gehören vier zu $2\bar{P}\infty$ und die übrigen vier zu $2\breve{P}\infty$. Von solchen Individuen sollen sich sechs in der Weise, dass zwischen je zwei derselben eine Fläche P Zwillingsebene ist, nach innen gleichmässig zu einem Krystalle zusammenlegen, wobei alle Individuen eine Fläche $0P$ nach aussen wenden, und die Flächen $2\bar{P}\infty$ und $2\breve{P}\infty$ sich zu scheinbaren Tetraedern $+\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$ anordnen.

Gegen die Zulässigkeit dieser Auffassung Baumhauer's spricht sofort das elektrische Verhalten der Boracitkrystalle. Soweit bis jetzt die Versuche gezeigt haben, tritt bei Druck und Nachlassen des Druckes nur bei Krystallen mit hemimorpher Ausbildung und auch bei diesen nur in der Richtung der hemimorphen Achse eine polarelektrische Spannung auf. Nun zeigt der Boracit nach den trigonalen

1) Annales des mines. Bd. X. 1876. S. 39.

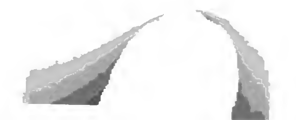
2) Groth, Zeitschrift für Krystallographie u. s. w. Bd. III. 1879. S. 337.

Zwischenachsen Piëzoelektricität; er muss also nach dieser Richtung hemimorph gebildet sein. Die von Baumhauer angenommene Zusammensetzung weist aber weder an dem einfachen Individuum noch an der zusammengesetzten Form eine hemimorphe Bildung nach; denn den Gestalten $2\bar{P}\infty$ und $2\breve{P}\infty$ kann in keiner Weise eine solche Bedeutung beigelegt werden.

Wie eben erwähnt, ist der Boracit ein Krystall, bei welchem die hemimorphen Achsen mit den trigonalen Zwischenachsen des Würfels zusammenfallen, und auch nur beim Druck in dieser Richtung entsteht Piëzoelektricität. Wenn nun aber, wie Mallard annimmt, die Boracitkrystalle aus zwölf rhombischen Pyramiden gebildet wären, deren Spitzen im Mittelpunkt zusammen treffen und deren Basen nach aussen in die Rhombendodekaederflächen fallen, so würden die einzelnen Stücke hemimorphisch nach den sogenannten rhombischen Zwischenachsen des Würfels (nach den Verbindungslinien der Mitte des Krystalles mit den Mitten der Rhombendodekaederflächen) sein. Der Gesammtkrystall würde den aus rechten und linken Individuen gebildeten Suttroper Quarzzwillingen gleichen, bei denen ebenfalls die sechs Sextanten in der Mitte, und zwar mit ihren gleichnamigen Polen zusammenstossen, während sie die entgegengesetzten, aber unter sich auch wieder gleichnamigen Pole nach aussen wenden. Bei diesen Zwillingen entstehen nun nach den hemimorphen Nebenachsen durch Druck piëzoelektrische und bei Temperaturänderungen thermoelektrische Spannungen. Solche müssten also auch, falls Mallard's Ansicht richtig wäre, beim Boracit auftreten; aber weder zeigt sich beim Druck in der Richtung der rhombischen Zwischenachsen Piëzoelektricität, noch liegen in den Mitten der Würfelkanten oder der Rhombendodekaederflächen thermoelektrische entgegengesetzte Pole.

Mallard verlegt aber den Hemimorphismus überhaupt in die Richtung der kurzen Diagonale der Basen jener rhombischen Pyramiden oder der Würfelkanten. Zwischen den beiden an den Enden einer Würfelkante liegenden Ecken findet allerdings thermoelektrisch ein Gegensatz statt; als eine hemimorphe Achse kann aber die Richtung der Würfelkante nicht betrachtet werden; denn es wird beim Druck in dieser Richtung keine Piëzoelektricität entwickelt.

Infolge der so scharf ausgeprägten hemimorphen Bildung können wir für den Aufbau der Boracitkrystalle nur hemimorphe Gestalten



zu Grunde legen, und zwar ergeben sich als solche die beiden Tetraeder, die ich aus einem sogleich anzugebenden Grunde als positives und negatives bezeichnen will. Unter den beim Boracit vorkommenden hemimorphen Formen sind sie ausgezeichnet durch ihr fast stetes Vorhandensein, sowie durch ihre Ausdehnung, in welcher Hinsicht sie oft die parallelflächigen Gestalten übertreffen.

Krystallographisch sind die beiden Tetraeder, jedes für sich betrachtet, von einander nicht verschieden; ein Unterschied existirt aber in der Zugehörigkeit ihrer Flächen zu entgegengesetzten Enden der trigonalen Zwischenachsen. Nach diesen Achsen tritt eben beim Boracit die hemimorphe Bildung auf; die beiden Enden jeder dieser Achsen stehen in einem polarelektrischen Gegensatze. Während beim Erkalten das eine Ende derselben positiv wird, erscheint das andere negativ. An dieser Beschaffenheit der Achsenenden nehmen nun die Tetraederflächen, welche daselbst liegen, theil; die an den positiven Enden liegenden zeigen positive, die an den negativen entwickelten entsprechend negative Elektricität[1]. Je nachdem nun die Tetraederflächen an den positiven oder negativen Achsenenden auftreten, und daher selbst beim Erkalten positiv oder negativ werden, können wir die beiden Tetraeder kurz und bestimmt von einander als positives oder negatives ($+O$ oder $-O$) unterscheiden[2].

Die beiden Tetraeder befinden sich also in einer um 90° verschiedenen Stellung, sodass die Flächen des einen auf die Ecken des anderen fallen.

Ausser in dem elektrischen Verhalten unterscheiden sich die Flächen der beiden Tetraeder auch in ihrem äusseren Ansehen. Die Flächen des positiven Tetraeders sind glänzend, die des negativen matt und glanzlos[3].

---

1) Die entgegengesetzten Enden der Achsen endigen in den Ecken des Tetraeders, wo also die andere Elektricität wahrgenommen wird.

2) Das Zeichen $+$ oder $-$ deutet an, dass die Flächen nur an den positiven oder negativen Enden der trigonalen Achsen erhalten sind; es bedarf also nicht des Zeichens $+\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$; ebenso bezeichnet $-2O2$ und $+5O\frac{5}{3}$ vollkommen bestimmt das negative Pyramidentetraeder und das positive Hexakistetraeder, die sonst durch $-\frac{2O2}{2}$ und $+\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$ dargestellt werden.

3) Es zeigt sich hier also ein gleicher Unterschied wie zwischen den Flächen

[illegible]

1. Einfache Krystalle.

[illegible]



ein einziger, wahrscheinlich vom Kalkberge bei Lüneburg stammender, zur Verfügung.

a. Krystall mit grossen negativen Tetraederflächen.

Krystall No. I (Taf. II, No. I). Der Krystall gehört der Freiberger Sammlung und ist mir von Herrn Bergrath Weisbach freundlichst geliehen worden; der Abstand der Mitte einer Tetraederkante von der Mitte der gegenüberliegenden beträgt 6,5 mm. Der Krystall ist eine Combination der beiden Tetraeder mit den Flächen des Rhombendodekaeders, des Würfels, des Pyramidentetraeders und des Hexakistetraeders. Seine Masse ist grau und trübe.

Die Flächen des negativen Tetraeders sind gross und matt; die Flächen des positiven sehr klein und glänzend. Ebenso sind glänzend die vorhandenen Flächen des Würfels und des Hexakistetraeders. Die Rhombendodekaederflächen zeigen keinen Glanz, sind aber glätter ausgebildet als die grossen Tetraederflächen.

Um die Werthe der auf den 26 Flächen dieses Krystalles beobteten elektrischen Spannungen eintragen zu können, habe ich eine Art Netz in vergrössertem Maassstabe gezeichnet. Es ist dabei, um die Zeichnung übersichtlicher zu machen, das Tetraeder als dreiseitige von den Flächen 1, 2 und 3 gebildete Pyramide auf die Fläche 4 gestellt. Die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 bezeichneten Flächen sind also die grossen Flächen des negativen Tetraeders. Die kleinen mit *A*, ***B***, *C*, ***D*** bezeichneten Dreiecke sind die auf den Ecken des negativen Tetraeders liegenden Flächen des positiven Tetraeders; die zwischen den grossen und kleinen Tetraederflächen liegenden 12 Flächen, welche je drei eine kleine Tetraederfläche umgeben, sind die Flächen des Rhombendodekaeders, die ich einfach durch die Zeichen der beiden Tetraederflächen, zwischen denen sie liegen, bezeichnen will, sodass also z. B. 1 . *A* die in der Zeichnung oberhalb der Fläche 1 liegende Rhombendodekaederfläche bedeutet; die 6 kleinen länglichen Sechsecke (I, II, III, IV, V und VI) stellen die 6 Würfelflächen dar. Die Flächen des Pyramidentetraeders und des Hexakistetraeders sind ihrer Kleinheit wegen in die Zeichnung nicht aufgenommen worden.

Die in das Netz eingetragenen Beobachtungen sind in 26 einzelnen Versuchen gemacht worden. Es war dabei jedesmal der

Krystall bis auf die zu prüfende Fläche in Kupferfeilicht eingehüllt, längere Zeit bis 95° in einem Luftbade erhitzt, und dann 5 bis 8 Minuten nach dem Herausnehmen und dem Beginne der Abkühlung auf sein elektrisches Verhalten untersucht worden.

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich nun Folgendes: Auf den grossen Tetraederflächen 1, 2, 3 und 4 erscheint negative Elektricität; dabei greift öfter die positive der angrenzenden Würfelflächen auf die ihnen benachbarten Theile hinüber. Die kleinen Tetraederflächen sind positiv, wenn auch ungleich in ihrer Stärke; die schwächste Spannung zeigt die kleine Fläche *A*. Die Flächen des Würfels sind positiv[1]). Die Flächen des Rhombendodekaeders sind mit Ausnahme der Fläche (1 . *A*) fast ganz positiv, und zwar nimmt die Intensität nach den kleinen Tetraederflächen hin zu, nach den grossen Tetraederflächen hin ab; ja auf mehreren dehnt sich die negative Polarität der grossen Tetraederflächen auch noch über einen Theil des angrenzenden Randes der Rhombendodekaederflächen aus[2]).

Auf der Rhombendodekaederfläche (1 . *A*) gewinnt die negative Elektricität eine grössere Ausdehnung, so dass diese Fläche nur noch an dem in der Zeichnung rechten Rande positiv erscheint, während der linke Rand und die Mitte bis gegen die kleinen Tetraederflächen hin sich negativ gestaltet. In der an dieser Stelle vorhandenen Störung einer normalen Ausbildung, auf die ich später zurückkommen werde, liegt auch der Grund für die so geringe Intensität der auf der kleinen glänzenden Tetraederfläche (*A*) beobachteten positiven Spannung.

Beziehen wir die an dem vorliegenden negativen Tetraeder beobachtete elektrische Vertheilung auf den Würfel, so finden wir an den Enden der hemimorphen Ecken- oder trigonalen Zwischenachsen eine polare elektrische Vertheilung, wobei die mit matten Tetraederflächen versehenen Enden negative, die anderen mit glatten Tetraederflächen aber positive Polarität besitzen.

---

1) Die Zeichen ⧺ und = bedeuten eine so grosse Stärke der positiven und negativen Elektricität, dass dieselbe nicht mehr gemessen werden konnte, weil das Goldblättchen des Elektrometers weit über die Skala hinausging.

2) Mit der oben angegebenen elektrischen Vertheilung stimmt die in meiner früheren Abhandlung (1857) auf zwei Krystallen mit grossen rauhen Tetraederflächen (No. XIII und XIV) beobachteten überein.

Bei den symmetrisch gebildeten Krystallen des Kalkspathes, Berylles, Topases, Schwerspathes u. s. w. reicht die Verschiedenheit der Achsen hin, um bei Temperaturänderungen Elektricität zu entwickeln. Ich habe daher in meiner bereits mehrfach citirten Abhandlung[1]) über die elektrischen Vorgänge beim Bergkrystalle die Frage gestellt, ob nicht auch bei hemimorphen Krystallen der Unterschied zwischen den nicht hemimorphen Achsen hinreichend sein könnte, um nach diesen symmetrisch gebildeten Achsen ebenfalls elektrische Spannungen, und zwar an beiden Enden einer Achse gleichnamige, hervorzurufen. Dies könnte sich z. B. beim Turmalin darin aussprechen, dass die eine Polarität auf den prismatischen Seitenflächen eine grössere Verbreitung zeigte als die andere. Beim Zucker, wo die hemimorphe Achse die Richtung der Orthodiagonale besitzt, würde dann ebenfalls eine verschieden grosse Verbreitung der beiden Elektricitäten auf den an den Enden der verticalen Achse und der Klinodiagonale liegenden Flächen zu erwarten sein. Wie ich in der genannten Abhandlung angeführt, haben aber derartige Versuche nur ein negatives Resultat ergeben; es war in keinem Falle bei den mit nur einer hemimorphen Achse versehenen Krystallen möglich, mit Bestimmtheit eine solche ungleiche Ausdehnung der beiden Polaritäten nachzuweisen. Es lässt sich aber auch leicht der Grund erkennen, weshalb bei diesen Krystallen eine elektrische Vertheilung nach den symmetrischen Achsen nicht wahrgenommen werden kann.

Bei den hemimorphen Krystallen hängt die polare Erregung von der die unsymmetrische Gestalt des Moleküles bedingenden hemimorphen Achse ab, und wir besitzen, soweit bis jetzt die Versuche reichen, kein Mittel, dieselbe abzuändern; jedes Bruchstück gleicht in seinem elektrischen Verhalten dem ganzen Krystalle. Bei den Krystallen mit einer hemimorphen Achse macht sich daher der Einfluss derselben überall geltend; für keinen Punkt findet eine Aufhebung oder Compensirung derselben statt.

Während bei den im Vorstehenden genannten unsymmetrischen Krystallen eine infolge einer blossen Verschiedenheit der Achsen auftretende Elektricitätsentwickelung nicht wahrgenommen werden konnte,

---

1) S. 498.

wird diese letztere aber nach gewissen Richtungen bestimmt hervortreten, wenn mehrere hemimorphe Achsen vorhanden sind, die sich infolge ihrer symmetrischen Lage gegen diese Richtungen in ihren Wirkungen aufheben.

Wie ich nachgewiesen habe, besitzt der Bergkrystall drei sich unter 60° schneidende senkrecht gegen die Hauptachse gestellte polarelektrische Achsen, und man erkennt sofort, dass sich in der Hauptachse die Wirkungen der drei hemimorphen Achsen vollständig neutralisiren. Nach der Hauptachse kann also wegen ihrer Verschiedenheit von den Nebenachsen, wie beim Wiluit, Beryll, Kalkspath u. s. w. die den stattfindenden Bedingungen entsprechende thermoelektrische Erregung mit gleichnamigen Polen an den Enden auftreten.

Dabei zeigt sich, wie die zuvor mitgetheilte Untersuchung der Suttroper Quarzzwillinge beweist, eine bestimmte Beziehung zwischen der polaren und der nichtpolaren Elektricitätserregung, so dass die eine als Ergänzung der anderen erscheint. Bei den obengenannten Zwillingen erreicht infolge der eigenthümlichen Vertheilung die auf den Prismenflächen vorhandene positive Zone nur eine geringe Intensität; dieselbe findet dann in der positiven Polarität an den Enden der Hauptachse und den anliegenden Theilen der Pyramidenflächen ihre nothwendige Ergänzung.

In analoger Weise wie beim Bergkrystall gestalten sich nun die Verhältnisse beim Boracit; die vier hemimorphen trigonalen Zwischenachsen liegen symmetrisch um die drei Hauptachsen und heben sich in ihren Wirkungen für jede derselben auf, sodass die hemimorphe Bildung also nicht das Auftreten gleichnamiger Pole an den Enden der drei Hauptachsen oder auf den Würfelflächen hindert.

Durch meine Untersuchungen über die Thermoelektricität des Flussspathes[1]) habe ich gezeigt, dass die Unterschiede, welche im tesseralen Systeme zwischen den Hauptachsen und den trigonalen Zwischenachsen vorhanden sind (ebenso wie die Unterschiede zwischen den Haupt- und Nebenachsen im tetragonalen und hexagonalen Systeme), hinreichen, um bei Temperaturänderungen zu thermoelektrischen Erregungen Veranlassung zu geben. Es können daher beim

---

1) Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XX. S. 201.

Boracit infolge der Unterschiede zwischen den Hauptachsen und den trigonalen Zwischenachsen ebensolche elektrische Spannungen auftreten.

Während bei den hemimorphen Krystallen die Entwicklung der polaren Elektricität allein durch die unsymmetrische Bildung des Moleküles bedingt wird, und durch anderweitige Einwirkungen nicht geändert werden kann, ist das Verhalten der elektrischen Vertheilung auf symmetrischen Krystallen ein anderes. Diese letztere ist allerdings durch die aus der Lagerung der das Molekül bildenden Atome folgenden Unterschiede in den Achsen bedingt, kann aber durch die Art des Wachsthums, sowohl durch die Lage der Ansatzstellung, von der aus der Krystall sich entwickelt, als auch durch die an ihnen auftretenden speciellen Formen, durch welche er sich zu einem Individuum abschliesst, sowie auch durch mechanische Verletzung dieses Individuums oder durch Hindernisse bei seiner Ausbildung modificirt werden. In meinen früheren Abhandlungen sind zahlreiche Beispiele dafür am Topas, Schwerspath, Kalkspath u. s. w. aufgeführt.

Eben solche Modificationen werden auch auf hemimorphen Krystallen in den an den Enden der symmetrischen Achsen auftretenden elektrischen Polaritäten durch das specielle Verhalten der polarelektrischen Vertheilung nach den hemimorphen Achsen eintreten können.

Nun entwickelt sich bei dem Krystall No. 1 die negative Polarität auf den matten ausgedehnten Tetraederflächen, während die glatten Flächen, auf welchen die positive erscheinen muss, nur klein sind. Die auf den Würfelflächen auftretende starke positive Spannung bildet dafür die nothwendige Ergänzung. Verhielten sich bei einem solchen Tetraeder die Flächen und die Ecken in elektrischer Beziehung gerade umgekehrt, wären also die grossen Tetraederflächen positiv und die kleinen auf den Ecken liegenden negativ, so würden, wie dies der folgende Krystall zeigt, die Würfelflächen negative Polarität besitzen. Die auf den Würfelflächen erscheinende Elektricität entspricht völlig der auf symmetrischen Krystallen beobachteten.

Durch das Zusammenwirken der positiven Pole auf den Ecken des Tetraeders und auf den Würfelflächen des Krystalles No. 1 entsteht auf der Oberfläche desselben eine zusammenhängende positive Zone, deren Mittellinie mit den sechs Kanten des negativen Tetraeders

zusammenfällt, während die negative Polarität in vier getrennten Feldern auf den grossen Tetraederflächen angehäuft ist.

Die in die Zeichnung des Netzes eingetragene elektrische Vertheilung ergibt sich auch im Allgemeinen beim Bestäuben des erkaltenden Krystalles mit Schwefel und Mennige. Sämmtliche kleinen Flächen des positiven Tetraeders erscheinen gelb, und es zieht sich diese gelbe Farbe über die Würfelflächen und die anliegenden Theile der Rhombendodekaederflächen hin. Die grossen Tetraederflächen sind roth und es greift diese Rothfärbung auch auf die angrenzenden Ränder einiger Rhombendodekaederflächen hinüber.

b. Krystall mit grossen positiven Tetraederflächen.

Krystall No. II (Taf. II, No. II). Dieser Krystall gehört gleichfalls der Freiberger Sammlung; seine Masse ist grauweisslich und undurchsichtig. Er stellt eine Combination des positiven Tetraeders und des Würfels, die beide nahe gleich stark ausgebildet sind, mit dem Rhombendodekaeder dar; von den Flächen des negativen Tetraeders ist kaum eine in sehr geringer Grösse vorhanden. Er weicht darin von dem Krystalle No. I ab, dass seine Würfelflächen bei weitem grösser sind als bei jenem.

Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 6,7 mm.

Der leichteren Uebersicht wegen habe ich das Netz des Krystalles unter Zugrundelegung der Würfelflächen abgebildet. Die Flächen 1 bis 6 stellen die Würfelflächen und die vier gleichseitigen Dreiecke die vier positiven Tetraederflächen dar. Die Rhombendodekaederflächen sind ihrer Kleinheit wegen fortgelassen.

Nach einer längeren Erhitzung auf 95° zeigte der Krystall auf den vier grossen Tetraederflächen sehr starke positive Spannung, sodass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde ging. An den nicht abgestumpften Würfelecken (Tetraederecken) tritt starke negative Elektricität auf, und verbreitet sich diagonal über die Würfelflächen. Dabei greift die sehr starke positive Polarität der grossen Tetraederflächen etwas über den Rand auf die anliegenden Theile der Würfelflächen hinüber, was bei zwei Flächen (4 und 5) so weit geht, dass die negative Polarität in der Mitte der Würfelflächen gar nicht wahrgenommen werden kann.

Die in der Zeichnung eingetragene Vertheilung der Elektricitäten kann im Allgemeinen auch durch Bestäubung des Krystalles mit Mennige und Schwefel sichtbar gemacht werden. Die grossen Tetraederflächen erscheinen stark gelb, während sich auf den Würfelflächen 1, 2, 3 und 6 nach den Diagonalen, welche den Tetraederkanten entsprechen, ein rother Streifen hinzieht. Bei der Fläche 4 ist die Mitte desselben in einer sehr geringen, bei der Fläche 5 in etwas grösserer Strecke unterbrochen; es sind dies die Stellen, wo in der Zeichnung die positive Elektricität der Tetraederflächen auf die Würfelflächen hinüber greift.

Sehen wir von dieser Störung auf den Flächen 4 und 5 ab, so ist bei dem vorliegenden Tetraeder die elektrische Vertheilung gerade die entgegengesetzte als bei No. I. Während bei No. I die positiven Flächenstücke eine nach den Kanten des negativen Tetraeders verlaufende zusammenhängende Zone bilden und die negative Polarität auf den vier grossen Flächen des negativen Tetraeders auftritt, haben wir jetzt eine nach den Kanten des positiven Tetraeders zusammenhängende negative Zone und finden die positive Spannung auf den vier grossen Flächen des positiven Tetraeders.

B. *Rhombendodekaedrische Krystalle.*

a. Krystall mit positiven Würfelflächen.

Krystall No. III (Taf. II, No. III). Dieser der Freiberger Sammlung gehörige Krystall bildet den Uebergang von den tetraedrischen Formen zu den rhombendodekaedrischen. Er trägt grosse Flächen des Rhombendodekaeders sowie des negativen Tetraeders, mässig entwickelte Flächen des Würfels und nur äusserst kleine Flächen des positiven Tetraeders; die letzteren erscheinen fast nur als sehr glänzende Punkte. Die grossen Flächen des negativen Tetraeders sind matt und sehr rauh, die Flächen des Würfels ziemlich glänzend, weniger glänzend die Rhombendodekaederflächen, bei denen oft der Rand stärker glänzt als der innere Theil.

Der Krystall ist ausgezeichnet durch seine beträchtliche Grösse; der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 13 mm. Seine Masse ist grau und undurchsichtig, sie gleicht der Masse des Krystalles No. I.

In dem Netze stellen die mit den Ziffern 1 bis 12 bezeichneten Flächen die Rhombendodekaederflächen, die mit *T* bezeichneten die grossen rauhen Flächen des negativen Tetraeders dar, während in den kleinen mit römischen Ziffern I—VI bezeichneten Quadraten die Würfelflächen abgebildet sind. Die sehr kleinen glänzenden Flächen des positiven Tetraeders sind nicht eingetragen; sie liegen dort, wo in der Zeichnung des Netzes drei Rhombendodekaederflächen mit ihren Winkeln von 109° 28′ zusammenstossen.

Die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche dieses Krystalles stimmt mit der am Krystall No. I beobachteten überein. Die sehr kleinen glänzenden Tetraederflächen, die Kanten des Rhombendodekaeders nebst den anliegenden Flächenstücken und die Würfelflächen sind positiv; dagegen zeigen die grossen matten Tetraederflächen *T* negative Polarität, die sich auch meistens noch über den Rand hin auf die benachbarten Theile der Rhombendodekaederflächen verbreitet.

Die positive Elektricität bildet also wieder eine zusammenhängende Zone, welche nach den Kanten des negativen Tetraeders verläuft; dazwischen erscheint in getrennten Gebieten auf den Flächen des eben genannten Tetraeders die negative Polarität.

In dem vorliegenden Krystalle sind aber doch kleine Störungen bei seiner Bildung eingetreten; dieselben geben sich durch Aenderungen zu erkennen, welche bei längerer Abkühlung bemerkbar werden. Die am unteren Ende des Netzes mit VI bezeichnete Würfelfläche erscheint beim Beginn des Erkaltens positiv und behält diese Polarität, je nach der Schnelligkeit der Abkühlung 8—12 Minuten; später aber erscheint an der nach den Rhombendodekaederflächen 9 und 10 hin gelegenen Ecke dieser Fläche eine kleine negative Stelle, welche mit der Verschiebung der negativen Polarität auf den Flächen 9 und 10 nach dieser Ecke hin zusammenhängt.

Auf der Rhombendodekaederfläche 1 zeigt sich zuerst die gewöhnliche Vertheilung, d. h. die negative greift von der grossen Tetraederfläche auf die Rhombendodekaederfläche hinüber, wie dies in dem Netze gezeichnet ist. Nach längerer Abkühlung zieht sich aber ein schmaler Streifen positiver Spannung an der von der Tetraeder- und Rhombendodekaederfläche gebildeten Kante hin, so dass jetzt die negative Polarität auf der Rhombendodekaederfläche 1 eine kleine Insel in der positiven Fläche darstellt.

Beim Bestreuen mit dem Gemenge von Schwefel und Mennige werden die kleinen glänzenden Tetraederflächen, die Rhombendodekaederkanten nebst den anliegenden Flächenstücken und die Würfelflächen gelb; die grossen rauhen Tetraederflächen aber roth, und von ihnen aus erstrecken sich rothe Zungen mehr oder weniger weit in die Rhombendodekaederflächen hinein.

b. Krystalle mit positiven und negativen Würfelflächen.

Wie im Vorhergehenden nachgewiesen, treten beim Boracit zweierlei Tetraeder auf; bei den einen sind die Flächen negativ, die Ecken positiv, bei den andern die Flächen positiv, die Ecken negativ. Ich habe oben die ersteren kurz als negative, die zweiten als positive Tetraeder bezeichnet. Die Würfelflächen stimmen in ihrer Polarität stets mit den Ecken überein, sind also bei den negativen Tetraedern (No. I) positiv, bei den positiven (No. II) negativ.

Durch welche Umstände aber die Entstehung des einen oder des andern Tetraeders bestimmt wird, entzieht sich bis jetzt unserer Erkenntniss. Jedenfalls sind Contactverhältnisse, Concentration und Temperaturvorgänge in der Masse, aus welcher die Krystalle sich ansetzen, die bedingenden Ursachen. Die für den ersten Ansatz maassgebend gewesene Bildung wird sich so lange fortsetzen, als nicht besondere Vorgänge einen Wechsel erfordern und kann sonach in dem ganzen Umfange eines Krystalles, wie bei No. I, II und III, dieselbe geblieben sein.

Aendern sich aber während des Wachsthums eines Krystalles die Verhältnisse, so kann sich eine bisher nach dem einen Tetraeder stattgehabte Bildung in eine solche nach dem andern Tetraeder verwandeln und sich ebenfalls auf die weiteren Ansätze übertragen. Die Polarität nach den hemimorphen Achsen wird dadurch nicht geändert, weil die elektrischen Pole in beiden Tetraedern absolut dieselbe Lage haben; wohl aber spricht sich dieser Unterschied in dem Verhalten der Kanten der Tetraeder oder der auf ihnen liegenden Würfelflächen aus. Während in dem rhombendodekaedrischen Krystall No. III die Bildung nach einem negativen Tetraeder (wenigstens im allergrössten Theile) erfolgt war, bei welcher die Würfelflächen positive Polarität zeigen, werden auch Rhombendodekaeder möglich

sein, bei denen ein Wechsel in der Bildungsweise eintritt, und damit ein Theil der Würfelflächen positiv, der übrige Theil aber negativ erscheint. Die ersteren weisen auf eine Bildung nach dem negativen, die anderen auf eine Bildung nach dem positiven Tetraeder hin.

Als eine Zwillingsbildung im krystallographischen Sinne dürfen wir aber einen solchen Wechsel nicht betrachten; dieselbe würde nur dann vorhanden sein, wenn innerhalb eines Krystalles die hemimorphen Achsen eine verschiedene Lage zeigten, wofür ich weiterhin Beispiele liefern werde. Wir haben jenen Wechsel vielmehr mit den Aenderungen zu vergleichen, welche bei symmetrischen Krystallen durch die Art des Wachsthums bedingt werden. Zu einem solchen Wechsel in der Bildung nach dem einen oder dem anderen Tetraeder wird aber beim Boracit vielleicht gerade bei dem Vorhandensein der polarelektrischen Achsen durch eine Aenderung der Temperatur während des Wachsthums der Krystalle leicht Veranlassung gegeben.

Krystall No. IV (Taf. II, No. IV). In diesem Krystall ist die Bildung nach dem negativen Tetraeder noch vorherrschend. Seine Masse ist ziemlich durchsichtig. Er stellt vorzugsweise ein Rhombendodekaeder dar; die Würfelflächen sind klein, noch kleiner die glänzenden Tetraederflächen. Kaum sichtbar sind die matten Tetraederflächen und die Flächen des Pyramidentetraeders. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 6,2 mm.

Bei ihm, so wie bei den beiden folgenden Krystallen sind die Beobachtungen ebenso durchgeführt worden, wie auf dem Krystall No. III; ich werde aber von der Mittheilung der einzelnen gemessenen Spannungen absehen und die elektrische Vertheilung, wie sie aus jenen Beobachtungen hervorgeht, nur durch Farben in die beiden Projectionen No. 4 *A* und *B* eintragen. *A* ist die Projection der vorderen, *B* der hinteren Seite; letztere ist herumgeklappt, wie leicht aus den am Umfange befindlichen Buchstaben zu entnehmen, wo derselbe Buchstabe sich auf dieselbe Ecke bezieht. Die Würfel- und Tetraederflächen sind nicht mitgezeichnet; ihre Lage ergibt sich aus der Figur von selbst.

Von den Würfelflächen sind jetzt nur noch die vier in *a*, *c*, *g* und *n* liegenden positiv, die beiden anderen in *k* und *e* liegenden aber negativ; erstere weisen also auf die Bildungsweise nach einem

negativen Tetraeder, letztere in gleicher Weise nach einem positiven Tetraeder hin. Denken wir uns die beiden Tetraeder in das Rhombendodekaeder eingezeichnet, so liegen die Ecken des negativen in den positiven Würfelecken *i*, *m*, *h* und *d*, die Ecken des positiven in den negativen Würfelecken *f*, *b*, *l* und *o*. Während nun beim Krystall No. III oberhalb aller Kanten des negativen Tetraeders positive Zonen lagen, finden wir sie bei dem vorliegenden Krystalle nur oberhalb der Kanten *i*, *m* (auf *a*), *m d* (auf *n*), *m h* (auf *g*) und *i d* (auf *c*). Oberhalb der Kanten des positiven Tetraeders *f l* (auf *k*) und *o l* (auf *e*) treffen wir dagegen negative Zonen an.

Krystall No. V (Taf. II, No. V). Dieser Krystall gleicht in seiner Masse und äusseren Begrenzung dem vorhergehenden, ist aber etwas kleiner; der Abstand zweier paralleler Würfelflächen erreicht nur 5,7 mm. In ihm halten sich die Bildungen nach dem positiven und dem negativen Tetraeder nahe im Gleichgewicht.

Beim Anblick der in die beiden Projectionen No. V *A* und *B* eingetragenen elektrischen Beobachtungen fällt sofort das gleiche Verhalten der positiven und negativen Elektricität in Bezug auf ihre Verbreitung auf.

Drei Würfelflächen *e*, *g* und *c* sind positiv, die drei übrigen *a*, *n* und *k* negativ. Denken wir uns die beiden Tetraeder in den Würfel eingeschrieben (wie dies in No. V *C* geschehen ist), so verlaufen die positiven Zonen in zusammenhängender Folge nach den Kanten des negativen Tetraeders *m h* (über *g*), *h d* (über *e*) und *d i* (über *c*), die negativen Zonen aber ebenfalls zusammenhängend nach den Kanten des positiven Tetraeders *l f* (über *k*), *fb* (über *a*) und *bo* (über *n*).

Krystall No. VI (Taf. II, No. VI). Der Krystall No. VI gleicht in seiner Masse und Gestalt den beiden vorhergehenden, ist aber etwas grösser; der Abstand zweier Würfelflächen beträgt 7,6 mm.

Unter den Würfelflächen sind die Flächen bei *c* und *m* ganz positiv; auf der Würfelfläche bei *a* erscheint nach den Flächen 1 und 4 hin negative Polarität, und nur nach den Flächen 2 und 3 hin findet sich positive. Die Flächen bei *k*, *g* und *e* sind negativ.

Verfolgen wir wieder die positiven und negativen Zonen nach dem Verlaufe der Kanten der beiden eingeschriebenen Tetraeder (dieselben sind jetzt in den Würfel No. VI *C* eingezeichnet), so geht

eine positive Zone nach den Kanten des negativen Tetraeders *i d* (über *c*), *d m* (über *n*) und *m i* (über *a*), wobei dieselbe bei *a* etwas verschmälert erscheint; sie bildet also eine geschlossene Linie. In einer eben solchen in sich zurücklaufenden Linie zieht sich nun die negative Zone nach den Kanten des positiven Tetraeders *f l* (über *k*), *l o* (über *e*) und *o f* (über *g*).

Stellen wir den Krystall aufrecht mit der trigonalen Achse *b h*, so liegt am oberen Ende *b* ein isolirter negativer Pol; darauf folgt eine durch die Würfelecken *m*, *i*, *d*, sowie durch die vierflächigen Rhombendodekaederecken *a*, *c*, *n* gehende geschlossene positive Zone; darauf eine gleiche der vorher beschriebenen parallel durch die Würfelecken *f*, *l*, *o* und die vierflächigen Rhombendodekaederecken *k*, *e*, *g* laufende negative Zone, unterhalb deren sich schliesslich wieder ein isolirter positiver Pol in *h* findet.

C. *Würfelförmige Krystalle.*

Aehnliche Verhältnisse, wie bei den rhombendodekaedrischen Krystallen finden sich auch bei den würfelförmigen und ich werde aus der grossen Zahl der untersuchten Krystalle einige auswählen, um die verschiedenen beobachteten elektrischen Vertheilungen darzulegen.

a. Krystall mit positiven Flächendiagonalen.

Diese Krystalle entsprechen in ihrer Bildung den negativen Tetraedern; ihre Würfelflächen, welche auf die Kanten dieser Tetraeder fallen, sind also beim Erkalten positiv, so dass auf ihnen eine mit der einen Diagonale im Allgemeinen parallel gehende positive Zone entsteht.

Krystall No. VII (Taf. III, No. VII). Der kleine ziemlich durchsichtige Krystall stammt von Stassfurt. Ausser den Würfelflächen zeigt er nur vier kleine glatte Tetraederflächen. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 2,8 mm.

Trotz seiner Kleinheit gestattete er doch eine vollständige Untersuchung. Die glatten Tetraederflächen sind positiv, und von ihnen ziehen sich positive Zonen über die Würfelfläche hin, die auf den Flächen 1, 2, 3 und 4 ziemlich breit sind; auf den Flächen 5 und

6 konnte aber die positive Beschaffenheit infolge der seitlich liegenden sehr starken negativen Pole in der Mitte nur durch Auflegen der Spitze des Platindrahtes nachgewiesen werden.

Krystall No. VIII (Taf. III, No. VIII). Der sehr grosse Krystall misst von einer Würfelfläche bis zur gegenüberliegenden 14 mm. Seine Masse ist weisslichgrau, undurchsichtig und porös. Die Begrenzung wird von grossen Würfeln und schmalen Rhombendodekaederflächen gebildet. Von den glatten Tetraederflächen erscheint nur eine sehr kleine auf der Ecke (3 . 4 . 6); die rauhen Tetraederflächen sind auf allen vier ihnen entsprechenden Ecken, wenn auch nur in sehr geringer Grösse vorhanden. Auf der nach der Ecke (2 . 5 . 6) hin gelegenen Hälfte ist die Fläche 6 verletzt; an der mit α, β, γ, δ bezeichneten Stelle befindet sich eine Bruchfläche.

Die Würfelflächen erscheinen fast in ihrer ganzen Ausdehnung positiv; nur auf der Fläche 6 geht die negative Diagonale an der verletzten Stelle durch, was wohl eine Folge der daselbst unvollkommenen Ausbildung der stattgehabten Anwachsung ist[1]). Auf den Rhombendodekaederflächen erstreckt sich öfter die negative Polarität von den matten Tetraederflächen bis über die Mitte hin; es ist dies derselbe Vorgang, wie ihn das negative Tetraeder No. I und das Rhombendodekaeder No. III zeigen, wo fast stets die negative Spannung von der Tetraederfläche aus mehr oder weniger weit sich auf die anliegenden Stücke der Rhombendodekaederflächen verbreitet. Auch beim Bestäuben mit dem Gemenge aus Schwefel und Mennige sieht man öfter, wie sich die negative Polarität als schmaler Streifen bis über die Mitte der Rhombendodekaederflächen hin erstreckt.

b. Krystalle mit negativen Flächendiagonalen.

Entsprechend den positiven Tetraedern mit negativen Würfelflächen finden sich auch Würfel, bei welchen sich auf sämmtlichen Flächen die negativen Zonen von einem Endpunkte zum andern (parallel mit den Kanten des positiven Tetraeders) hinziehen.

---

1) Durch solche Vorgänge werden die polarelektrischen Vertheilungen nach hemimorphen Achsen nicht gestört, wohl aber diejenigen Elektricitäten, welche wie hier auf den Würfelflächen nicht polar sind. Vergl. S. 309.

Krystall No. IX (Taf. III, No. IX). Der Krystall gehört dem Kieler Museum und ist mir von Herrn Professor Karsten gütigst geliehen worden. Er stammt von Segeberg; seine Masse ist zwar durchsichtig, aber durch wolkige Einschlüsse getrübt. Er wird von den Flächen des Würfels gebildet, die Flächen des Rhombendodekaeders erscheinen nur als sehr schmale Abstumpfungen und von den Tetraederflächen sind kaum Spuren wahrzunehmen. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 3,5 mm.

Die auf seiner Oberfläche beobachtete elektrische Vertheilung ist in das Netz No. IX eingetragen.

Ein zweiter, demselben Museum gehöriger Krystall von Segeberg, der etwas kleiner ist (Abstand zweier paralleler Würfelflächen 3,1 mm) und dem vorhergehenden in Gestalt und Masse völlig gleicht, verhielt sich genau ebenso.

Beim Bestäuben erscheinen auf diesen Krystallen sämmtliche Diagonalen zwischen den negativen Ecken durch Mennige roth gefärbt.

Krystall No. X (Taf. III, No. X). Die Masse dieses Krystalles ist graulich und undurchsichtig; seinen Fundort kenne ich nicht. Ausser den Würfelflächen zeigt er schmale Rhombendodekaederflächen und winzig kleine Tetraederflächen. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 5,8 mm.

Die elektrische Vertheilung ist in das Netz No. X eingetragen. Alle Würfelflächen zeigen durchgehende negative Diagonalen; auf der Mitte der Fläche 4 ist die elektrische Spannung sogar grösser als an den Ecken. Auch beim Bestäuben treten diese Diagonalen deutlich hervor.

c. Krystalle mit positiven und negativen Diagonalen auf den Würfelflächen.

Krystall No. XI (Taf. III, No. XI). Die Masse dieses jedenfalls vom Kalkberge bei Lüneburg stammenden Krystalles ist undurchsichtig und erscheint jetzt infolge des mehr als hundertmaligen Erhitzens bis gegen 300° braun. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen misst 8,5 mm.

Ausser den Würfelflächen trägt er mässig grosse Rhombendodekaederflächen; auch die glatten Tetraederflächen besitzen eine ziem-

liche Ausdehnung, während von den matten Tetraederflächen nur eine sichtbar ist.

Auf sämmtlichen Flächen, mit Ausnahme der Fläche 3, treten die negativen Diagonalen auf, während auf der Fläche 3 die positive erscheint.

Beim Bestäuben erscheinen die Diagonalen sehr deutlich.

Krystall No. XII (Taf. III, No. XII). Der farblose Krystall, welchen ich der Güte des Herrn Geh. Hofrath Knop in Karlsruhe verdanke, ist infolge trüber Einlagerungen nur halbdurchsichtig; der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 6 mm. Die Flächen des Würfels, des Rhombendodekaeders und des glatten Tetraeders haben ziemlich gleich grosse Entwickelung; dagegen sind die Flächen des matten Tetraeders und des Pyramidentetraeders äusserst klein.

Wie die in das Netz No. XII eingetragenen Beobachtungen nachweisen, besitzen fünf Flächen (2 bis 6) negative Diagonalen. Auch auf der Fläche 1 tritt nur beim Auflegen des Drahtes ein sehr schwacher positiver Ausschlag auf, während bei der Annäherung aus einem Abstande von 1,5 mm bis 0,2 mm sich noch ein negativer Ausschlag zeigt. Die Rhombendodekaederflächen werden fast ganz von der negativen Elektricität eingenommen.

Beim Bestäuben legte sich die Mennige an den fast nicht abgestumpften Ecken auf die Rhombendodekaederkanten und erstreckte sich dann über die Würfelflächen; dagegen hatte sie sich nicht über die Rhombendodekaederflächen verbreitet. Auf den grossen glatten Tetraederflächen ging der Schwefel vorzugsweise vom Mittelpunkte derselben in kleinen Streifen senkrecht gegen die von ihnen mit den Würfelflächen gebildeten Kanten.

Krystall No. XIII (Taf. III, No. XIII). Die Masse dieses Krystalles, den ich der Güte meines Herrn Collegen Zirkel verdanke, ist graugelblich und undurchsichtig. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 12 mm.

Ausser den sehr grossen Würfelflächen trägt der Krystall wenig breite Rhombendodekaederflächen, sowie glatte Tetraederflächen. Die Flächen des rauhen Tetraeders sind nur schwach entwickelt.

Wie die Beobachtungen in dem Netze No. XIII ergaben, sind drei Würfeldiagonalen positiv und drei negativ; dieselben entsprechen in ihrer Lage der für das Rhombendodekaeder in No. V angegebenen.

Krystall No. XIV (Taf. III, No. XIV). Die Masse dieses kleinen Krystalles (Abstand zweier paralleler Würfelflächen 3 mm) ist undurchsichtig; sie hatte ursprünglich ein grauweisses Aussehen, das sich aber durch vielmaliges Erhitzen (über 250°) in ein braunes verwandelt hat. Ausser den Würfelflächen besitzt der Krystall noch in geringer Grösse die glatten Tetraederflächen. Die Rhombendodekaederflächen sind kaum wahrnehmbar.

Die in das Netz No. XIV eingetragene elektrische Vertheilung gleicht der auf dem Rhombendodekaeder No. VI beobachteten. Stellen wir den Krystall mit der trigonalen Achse, welche die Ecken (3 . 4 . 6) und (1 . 2 . 5) verbindet, vertical, so dass die Ecke (1 . 2 . 5) oben liegt, so findet sich auf ihr ein isolirter, negativer Pol; darauf folgt eine durch die Ecken (1 . 4 . 5), (1 . 2 . 3), (2 . 5 . 6) und durch die Mitte der Flächen 1, 2 und 5 gehende geschlossene positive Zone, weiter abwärts eine gleiche negative durch die Ecken (1 . 3 . 4), (2 . 3 . 6), (4 . 5 . 6) und durch die Mitten der Flächen 3, 6 und 4 gehend, und schliesslich am untern Ende ein isolirter positiver Pol auf der Ecke (3 . 4 . 6).

Wird der Krystall, während er auf der Fläche 2 (oder 1) liegt, also die Fläche 4 (oder 6) nach oben kehrt, mit dem Gemenge aus Schwefel und Mennige bestäubt, so macht sich die zuletzt beschriebene Zone der negativen Diagonale sehr kenntlich. Die Ecke (3 . 4 . 6) erscheint in einigem Abstande von einem Kreise von Mennige umgeben, der auf den Flächen 3, 4 und 6 um dieselbe herumläuft. Auf der Ecke (3 . 4 . 6) selbst sammelt sich infolge der abstossenden Wirkung dieser negativen Zone kein Schwefel, obwohl dieselbe, wie die Messungen mit dem Elektrometer nachweisen, positiv ist.

Auch bei diesem Krystalle sind öfter die elektrischen Spannungen in der Mitte der Würfelflächen grösser als an den mit ihr gleichnamigen Ecken.

2. Krystalle mit Zwillingsbildungen.

Wenn beim Boracit Zwillinge entstehen sollen, so müssen die gleichnamigen Enden der hemimorphen Achsen in beiden Individuen eine verschiedene Lage haben, es werden also zwei gleichnamige Tetraeder, wenn sie zu einem Zwilling zusammentreten, in einer um

90° (Drehung um die Hauptachse) verschiedenen Stellung stehen, so dass die negativen Pole des einen auf die positiven des andern fallen.

Ich habe schon oben S. 309 darauf hingewiesen, dass die polarelektrische Vertheilung durch die Unsymmetrie des Moleküles erzeugt wird und dass wir durch äussere Eingriffe dieselbe nicht zu ändern vermögen. Wenn wir also einen Boracit antreffen, bei welchem die beiden Enden einer oder mehrerer solcher Achsen nicht polar entgegengesetzte, sondern gleichnamige Pole zeigen, so haben wir den Grund allein dafür in einer Zwillingsbildung zu suchen, welcher der Krystall bei seiner Entstehung in mehr oder weniger starkem Grade unterlegen hat. Die äussere Gestaltung bietet oft gar keine oder nur sehr geringe Merkmale dar, um solche Verwachsungen zweier in verschiedener Stellung befindlichen Individuen zu erkennen; dagegen vermag die thermoelektrische Untersuchung dieselben sicher nachzuweisen.

A. *Verwachsung zweier negativer Tetraeder.*

a. Tetraedrische Krystalle.

Beim negativen Tetraeder, wie es der Krystall No. I darbietet, sind die Flächen negativ, die Ecken und die Würfelflächen positiv. Wächst nun in der Nähe einer Ecke ein Stück eines ebensolchen negativen Tetraeders, dessen Stellung aber 90° um die Hauptachse gegen das erste Tetraeder gedreht ist, ein, so bleiben die Würfelflächen in ihrer positiven Beschaffenheit ungeändert, weil sie an beiden Individuen positiv sind; dagegen wird an der Ecke, wo das gedrehte Stück sich eingefügt hat, weil seine tetraedrischen Moleküle die Flächen nach dieser Ecke wenden, eine negative Polarität erscheinen, falls das eingelagerte Stück hinreichend gross ist.

Bei den nächsten beiden Krystallen No. XV und XVI liegen solche eingewachsene, in einer um 90° gedrehten Stellung befindliche Stücke nur an einer Ecke des negativen Tetraeders, die dadurch ihre positive Polarität verliert und ins Negative übergeht. Bei dem folgenden Krystall No. XVII finden sie sich an allen vier Ecken; dies zeigt sich auch schon in der äusseren Umgrenzung des Krystalles, der eine fast oktraedrische Form besitzt.

Krystall No. XV (Taf. III, No. XV). Der Krystall No. XV gleicht in seiner Bildung dem unter No. I gezeichneten; nur ist seine Masse fast durchsichtig, während sie bei No. I undurchsichtig war. Ich werde daher die auf seinen Flächen gemachten Beobachtungen in ein gleiches Netz wie bei No. I eintragen. Die wirkliche Grösse des Krystalles ist aber etwas geringer als bei No. I; der Abstand zweier gegenüberliegender Würfelflächen beträgt nur 4,5 mm.

Die elektrische Vertheilung auf diesem tetraedrischen Krystalle gleicht im Allgemeinen der für No. I angegebenen. Die grossen Tetraederflächen sind im Ganzen negativ, die Würfelflächen positiv und es greift an einigen Stellen diese positive Polarität etwas über die Ränder auf die Tetraederflächen hinüber. Die Rhombendodekaederflächen sind im Allgemeinen in der nach den Ecken (kleinen Tetraederflächen) hin gelegenen Theilen positiv; in den an die grossen Tetraederflächen grenzenden aber negativ. Nur auf den um die Ecke oder kleine Tetraederfläche (*A*) gelegenen geht die negative bis zu dieser kleinen Fläche selbst; ein deutlicher Beweis, dass hier eine Störung durch ein in anderer Stellung eingelagertes Stück eingetreten ist. Infolge dieser Einlagerung zeigt die kleine Tetraederfläche (*A*) keine positive Spannung, wie die drei übrigen, sondern negative. Auch in dem Verhalten der in der Nähe jener kleinen Fläche (*A*) gelegenen Würfelflächen zeigt sich eine Störung; sie sind in den dieser Fläche zugewandten Teilen negativ, während sie sonst in ihrer ganzen Ausdehnung positive Polarität besitzen.

Das eingeschobene Stück tritt also in sieben Versuchsreihen, bei denen der Krystall in sehr verschiedener Weise in das Kupferfeilicht eingesetzt war, durch eine Störung der normalen Vertheilung sehr deutlich hervor.

Auch durch piëzoelektrische Versuche lässt sich das an der Ecke (*A*) liegende Zwillingsstück nachweisen.

Beim Boracit erzeugt Druck dieselbe Polarität wie Erkaltung. Wird also ein einfaches negatives Tetraeder, wie z. B. No. I, mit einer seiner grossen Flächen auf eine horizontale metallische Unterlage gestellt, und auf die obere Spitze (oder kleine Tetraederfläche) mittelst der an dem Hebelarme befestigten Zinnplatte[1]) ein Druck

---

1) Siehe S. 278.

ausgeübt, so wird diese Zinnplatte positiv, die Unterlage, auf welcher der Krystall steht, aber negativ.

Wenn nun der vorliegende Krystall No. XV in gleicher Weise behandelt wird, so erscheinen, wenn der Reihe nach die Flächen 1, 2 und 3 unten und die Ecken (*C*), (*D*) und (*B*) oben liegen, die Ecken positiv und die Flächen negativ, wie es dem thermoelektrischen Verhalten entspricht. Die positiven Ausschläge[1]) auf den Ecken betrugen in derselben Reihenfolge + 12, + 18, + 12 Skth.; die negativen der gegenüberliegenden waren fast ebenso gross.

Anders verhielt sich aber der Krystall beim Druck auf die Ecke (*A*), während die Fläche 4 auf der Unterlage stand. Die Ecke gab einen negativen Ausschlag von — 44 Skth. und die Fläche einen ebensolchen positiven. Die Vorzeichen dieser Ausschläge waren also den auf den andern drei Ecken und Flächen beobachteten gerade entgegengesetzt. Auffallend ist noch die grosse Intensität der in dem letzten Versuche gefundenen elektrischen Spannung.

Diese piëzoelektrischen Beobachtungen beweisen also ebenfalls, dass auf der Ecke (*A*) ein Zwillingsstück liegt, so dass die hier befindliche kleine Tetraederfläche nicht, wie bei einem einfachen Krystalle, die Ecke eines negativen Tetraeders abstumpft, sondern vielmehr selbst wieder die Fläche eines negativen Tetraeders darstellt.

Die dieser Ecke gegenüberliegende Fläche 4 erhält durch einen auf die Ecke (*A*) ausgeübten Druck allerdings positive Spannung; dieselbe ist aber nur eine Wirkung des darüberliegenden Zwillingsstückes. Dieses Zwillingsstück macht sich zwar, ebenso wie dies beim Quarz der Fall war[2]), beim Druck in dem piëzoelektrischen Verhalten geltend, thermoelektrisch tritt aber auf dieser Fläche 4, die sich auch durch ihr Aussehen als die Fläche eines negativen Tetraeders kund gibt, die negative Beschaffenheit der jenes Zwillingsstück umschliessenden Hülle hervor.

Auf die Einlagerung eines um 90° gedrehten Zwillingsstückes weist auch die geringere Intensität in den Ecken (*C*), (*D*) und (*B*) hin.

---

1) Die öfters stark auftretende Piëzoelektricität forderte bei diesen Versuchen ein weniger empfindliches Elektrometer. Die Spannung an dem Ende eines Elementes Zink-Kupfer-Wasser gab nur einen Ausschlag von 15 Skth.

2) Siehe oben S. 294.

Die Bildung des vorliegenden Krystalles ist von der Ecke *A* ausgegangen; das zuerst hier sich bildende Tetraeder lag mit einer seiner Flächen an dieser Stelle und erreichte eine bestimmte Grösse. Ueber dieses Tetraeder legte sich dann an den nach den übrigen drei Ecken hin gerichteten Theilen ein anderes negatives Tetraeder in einer um 90° gedrehten Stellung, das an dem vollendeten Krystalle jetzt an der Aussenfläche mit Ausnahme der Ecke (*A*) vorliegt. Doch hat dabei das erste Tetraeder in der Richtung nach der Fläche 4 hin noch bis auf eine gewisse Strecke ein weiteres Fortwachsen beibehalten.

Das ursprüngliche Tetraeder kommt beim Druck auf die Ecke (*A*) zur Erscheinung, während es doch nicht gross genug ist, um die der äusseren Umhüllung entsprechende Polarität beim Druck auf die anderen drei Ecken aufzuheben; es vermag dieselbe nur zu schwächen.

Krystall No. XVI (Taf. III, No. XVI). Der Krystall No. XVI gleicht in seiner Gestalt und Masse dem Krystall No. XV. Ausser den Flächen der beiden Tetraeder, des Würfels und des Rhombendodekaeders finden sich an ihm auch noch sehr kleine Flächen des Pyramidentetraeders und des Hexakistetraeders. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen beträgt 5 mm.

Die elektrische Vertheilung gleicht im Allgemeinen der auf No. XV beobachteten; ebenfalls tritt bei dem vorliegenden Krystalle infolge eines eingewachsenen Zwillingsstückes auf der kleinen Tetraederfläche (*C*) und den dieselbe umgebenden Rhombendodekaederflächen anstatt der positiven die negative Polarität auf.

Auch die piëzoelektrische Untersuchung weist das hier befindliche Zwillingsstück nach. Wurden der Reihe nach die Flächen 2, 3 und 4 auf eine metallische Unterlage gestellt, und auf die jedesmal oben liegende Ecke (*D*), (*B*) und (*A*) die an dem Hebel befindliche Zinnplatte aufgelegt, so gaben beim Eintritt des Druckes die Flächen die Ausschläge — 9, — 25, — 15 Skth., die Ecken + 9, + 22 und + 18 Skth. Wurde dagegen der Krystall auf die Fläche 1 gestellt und die Zinnplatte auf die obere Ecke (*C*) gelegt, so trat ein eigenthümlicher Vorgang ein, den ich bei den Zwillingen des Bergkrystalles ebenfalls schon beobachtet und in meiner Abhandlung beschrieben habe.

Es heisst daselbst[1]: »Ferner tritt in der Nähe dieser Einschiebungen (Zwillingsstücke) sehr oft eine eigenthümliche Erscheinung auf, und zwar ebenso beim Eintreten wie beim Nachlassen des Druckes. Beim Eintritt des Druckes wird z. B. eine Kante erst positiv, das Goldblättchen bleibt aber nicht in dieser Ablenkung stehen, sondern kehrt langsam zurück und geht nach der negativen Seite. Beim Nachlassen des Druckes erscheint an derselben Stelle des Krystalles zuerst negative Spannung, die aber allmählich abnimmt und in die positive übergeht. Wird in diesem Falle die Ableitung des Goldblättchens erst zwei Secunden nach dem Wegnehmen des Druckes aufgehoben, so geht das Goldblatt langsam nach der positiven Seite. Eine derartige Nachwirkung findet bei einfachen Krystallen nicht statt« . . . .

»In welcher Reihenfolge die beiden Elektricitäten beim Druck (und ebenso beim Nachlassen desselben) bei zusammengesetzten Krystallen in der Nähe der Einwachsungen auftreten, lässt sich, da die genaueren Grenzen der Verwachsungen im Innern der Krystalle nicht bekannt sind, zuvor nicht bestimmen. Wenn in manchen Fällen zuerst die Polarität auftritt, welche der Hauptmasse des Krystalles entspricht, so erscheint in anderen Fällen zuerst die dem eingeschobenen Stücke entsprechende und geht dann in die der Hauptmasse über.«

Die im Vorstehenden beschriebene Erscheinung wiederholt sich nun auch beim Drucke des vorliegenden Tetraeders in der Richtung senkrecht gegen die Fläche 1. Ist die auf der Ecke (E) ruhende Zinnplatte mit dem Elektrometer verbunden, während die Unterlage zur Erde abgeleitet wird, so entsteht beim Eintritt des Druckes ein Ausschlag von + 5 Skth., der sehr bald abnimmt und sich in einen negativen verwandelt; letzterer steigt allmählich bis — 28 Skth. Bei Aufhebung des Druckes erfolgt zunächst ein Ausschlag — 2, der dann allmählich in + 28 übergeht. Ist die Unterlage isolirt und mit dem Elektrometer verbunden, die Zinnplatte aber zur Erde abgeleitet, so entsteht beim Druck zuerst ein Ausschlag — 4, der allmählich in + 25 übergeht; beim Nachlassen beobachtet man zuerst + 2, was allmählich in — 24 übergeht[2]).

---

1) S. 544.

2) Man muss sich vorsehen, dass man nicht mit dem oben beschriebenen

Der zuerst erscheinende Ausschlag stimmt in seinem Vorzeichen mit dem auf den übrigen Ecken und Flächen gefundenen überein, entspricht also der äusseren Hülle des Krystalles, während der darauffolgende dem um 90° gedrehten, an der Ecke (*C*) befindlichen Zwillingsstücke angehört.

Zur Erklärung dieses eigenthümlichen Vorganges kann nur die Annahme dienen, dass nach dem Eintritt des Druckes noch gewisse Verschiebungen der Moleküle erfolgen, die dann allmählich vorschreiten. Bei dem Krystall No. XV war von einem solchen Vorgange nichts wahrzunehmen.

Wir finden also bei dem Krystall No. XVI im Allgemeinen dieselbe Bildungsweise, wie in dem vorhergehenden. An der Ecke (*C*) hat sich ursprünglich ein negatives Tetraeder gebildet, dessen eine Fläche der jetzigen kleinen Fläche auf der Ecke (*C*) parallel lag; dasselbe ist dann von einem anderen um 90° gedrehten Tetraeder umhüllt worden. Die Fläche 4 gehört dieser Hülle an; sie gibt sich

---

Vorgange eine ähnliche Erscheinung verwechselt, welche auch an einfachen Boracitkrystallen infolge der starken thermoelektrischen Erregung sich zeigt. Ist z. B. das Tetraeder No. I mit der Fläche 4 auf die Unterlage gestellt und die Zinnplatte auf die obere Ecke gelegt, so entsteht beim Druck, wenn die Zinnplatte mit dem Goldblättchen verbunden ist, ein positiver Ausschlag, der jedoch allmählich um einen gewissen Betrag abnimmt. Lässt man beim Eintritt des Druckes das Goldblättchen noch mit der Erde in leitender Verbindung und isolirt erst nach einigen Secunden, so geht das Goldblättchen um einen gewissen Betrag nach der negativen Seite. Der Grund dieser nach dem Eintritt des Druckes erscheinenden negativen Polarität ist einfach die durch den Druck erzeugte Wärme, welche die Ecke (*A*) negativ macht. Hebt man den behufs Ausgleichung der Temperatur längere Zeit bestandenen Druck auf, so entsteht ein negativer Ausschlag, der allmählich bis auf eine gewisse Grösse abnimmt. Bleibt das Goldblättchen bei Aufhebung des Druckes noch mit der Erde in Verbindung und wird erst einige Secunden später isolirt, so beobachtet man einen allmählich bis zu einer gewissen Grösse wachsenden positiven Ausschlag, hervorgerufen durch die infolge der Ausdehnung eingetretene Temperaturerniedrigung, welche an der Ecke (*A*) die positive Polarität zur Folge hat.

Beim Bergkrystall kann (auch abgesehen von der geringen Intensität der thermoelektrischen Erregung) der in dieser Anmerkung beschriebene Vorgang nicht eintreten, weil bei ihm Druck und Erwärmung und ebenso wieder Nachlassen des Druckes und Erkaltung dieselbe Polarität erzeugen, während beim Boracit Druck und Erkaltung und andererseits Nachlassen des Druckes und Erwärmung Ausschläge von gleichem Vorzeichen ergeben.

durch ihr thermoelektrisches Verhalten und ihre sonstige Beschaffenheit als die Fläche eines negativen Tetraeders kund.

Krystall No. XVII (Taf. III, No. XVII). Der kleine Krystall No. XVII gehört der Strassburger Sammlung und ist mir von Herrn Professor Dr. BÜCKING freundlichst geliehen worden. Von einer Würfelfläche bis zur gegenüberliegenden misst er 4 mm. Er zeigt die Flächen zweier Tetraeder, des Würfels, Rhombendodekaeders, Pyramidentetraeders und Hexakistetraeders. Während sonst die Flächen des einen Tetraeders sehr klein sind, besitzen an diesem Krystalle mehrere eine etwas grössere Ausdehnung, so dass derselbe einigermassen ein oktaedrisches Ansehen erhält[1]).

Untersuchen wir zuvörderst das piëzoelektrische Verhalten, so ergibt sich beim Druck in der Richtung jeder der trigonalen Zwischenachsen die kleinere Tetraederfläche negativ, die ihr parallele grössere aber positiv. Die in jeder der vier Richtungen entwickelten elektrischen Spannungen sind nahe einander gleich, was auf einen ziemlich regelmässigen Aufbau des Krystalles schliessen lässt.

Vergleichen wir diese Beobachtungen mit den auf den früheren tetraedrischen Krystallen gemachten, so lehren dieselben, dass wir in dem vorliegenden Individuum ebenfalls eine Zwillingsbildung haben, aber nicht blos an einer durch eine kleine Tetraederfläche abgestumpften Ecke. Um ein negatives tetraedrisches Gebilde, dessen Flächen den am Krystall vorhandenen kleinen Tetraederflächen entsprechen, hat sich vielmehr ringsum ziemlich gleichförmig eine Masse gelegt, deren Moleküle einem anderen, ebenfalls negativen, aber in einer um 90° verdrehten Stellung befindlichen Tetraeder angehören. Diesem letzteren Tetraeder gehören die grossen Tetraederflächen an.

Man kann den Krystall nicht, wie dies von Herrn MACK geschieht, als einen einfachen auffassen; damit stehen die durch Druck erzeugten elektrischen Spannungen in vollem Widerspruche. Die grossen Tetraederflächen werden durch ihre Beschaffenheit und durch die Lage der Flächen des Pyramidentetraeders und des Hexakistetraeders als die Flächen eines negativen Tetraeders gekennzeichnet,

---

1) Dieser Krystall ist derselbe, welchen Herr MACK in seiner Abhandlung »über das pyroelektrische Verhalten des Boracites« unter No. 8 beschrieben und untersucht hat. Zeitschrift für Krystallographie. Bd. VIII. 1884. S. 513.

müssten also beim Druck negativ werden; sie zeigen jedoch gerade entgegengesetzt positive Spannung, die aber nicht ihnen, sondern dem inneren Kern ihre Entstehung verdankt[1]). Die kleineren Tetraederflächen sind nicht wie bei einfachen Krystallen die Flächen eines positiven Tetraeders, sondern die Flächen eines negativen, welche dem inneren Kern angehören. Die matte Beschaffenheit ihrer Oberfläche charakterisirt sie auch schon als die Flächen eines negativen Tetraeders[2]).

Der vorliegende Krystall ist, wie bereits oben erwähnt wurde, von Herrn Mack auf sein thermoelektrisches Verhalten mittelst der Methode der Bestäubung untersucht worden. Ich wende mich daher zunächst zu den auf diesem Wege gewonnenen Beobachtungen.

Auf den Flächen eines einfachen negativen Tetraeders nimmt, wie wir früher S. 306 gesehen haben, die negative Spannung nach den Rändern hin ab; jedoch nach den benachbarten positiven Würfelflächen hin in stärkerem Grade als nach den anliegenden kleinen Tetraederflächen hin. Sie geht in der Nähe der Würfelflächen oft schon in die positive über, während sie sich andererseits häufig über die den Tetraederflächen anliegenden Theile der Rhombendodekaederflächen ausbreitet.

Infolge dieser auf einfachen negativen Krystallen vorhandenen elektrischen Vertheilung erscheint bei dem Bestäuben mit einem Gemenge aus Mennige und Schwefel auf der Mitte der grossen Tetraederflächen ein mehr oder weniger deutliches, von Mennige gebildetes rothes Dreieck, dessen Spitzen gegen die anliegenden Rhombendodekaederflächen gerichtet sind; die den Würfelflächen zugewandten Seiten dieser Dreiecke zeigen sich dagegen bei deutlichen Figuren nach innen gekrümmt. Die Spitzen des Dreieckes verlängern sich häufig in schmale Zungen, welche sich eine Strecke weit über die Rhombendodekaederflächen verbreiten, wie das früher bei den Krystallen No. I und III beschrieben ist.

Wenn nun ein Krystall wie der vorliegende einen aus zwei

---

1) Vergl. die S. 281 angeführten Beobachtungen.

2) Herr Mack sagt in seiner Abhandlung, dass die grossen Tetraederflächen ziemlich mattflächig sind; die Flächen des anderen Tetraeders bezeichnet er als kleiner, einzelne sehr klein, mit Unebenheiten, auf den ersten Blick rauher erscheinend.

negativen Tetraedern gebildeten Zwilling darstellt, an welchem die Flächen beider Tetraeder negative Polarität besitzen, so sind auf diesen sämmtlichen Flächen die Spitzen der Dreiecke gegen die Rhombendodekaederflächen gerichtet, und bei hinreichender Stärke der negativen Polarität werden die von einer grossen und einer kleinen Tetraederfläche ausgehenden Fortsätze zusammentreffen. Es bildet sich dann eine rothe Linie, welche die von den Tetraederflächen ausgehenden Spitzen der Dreiecke verbindet.

Wäre der Aufbau des Krystalles ein absolut regelmässiger, so würde diese Verbindung zwischen allen grossen und kleinen Tetraederflächen in gleicher Stärke auftreten. Da jedoch eine vollkommene Regelmässigkeit nicht zu erwarten ist, so werden diese Verbindungen mehr oder weniger deutlich vorhanden sein, auch wohl auf den Rhombendodekaederflächen eine Unterbrechung erleiden.

Herr Mack sagt über die Vertheilung des Schwefels und der Mennige auf diesem Krystalle in seiner oben angeführten Abhandlung S. 513: »Sämmtliche Versuche ergeben mehr oder weniger deutlich das gleiche Verhalten. Gelb erscheinen alle sechs Würfelflächen; fünf davon waren stärker gelb als die sechste, welche an Ausdehnung die kleinste war. Die Mehrzahl der Rhombendodekaederflächen waren in ihren den Würfelflächen anliegenden Theilen ebenfalls gelb. Alle acht Tetraederflächen zeigten Rothfärbung. Auf derselben traten diejenigen Linien stärker hervor, welche von den Mitten der Flächen senkrecht zu den Oktaederkanten verlaufen. Die rothen Linien setzten sich mehr oder weniger deutlich über die Rhombendodekaederflächen fort. Nicht alle Tetraederflächen zeigten die dreistrahlige Figur gleich scharf; auf einigen war sie leicht erkennbar, auf den übrigen nur andeutungsweise vorhanden.«

Herr Mack hat die Bestäubung 10 bis 20 Secunden nach dem Herausnehmen aus dem heissen Luftbade eintreten lassen. Ich habe diese Versuche an dem bis 95° C. erhitzten Krystall 15, 30 und 120 Secunden nach dem Herausnehmen aus dem Luftbade wiederholt. Der Krystall war dabei mit einer grossen Tetraederfläche auf einen dünnen Kupferstreifen mittelst Leimes befestigt und es waren stets die obere kleine Tetraederfläche und die sie umgebenden Rhombendodekaederflächen genau bekannt. Der Krystall wurde in vier verschiedenen Lagen bestäubt, in denen die Flächen 1, 2, 3 und 4 auf dem

Kupferstreifen aufgeleimt waren, und also der Reihe nach die kleinen Tetraederflächen *C*, *D*, *B* und *A* oben lagen. Bei der Bestäubung konnten jedesmal die Zeichnungen auf der oberen kleinen Tetraederfläche, den sie umgebenden Rhombendodekaederflächen und den seitlichen drei grossen Tetraederflächen beobachtet werden.

Bei den Bestäubungen nach 15 und 30 Secunden laufen, entsprechend den Angaben des Herrn Mack, welcher die Bestäubung 20 Secunden nach dem Beginne der Abkühlung eintreten liess, schmale rothe Streifen fast über alle Rhombendodekaederflächen von den Spitzen der rothen Dreiecke auf den grossen Tetraederflächen nach den kleinen Tetraederflächen; ausgenommen waren nur die Rhombendodekaederflächen *C*3, *C*4 und *D*4, auf denen der von 3 und 4 ausgehende rothe Streifen nur bis zur Mitte dieser Flächen ging, ohne die kleinen Tetraederflächen *C* und *D* zu erreichen.

Veranlasst durch die mittelst des Elektrometers beobachteten Vorgänge wurde auch, wie schon erwähnt, noch eine Bestäubung 2 Minuten nach dem Beginn der Abkühlung vorgenommen. Jetzt waren die Zeichnungen im Allgemeinen andere. Auf den meisten Rhombendodekaederflächen zog sich an der von ihnen mit den angrenzenden kleinen Tetraederflächen gebildeten Kante ein gelber, also eine positive Polarität andeutender Streifen von einer Würfelfläche bis zur andern. Dies geschah auf allen Flächen mit Ausnahme der um *B* gelegenen und der Fläche *A*3, auf welchen auch jetzt noch der rothe Streifen von der Spitze des Dreieckes auf den grossen Tetraederflächen bis zur kleinen Tetraederfläche, wenn auch bisweilen nur sehr schwach, wahrgenommen werden konnte.

Die Beobachtungen mittelst des Elektrometers wurden zuerst so ausgeführt, dass der Krystall wie gewöhnlich in Kupferfeilicht eingesetzt war und dabei nur eine der 26 Flächen (der 4 grossen und 4 kleinen Tetraederflächen, der 6 Würfel- und der 12 Rhombendodekaederflächen), welche gerade untersucht werden sollte, frei blieb und daran noch Versuche an den 12 Rhombendodekaederflächen angeschlossen, bei welchen nur der mittlere, von einer grossen zu einer kleinen Tetraederfläche laufende Streifen dieser Flächen frei blieb, während die nach den Würfelflächen hin gelegenen Theile der Flächen bedeckt waren[1]).

1) Liegt die ganze Rhombendodekaederfläche frei, so wirken alle ihre Theile,

Die Beobachtungen begannen ungefähr 2 Minuten nach Beginn der Abkühlung und wurden bis zu 10 und 12 Minuten fortgesetzt. Dabei zeigten sich Aenderungen in der Polarität auf den Rhombendodekaederflächen[1]).

Die in die Zeichnung No. XVII eingetragenen Messungen beziehen sich auf den Zustand nach 10 bis 12 Minuten dauernder Abkühlung, während jede der gezeichneten Flächen frei lag. Die auf den einzelnen Rhombendodekaederflächen beobachteten Aenderungen werde ich hier mit Worten angeben:

1) Auf den um *A* gelegenen drei Rhombendodekaederflächen wurde gleich anfangs (d. h. 2 Minuten nach Beginn der Abkühlung) bei freier Fläche nur auf der Fläche *A* 3 in der Nähe von *A* negative Spannung beobachtet, die dann in die positive überging. Auf der Fläche *A* 2 konnte dieselbe anfangs nur auf dem mittleren Streifen, als derselbe allein frei lag, beobachtet werden. Sonst erschien überall positive Spannung.

2) Flächen um *B*. Bei ganzer freier Fläche wurde auf der Fläche *B* 1 überall positive Spannung gefunden. Auf der Fläche *B* 2 war anfangs der nach V hin gelegene Theil und die Mitte negativ, das nach I hin liegende Stück positiv; diese letztere Polarität verbreitete sich allmählich auch über die Mitte, so dass zuletzt nur die an V gelegene Spitze negativ verblieb. Aehnlich verhielt sich die

---

wenn auch je nach ihrem Abstande in verschiedener Stärke, auf den genäherten Platindraht vertheilend. Herrscht z. B. in der Mitte dieser Fläche nur eine schwache negative Spannung, während zu beiden Seiten in der Nähe der Würfelflächen starke positive Elektricität sich findet, so zeigt das Elektrometer beim Annähern des Platindrahtes an die Mitte nicht negative, sondern positive Polarität an. Man kann indess an der Bewegung des Goldblättchens bereits die negative Beschaffenheit der Mitte der Fläche erkennen, indem beim langsamen Annähern des Drahtes der eintretende positive Ausschlag bis zu einem gewissen Punkte wächst und dann bei weiterer Annäherung infolge der unterhalb liegenden, aus grosser Nähe wirkenden negativen Elektricität abnimmt. Um einen negativen Ausschlag hervortreten zu lassen, ist es nöthig, die seitlichen und positiven Flächenstücke mit Kupferfeilicht zu bedecken.

1) Durch diese Wahrnehmungen wurden die zuvor angeführten Versuche mittelst der Bestäubung nach 2 Minuten veranlasst. Die Abkühlung des in Kupferfeilicht eingehüllten Krystalles erfolgte selbstverständlich langsamer, als wenn der Krystall frei auf dem Kupferstreifen befestigt war.

Fläche *B* 4; sie war anfangs nur nach IV hin positiv, die Mitte und der an V grenzende Theil aber negativ. Im Verlaufe der Abkühlung dehnte sich die positive Spannung auch über die Mitte aus, so dass nur der an V anstossende Theil negative Spannung zeigte. Die negative Beschaffenheit der beiden Flächen *B* 2 und *B* 4 in der Nähe der Würfelfläche V steht jedenfalls mit der geringen Stärke der positiven Spannung auf V in ursächlichem Zusammenhang. Waren die Enden der Rhombendodekaederflächen bedeckt und nur der mittlere Streifen frei geblieben, so trat auf der Mitte der Flächen *B* 2 und *B* 4 die negative Spannung hervor.

3) Flächen um *C*. Bei ganzer freier Fläche zeigte anfangs die Fläche *C* 2 in der Mitte und dem nach V hin gelegenen Theile negative Spannung, und nur der nach II hin gelegene Theil war positiv; später erschien nur der nach V und 2 hin gelegene Theil noch negativ. Auf der Fläche *C* 3 war anfangs die Mitte und der nach II hin gelegene Theil negativ, der nach VI hin liegende positiv; später trat überall positive Spannung hervor. Auf der Fläche *C* 4 zeigte sich anfangs fast überall negative, später positive Polarität. Waren nur die mittleren Streifen der um *C* liegenden Rhombendodekaederflächen frei, so zeigten dieselben fast sämmtlich negative Elektricität.

4) Flächen um *D*. Auf den Flächen *D* 3, *D* 1 und *D* 4 zeigte sich bei ganzer freier Fläche überall positive Spannung, mit Ausnahme einer kleinen Stelle auf der Fläche *D* 3 (am Rande von *D* nach III hin gelegen). Auch wenn die Mitten der Flächen allein frei, die nach den Würfelflächen hin gelegenen Theile mit Kupferfeilicht bedeckt waren, wurde nur positive Polarität beobachtet[1]).

Die sowohl durch die Bestäubung als auch durch das Elektrometer nachgewiesenen Aenderungen in der elektrischen Beschaffenheit

1) Wenn bei den Beobachtungen mit dem Elektrometer die negativen Streifen auf den Rhombendodekaederflächen weniger häufig beobachtet wurden, als beim Bestäuben, so liegt der Grund davon hauptsächlich darin, dass die Bestimmungen mit dem Elektrometer erst nach einer Abkühlung von 2 Minuten begannen. Hätte man diese sogleich beim Beginne derselben ausführen wollen, so hätte der Krystall auf den neben dem Elektrometer befindlichen kleinen Ofen erhitzt werden müssen. Bei den durch die Bestäubung erhaltenen Resultaten erschien eine Wiederholung in dieser Weise nicht mehr nöthig.

der Rhombendodekaederflächen sind jedenfals eine Folge der Zwillingsbildung.

Krystall No. XVIII (Taf. II, No. XVIII). Dieser grosse Krystall, den ich der Güte des Herrn Prof. KARSTEN verdanke, ist leider an seiner unteren Seite, wie sich aus dem Netze No. XVIII ergibt, verbrochen. Der Abstand der beiden parallelen Würfelflächen 2 und 4 beträgt 12 mm. Der Krystall besitzt grosse Würfelflächen; ziemlich ausgedehnt sind auch die Rhombendodekaeder- und die glatten Tetraederflächen; die matten Tetraederflächen sind kleiner. Seine Masse ist grau und dicht, und die Flächen, mit Ausnahme des matten Tetraeders, zeigen ein glattes und glänzendes Aussehen. Die als 6 bezeichnete Fläche ist eine ziemlich ebene Bruchfläche.

Die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche dieses Krystalles ist in das Netz No. XVIII[1]) eingetragen. Aus derselben ergibt sich, dass seine Bildung in der Hauptmasse einem negativen Tetraeder entspricht; denn die fünf vorhandenen Würfelflächen sind positiv. Ausgezeichnet ist derselbe durch die Bildung nach einem zweiten negativen, gegen die Hauptmasse um 90° gedrehten Tetraeder. Dies zweite Tetraeder zeigt sich namentlich an der Ecke (1 . 3 . 4), wo auf der glatten Tetraederfläche nach der Würfelfläche 1 hin die negative Polarität erscheint, und sich auch noch über die anliegenden Theile dieser Würfelfläche und der beiden Rhombendodekaederflächen (1 . 3) und (1 . 4) verbreitet, während doch sonst die Ausbreitung der negativen Polarität über die Rhombendodekaederflächen nur von den matten Tetraederflächen ausgeht. Auch auf der glatten Tetraederfläche (1 . 2 . 5) ist der in der Nähe der Rhombendodefläche (2 . 5) gelegene Theil negativ, und auch von hier aus verbreitet sich die negative Spannung über die Fläche (2 . 5). Die noch vorhandene dritte glatte Tetraederfläche (2 . 3 . 6) ist durchweg positiv. Auf den beiden vorhandenen kleinen matten Tetraederflächen (1 . 2 . 3) und (1 . 4 . 5) zeigt sich in dem einen Winkel eine kleine positive Stelle.

Die Bruchfläche 6 ist fast in ihrer ganzen Ausdehnung negativ;

1) In die kleinen Flächen des Würfels und Rhombendodekaeders konnten wegen Mangel an Raum die zahlreichen Messungen nicht speciell eingetragen werden; die auf ihnen beobachteten elektrischen Polaritäten sind daher nur durch die Farben angegeben.

nur am Rande, nach der Fläche 5 hin, findet sich ein positiver Streifen. Die auf dieser Fläche erscheinende negative Polarität ist jedenfalls nur eine Folge der Verletzung.

B. *Verwachsung zweier positiver Tetraeder.*

Krystall No. XIX (Taf. III, No. XIX). Die Masse dieses Krystalles, den ich der Güte des Herrn Geh. Hofrath Knop in Karlsruhe verdanke, ist farblos und an sich durchsichtig, aber durch Einschlüsse getrübt. Nächst den Würfelflächen sind am grössten die glatten Tetraederflächen; schmäler sind die Rhombendodekaederflächen; sehr klein, (einige kaum wahrnehmbar), die matten Tetraederflächen und die an denselben Ecken befindlichen Pyramidentetraederflächen. Der Abstand zweier paralleler Würfelflächen misst 8 mm.

Die elektrische Vertheilung auf diesem Krystalle ist eine sehr eigenthümliche und weist, wie ich zeigen werde, auf eine fast vollständige Durchdringung zweier positiver um 90° gegeneinander gedrehter Tetraeder hin.

Auf den vier grossen glänzenden Tetraederflächen erscheint positive Elektricität in mässiger Stärke; eben dieselbe findet sich auch, aber in geringerer Intensität, auf den übrigen vier Ecken, wo sonst die negative auftritt. Die Würfelflächen sind in der Mitte negativ, und diese negative Polarität verbreitet sich meistens nach der Mitte der Ränder, während die Ecken und auch wohl noch ein Theil des Randes positive Spannung darbieten. Auf den meisten der Rhombendodekaederflächen sind die an den beiden Ecken gelegenen Theile ebenfalls positiv, während sich über das mittlere Stück die negative Zone von einer Würfelfläche zur andern verbreitet.

Die im Vorstehenden beschriebene elektrische Vertheilung auf dem Boracite No. XIX gleicht der von mir auf den symmetrisch gestalteten Würfeln des Flussspathes beobachteten. In meiner Abhandlung über die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes[1]) habe ich gezeigt, dass selbst die Unterschiede zwischen den Hauptachsen und den trigonalen Zwischenachsen (Eckenachsen) des Würfels hinreichend sind, um bei Temperaturänderungen thermo-

1) Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XX. S. 203.

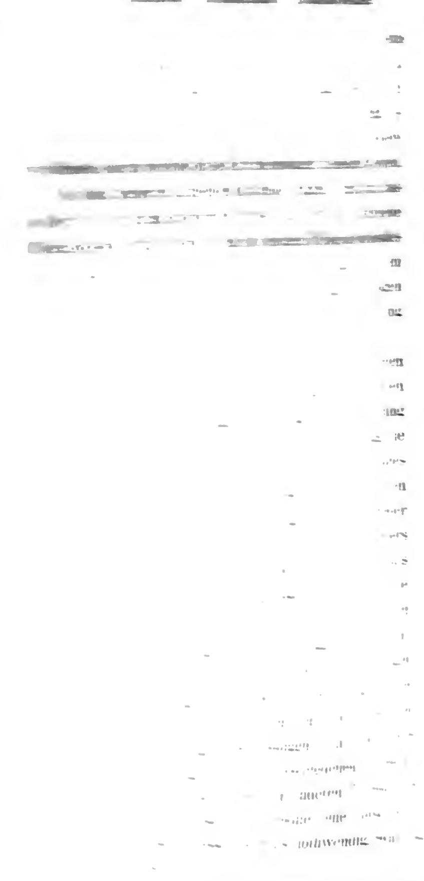
elektrische Spannungen auftreten zu lassen; die Mitten der Würfelflächen und ihrer Ränder sind beim Flussspath negativ, die Ecken positiv, verhalten sich also genau so wie beim vorliegenden Boracitkrystall.

Wenn sich zwei hemimorphe Krystalle zu einem Zwillinge zusammensetzen, so äussert sich darin das Bestreben, die Symmetrie möglichst wieder herzustellen. Dies geschieht beim Boracit bei der Durchwachsung zweier gleicher, um 90° in ihrer Stellung verschiedener Tetraeder, und es liegt im Krystall No. XIX eine solche Zwillingsverwachsung zweier positiver Tetraeder vor. Hierdurch wird auf ihm die polarelektrische Vertheilung nach den trigonalen Achsen aufgehoben, und es kann bei vollständig gleich starker Entwickelung der beiden Bildungen dann nur die der symmetrischen Form entsprechende Polarität auftreten.

Wenn die beiden Tetraeder gleich stark entwickelt sind, so heben sich, wie gesagt, die polarelektrischen Vertheilungen nach den trigonalen Zwischenachsen auf; dagegen bleibt die negative Polarität auf den Würfelflächen, da sie für beide Tetraeder dieselbe ist, erhalten. Es müssen also die Würfelflächen negative Spannungen zeigen und die als nothwendige Ergänzung geforderten positiven nehmen infolge der Achsenverhältnisse die Ecken ein. Dies ist nun in der That bei dem Boracit No. XIX der Fall.

Dass jedoch in diesem Krystalle die Bildungen nach den beiden Tetraedern nicht in völlig gleich starkem Grade entwickelt sind, sondern dass dasjenige Tetraeder, dessen Flächen den grossen Tetraederflächen entsprechen, etwas vorwaltet, ergibt sich schon äusserlich aus dem Auftreten äusserst kleiner Pyramidentetraederflächen an den vier anderen Ecken und wird auch durch die thermoelektrische Untersuchung bestätigt. Bei vollkommen gleich starker Entwickelung der beiden Bildungen müssten alle Würfelecken gleich stark elektrisch sein. Wir finden aber an den vier Ecken mit grossen Tetraederflächen stärkere positive Spannungen, als an den vier anderen. Das vorwaltende Tetraeder entspricht mit seinen positiven Flächen den ersten vier Ecken, dagegen mit seinen negativen Ecken den letzten vier. Die auf den acht Ecken des symmetrischen Krystalles auftretende positive Polarität wird also auf den ersten vier Ecken durch die stärkere Entwickelung des einen Tetraeders vergrössert, und auf den anderen vier Ecken verringert.

nur am Rand[illegible]
fen. Die au[illegible]
falls nur ein[illegible]



Krysta[illegible]
den ich de[illegible]
ist farblos [illegible]
Nächst den [illegible]
flächen; s[illegible]
(einige k[illegible]
denselbe[illegible]
zweier [illegible]
Di[illegible]
eigentl[illegible]
ständ[illegible]
dreh[illegible]

hemidodekaedrischen und würfelförmigen Boraciten im Allgemeinen eine andere ist, als bei den tetraedrischen, so werden auch die beobachteten Erscheinungen der Doppelbrechungen in diesen beiden Gruppen von einander abweichen.

Ich habe im Eingange dieser Untersuchung den zweifachen Wechsel, welcher sowohl bei dem Steigen als auch bei dem Sinken der Temperatur in den elektrischen Polen der trigonalen Achsen eintritt, erwähnt; ebensolche Wechsel zeigen nun im Allgemeinen auch die Würfelflächen, woraus sich ergibt, dass bei einem solchen Wechsel der Polarität ein negatives Tetraeder in ein positives übergeht und umgekehrt. Es muss also bei einer Steigerung der Temperatur eine solche Modification stattfinden, dass sich das eine Tetraeder in das andere verwandelt und dass bei noch weiter steigender Erhitzung die eingetretene Veränderung derartig weiter vorschreitet oder zurückgeht, dass bei 150° die ursprüngliche Beschaffenheit des Tetraeders wieder erscheint. Es ist also leicht zu verstehen, wie durch die beim Erhitzen eintretenden Vorgänge die Spannungsverhältnisse und die hierdurch erzeugten Doppelbrechungen sich ändern.

Nach Mallard ist bei Temperaturen über 250° jede Doppelbrechung verschwunden; bei dieser Temperatur existirt aber auch, wie aus meiner Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites hervorgeht, keine Thermoelektricität mehr. Es ist nicht unmöglich, dass zwischen diesem Verschwinden der Doppelbrechung und dem Verschwinden der Thermoelektricität ein Zusammenhang stattfindet.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

[illegible] Quarzkrystalle von Striegau [illegible] . . . 271

1. Fundort und Beschaffenheit der Quarzkrystalle von Striegau . . 273

3. Methoden bei der Untersuchung des elektrischen Verhaltens der Quarze von Striegau 276

a. Thermoelektricität 276

b. Piëzoelektricität 277

4. Thermo- und piëzoelektrisches Verhalten der Quarzkrystalle von Striegau 283

5. Ueber den Grund, weshalb an den Striegauer Zwillingen die Prismenkanten gleiche Polarität zeigen . . . 288

II. Fortsetzung der Untersuchung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites 299

Krystallisationsverhältnisse des Boracites 301

1. Einfache Krystalle 304

A. Tetraedrische Krystalle 304

B. Rhombendodekaedrische Krystalle 311

C. Würfelförmige Krystalle 316

2. Krystalle mit Zwillingsbildungen 320

A. Verwachsung zweier negativer Tetraeder 321

B. Verwachsung zweier positiver Tetraeder 334

3. Ueber Ursachen der Doppelbrechung in Boracitkrystallen . . 336

ZUR

GESCHICHTE DES GEHIRNS

SOWIE DER

CENTRALEN UND PERIPHERISCHEN NERVENBAHNEN BEIM MENSCHLICHEN EMBRYO.

VON

WILHELM HIS,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

MIT ZWEI TAFELN UND SIEBENUNDZWANZIG HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.

Vorgetragen in der Sitzung vom 1. August 1887.
Das Manuscript übergeben am 19. Januar 1888.
Der Abdruck vollendet den 29. März 1888.

ZUR

GESCHICHTE DES GEHIRNS

SOWIE DER

CENTRALEN UND PERIPHERISCHEN NERVENBAHNEN

VON

WILHELM HIS.

HIERZU ZWEI TAFELN.

Im Jahre 1886 habe ich in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch.[1]) über die Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln berichtet. Der nachfolgende Aufsatz soll einen Beitrag zur Geschichte des Gehirns und seiner Nerven, sowie zu derjenigen des peripherischen Nervensystems liefern. Die Formentwickelung des Gehirns wird diesmal nur insoweit behandelt werden, als zum Verständniss des Uebrigen nöthig ist. Den Schwerpunkt dieser Mittheilung verlege ich in die Verfolgung der centralen und peripherischen Nervenbahnen während der Uebergangszeit vom ersten zum zweiten Monat. Zu dieser Zeit sind die sämmtlichen Kopfnerven angelegt, der Aufbau des Gehirns ist dabei noch von typischer Einfachheit und die Parallele seiner Wandbezirke mit denen des Gehirns lässt sich ohne Schwierigkeit verfolgen. Die Durchführung dieser Parallele ist aber eine Aufgabe, welche der Hirnforschung schon seit manchem Jahrzehnt vorschwebt und deren Lösung in ihren Hauptzügen gegeben sein muss, bevor man hoffen darf, die secundären Complicationen des Hirnbaues erfolgreich zu bewältigen[2]).

---

1) Bd. XIII. Nr. VI der mathemat.-physischen Klasse.

2) Ich darf hier an die einleitenden Worte anknüpfen, die ich vor 19 Jahren einem kleinen Aufsatz »über die Gliederung des Gehirns« (Verhandl. der naturf. Gesellschaft in Basel, Februar 1869. Bd. IV. S. 328) vorangestellt hatte: »Es ist eine der ersten Aufgaben der Entwickelungsgeschichte des Gehirns, zu verfolgen, wie sich die verwickelte Endgestalt des Organs aus der einfachen Urgestalt hervorbildet, und welches die wesentlichsten Bedingungen dieser Umbildung sind. Etwas einseitig ausgedrückt, handelt es sich darum, den gesammten Hirnbau auf den Typus des Rückenmarksbaues zurückzuführen, eine Aufgabe parallel derjenigen, welche die Wirbeltheorie des Schädels für das Gehäuse der nervösen Centraltheile seit Langem zu lösen gesucht hat. In mehr oder weniger präciser Weise ist diese Aufgabe bereits wiederholt in Angriff genommen worden. Von embryologischer Seite hat unstreitig C. E. v. Baer im 2. Theile seiner Entwickelungsgeschichte am

Die allgemeine Formentwickelung des Gehirns bis zum Ende des zweiten Monats.

Ende der zweiten Woche. In diese frühe Zeit fallen ALLEN THOMSON's Nr. 2 und mein Embryo *SR*, beide in Betreff von Grösse und Ausbildung in sehr erfreulicher Uebereinstimmung unter einander. Die Medullaranlage ist noch nicht zum Rohr geschlossen, ihre Axe wellenförmig gebogen, mit zwei dorsalen Erhebungen und einer dazwischen liegenden Einsenkung. Letztere befindet sich auf der Grenze zwischen Rumpf und Kopf. Der höchste Punkt der vorderen Erhebung bezeichnet den Ort des Mittelhirns, und das Vorderhirngebiet ist stark



Fig. 1.
Embryo von ALLEN THOMSON im Profil gesehen. Vergr. 10. Nach einer unpublicirten Originalzeichnung. *a* Amnionfetzen.

meisten Material zu deren Lösung geliefert. Seine Darstellung von der Umbildung des vorderen Hirnendes ist noch jetzt durchaus mustergültig. Von rein anatomischer Seite aus haben STILLING, SCHROEDER v. D. KOLK, DEITERS u. A. zunächst für die Medulla oblongata den Nachweis geführt, dass sie sich auf den Typus des Rückenmarkes zurückführen lässt.« In der eben citirten Arbeit hatte ich versucht, einige von den Bedingungen festzustellen, welche bei der Umgestaltung des ursprünglich so einfach angelegten Medullarrohres in Betracht kommen. Mein damaliges Material war den Entwickelungsreihen vom Hühnchen, vom Frosch und von Knochenfischen entnommen und ich hatte in jener Zeit den Plan einer grösseren vergleichend embryologischen Arbeit über das Gehirn. Aeussere und innere Hindernisse haben diesen Plan damals nicht zur Realisirung kommen lassen, und das Ziel, das ich mir jetzt stecke, ist ein bescheideneres, als das meiner jüngeren Jahre. — In dem verflossenen Jahrzehnt sind, abgesehen von den entwickelungsgeschichtlichen Lehrbüchern, zwei grössere Monographien über Gehirnentwickelung erschienen: die bekannte »Entwickelungsgeschichte des Gehirns« v. MIHALKOVICS und die »Beiträge zur Anatomie und Entwickelungsgeschichte des Nervensystems« von L. LOEWE. Letzterer Autor hat sich zum Theil von ähnlichen Gesichtspunkten leiten lassen, wie ich selber, und so begegnen wir uns auch in einzelnen unserer Ergebnisse. LOEWE ist insbesondere, gleich mir, bemüht, das Princip durchgehender Längszonen im Gehirn zu consequenter Geltung zu bringen. Ich muss dies ausdrücklich anerkennen, weil ich in zahlreichen einzelnen Punkten LOEWE's Auffassungen nicht theile. Ueber die im vorliegenden, sowie im vorjährigen Aufsatze im Vordergrund stehende Frage der Nervenbildung findet man bei LOEWE keine brauchbaren Beobachtungen, es reichte seine Methodik zur Bearbeitung dieser Frage nicht aus.

vornüber gebogen. In der diesem Aufsatze beigegebenen Profilfigur ALLEN THOMSON's sind die drei Hauptabtheilungen des Gehirns bereits unzweifelhaft erkennbar[1]).

Dritte Woche. Die der dritten Woche entstammenden Embryonen (*L*, *Lg*, *Rf*, *BB*, *Lr*) zeigen das Gehirn in die fünf Hauptabtheilungen gegliedert und längs seiner ganzen Ausdehnung geschlossen[2]). Als Ganzes betrachtet, stellt es nunmehr ein in nahezu rechtem Winkel gebogenes zweiarmiges Rohr dar. Der hintere Arm,

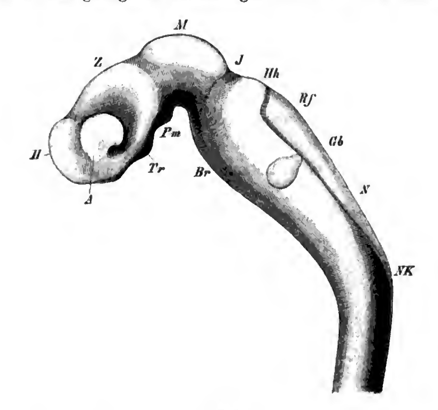


Fig. 2.
Gehirn vom Embryo *Lg*. Profil-Construction. Vergr. 35. *A* Augenblase, *H* Hemisphärenhirn, *Z* Zwischenhirn, *M* Mittelhirn, *I* Isthmus, *Hh* Hinterhirn, *N* Nachhirn, *Gb* Gehörblase, *Rf* Rautenfeld, *Nk* Nackenkrümmung, *Br* Brückenkrümmung, *Pm* Processus mammillaris, *Tr* Trichterfortsatz.

beinahe doppelt so lang als der vordere, umfasst das Nachhirn und das Hinterhirn, d. h. die Theile, welche die Rautengrube umschliessen. Der vordere Arm besteht aus dem Hemisphären- und dem Zwischenhirn. Beide Arme begegnen sich in dem die Ecke bildenden Mittelhirn. Ich bezeichne dieselben als Rautengruben-,

1) Herr ALLEN THOMSON war s. Z. so gut, mir seine alten Originalzeichnungen zur Benützung überlassen (Anat. menschl. Embr. II, S. 35) und ich entnehme denselben die von ihm selber unpublicirte, für unsere Frage besonders interessante Figur 1.

2) Anat. menschl. Embr. Taf. IX, Fig. 6—15.



und als Grosshirnarm oder abgekürzt als Rautenhirn und als Grosshirn. Die auf deren Grenze befindliche Krümmung (die Scheitelkrümmung der Autoren) ist den übrigen Axenkrümmungen des Gehirns in ihrer Ausbildung weit voraus. Die Brücken- und die Nackenkrümmung sind noch am Schlusse der dritten Woche (Embryo *Lr*) nur mässig entwickelt. Dagegen charakterisirt sich das Gebiet der Rautengrube von früh ab durch die Verbreiterung des Hirnrohres und durch die Verdünnung seiner Decke. Die verdünnte Decke ist es ja auch, die vermöge ihrer Durchsichtigkeit von der Umgebung bald in bekannter Weise sich abhebt und ein äusserlich erkennbares Feld bildet, das sich als Rautenfeld bezeichnen lässt. Die grösste Breite des Feldes fällt in dessen oberen Abschnitt, seine oberen Ränder bilden miteinander einen stumpfen, die unteren einen spitzen Winkel. Die Divergenz der unteren Ränder ist in der dem Rückenmarke zugewendeten Hälfte (dem Gebiete des Calamus scriptorius) grösser, als in der entgegengesetzten. Demnach zeigen die Ränder eine gebrochene Ecke, welche noch in späteren Stadien wahrnehmbar ist. Im Ganzen hat das Rautenhirn dieser Periode eine sehr auffallende Aehnlichkeit mit demjenigen vom Frosch oder von Petromyzon. Die Gehörblasen befinden sich unterhalb der Stelle grösster Rautengrubenbreite. Der obere Theil des Rautenhirns setzt sich durch die verjüngte Strecke des Isthmus vom Mittelhirn ab.

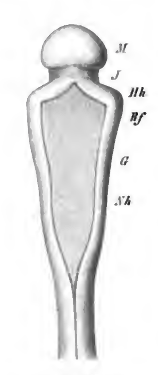


Fig. 3.
Rautenhirn desselben Embryo von der Rückseite.

Der vordere Arm des Gehirnrohres zeigt schon bei den jüngsten hierher gehörigen Embryonen (*Lg* bis L_1) ein selbständig abgegliedertes Zwischenhirn. Es ist vom Mittelhirn durch eine auch am oberen Rande einschneidende Furche, die Scheitelfurche, abgesetzt, sein vorderes Ende ist durch das Abgehen der beiden Augenblasen bezeichnet. Die Basis des Zwischenhirns schärft sich nach rückwärts etwas zu und läuft in eine winklig vortretende Spitze aus, die ich als Processus mammillaris bezeichnen will[1]). Es ist dieses Ge-

1) In der Anat. menschl. Embr. Heft I, p. 25 habe ich diese Bildung Hypo-

bilde nicht mit dem Trichterfortsatz zu verwechseln. Letzterer liegt zwar auch an der Basis des Zwischenhirns, aber weiter nach vorn, als der Proc. mammillaris, nahe hinter der Abgangsstelle der Augenblasen und er zeigt sich bei den Gehirnen dieser Zeit (*Lg* bis *Lr*) nur als ein stumpfer Vorsprung.

Die beiden Augenblasen treten als breite Ausladungen aus der Seite des Grosshirns hervor und zwar greift ihr Wurzelgebiet in das Zwischenhirn über. Sie sind etwas nach rückwärts gebogen und demgemäss hinten durch eine tiefe, vorn durch eine seichte Furche abgesetzt. Noch stehen sie Anfangs (*Lg*) mit der Hirnhöhle in weiter Verbindung und ihr Stiel ist fast eben so hoch als die Augenblasen selbst. Der Abschnitt des Hemisphärenhirns ist noch sehr unbedeutend. Im Profil gesehen erscheint er als halbmond- bez. als keulenförmiger Streifen vor und zum Theil über der Augenblase und er schliesst sich an deren Wand mittelst der oben erwähnten seichten Furche an. Nach vorn wölbt sich das Hemisphärenhirn kuglig vor und es ist noch nicht in seine beiden Seitenhälften getheilt.

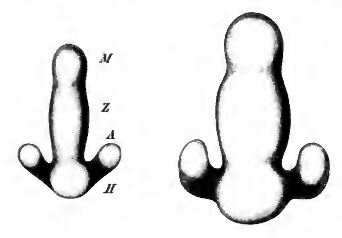


Fig. 4 und 5.
4. Frontalansicht des Grosshirns vom Embryo *Lg* Constr. Vergr. 60.
5. Dieselbe Ansicht vom Embryo *Lo*. Vergr. 40.

Vierte Woche (*α*, *Bl*, *R*, *B*, *A*, *Pr* u. a.). In den Beginn der vierten Woche fällt beim menschlichen Embryo die starke Vornüberneigung des Kopfes und im Zusammenhang damit auch eine Zunahme der verschiedenen Gehirnkrümmungen. Am stärksten nimmt wiederum die Scheitelkrümmung zu und nächst ihr die Nackenkrümmung, während die Brückenkrümmung am Ende der vierten Woche hinter den übrigen noch zurückgeblieben ist. Die Zunahme der Scheitel- und der Brückenkrümmung führt zu einer starken Annäherung der basilaren Abschnitte beider Gehirnarme an einander, derart, dass sie

physensäckchen genannt, eine Bezeichnung, die ich fallen lassen muss, da sie auf einer irrthümlichen Voraussetzung beruht.

sich schliesslich beinahe berühren und der Trichterfortsatz nahe vor den Brückenwulst zu liegen kommt. Eine tiefe Spalte, die **Sattelspalte**, reicht von hier aus bis zur Basis des Mittelhirns. Letzteres hat, im Profil gesehen, nunmehr die Gestalt eines zwischen die beiden

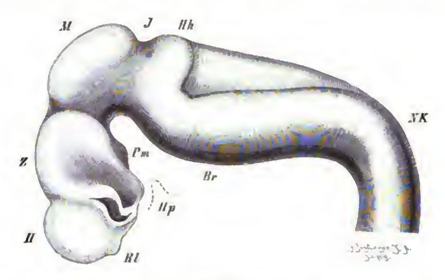


Fig. 6.
Gehirn eines Embryo (ca. 3½ Wochen alt). Profilconstr. Vergr. 30. Die Augenblase ist abgeschnitten gedacht. Die Hypophysentasche *Hp* ist punktirt angegeben. Bezeichnungen wie oben. *Rl* Riechlappen.

Gehirnarme eingeschobenen Keiles. Zwei breite, im Grunde der Sattelspalte zusammentreffende Furchen scheiden dasselbe einerseits



Fig. 7.
Gehirn eines vierwöchentlichen Embryo. Profilconstr. Vergr. ca. 14.

vom Hinterhirn, andererseits vom Zwischenhirn, und seine Decke bildet einen ziemlich langgestreckten schrägen Wulst.

Im hinteren Gehirnarme rücken mit zunehmender Entwickelung der Brückenkrümmung die vordere und die hintere Umgrenzung des

Rautenfeldes näher aneinander und der an der Grenze beider Abschnitte liegende Winkel wird immer spitzer. Die an das Feld anstossenden Ränder des Medullarrohres treiben sich lateralwärts hervor und beginnen zu selbständigen Wülsten zu werden.

Am Vorderhirn kommt es zu einer zunehmenden Abschnürung der Augenblasen und zu einer Abgliederung der beiden Hemisphären von einander und vom Zwischenhirn. Noch ist das Zwischenhirn erheblich länger als die Hemisphären und es liegt in seiner gesammten Ausdehnung frei zu Tage. Eine mediane Längsleiste läuft seiner Decke entlang nach rückwärts und ist bis gegen das Mittelhirn verfolgbar.

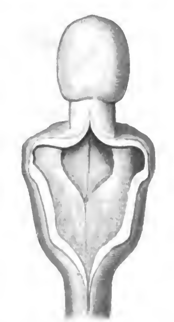


Fig. 8.
Dorsalansicht des Rautenhirns vom Embryo *Ru* (ca. 1 Monat alt). Direct nach der Natur.

F ü n f t e W o c h e (*Br*$_3$, *S*$_1$, *Br*$_1$, *Br*$_2$, *Sch*$_1$, *α* u. a. m.). Die Augenblasen emancipiren sich vollständig und bleiben mit dem Zwischenhirn nur noch durch einen langen und stellenweise dünnen Stiel in Verbindung, die Hemisphären wölben sich als birnförmig gestaltete Körper über die Oberfläche empor und beginnen das Zwischenhirn zu überlagern. An ihrer Basis kommen die Andeutungen eines selbständigen Riechlappens zum Vorschein, an ihrer Aussenfläche der Anfang der Fossa Sylvii, an der medialen Oberfläche die ersten Furchen.

Die Nackenkrümmung des Gehirns erreicht in dieser Periode einen besonders hohen Grad der Ausbildung. Sie gleicht sich späterhin, wenigstens theilweise, wieder aus, wenn einmal die Wiederaufrichtung des Kopfes ausgiebiger stattfindet.

S e c h s t e b i s a c h t e W o c h e. Der bedeutsamste Vorgang dieser Periode ist die starke Ausbildung der Brückenkrümmung. Das Nachhirn schiebt sich unter das Hinterhirn, die dorsalen Flächen dieser beiden Abtheilungen rücken bis beinahe zur Berührung an einander, ein dazwischen offen bleibender Schlitz entspricht der späteren F i s s u r a t r a n s v e r s a p o s t e r i o r c e r e b r i. Die in scharfem Zickzack gebogene Gehirnaxe bildet nunmehr ein Doppelgewölbe mit drei Fuss- und zwei Scheitelpunkten, erstere liegen

im Halsrückenmark, im Brückenwulst und im Trichter, die letzteren haben ihren Ort im Nackenhöcker und im Mittelhirn. Der Eingang zur Sattelspalte hat sich sehr verengt, wogegen der Grund derselben

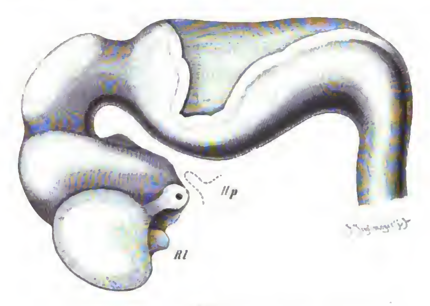


Fig. 9.
Gehirn vom Embryo S_1. Vergr. 10. Alter ca. 33 Tage. Profilconstr.

etwas ausgeweitet bleibt. Die Rathke'sche Tasche erreicht auch zur Zeit ihrer grössten Ausbildung nur den Eingang der Sattelspalte.

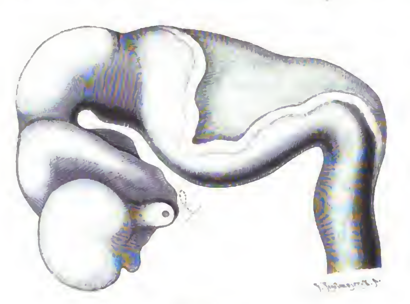


Fig. 10.
Gehirn vom Embryo Sch_2 (5 Wochen alt). Profilconstr.

Ueber und vor ihr liegt der tief herabreichende Trichterfortsatz, dessen eine Ecke den Brückenwulst fast unmittelbar berührt.

Der lange Bogen, den die Hirnbasis im Bereich der eng ge-

schlossenen Sattelspalte beschreibt, erstreckt sich vom vorspringenden Theil der Brückenkrümmung bis zum Trichterfortsatz und sein Scheitelpunkt berührt den Boden des Mittelhirns. Die unpaare Arteria basilaris steigt weit herauf in die Spalte und bezeichnet die Längenausdehnung des Brückengebietes. Dieses ist im grössten Theil seiner Länge dem Zwischenhirn zugekehrt, nur durch eine schmale Bindesubstanzplatte, den mittleren Schädelbalken Rathke's, davon getrennt. Im Verlauf der späteren Entwickelung muss sich die beinahe geschlossene Sattelspalte wieder öffnen, und alle die Theile,

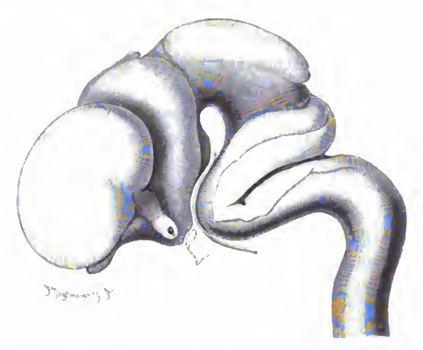


Fig. 11.
Gehirn vom Embryo *Zw* (ca. $7\frac{1}{2}$ Wochen alt). Profilconstr. Die Arteria basilaris ist vom Ort ihrer Bildung aus den Aa. vertebrales bis zu ihrer Theilung in die Aa. profundae gezeichnet.

welche eine Zeit lang an deren Begrenzung Theil nahmen, der hintere Theil des Tuber cinereum, die Gegend der Corpora mammillaria, die Hirnschenkel nebst der Fossa Tarini und der betheiligte Abschnitt der Brückenoberfläche, bekommen hiernach eine freiere Lage. Das unter dem Mittelhirn liegende obere Ende der Spalte ist von früh ab erheblich weiter, als der übrige Theil der Spalte. Hier entwickeln sich in der Folge die Hirnschenkel und der Raum wird dadurch etwas ausgefüllt. Die Fossa Tarini bezeichnet den Ort des früheren Spaltengewölbes.

Die Hemisphären sind am Ende des zweiten Monats erheblich gewachsen und sie überdecken das Zwischenhirn zum grossen Theil.

Ihre Form ist eine gleichmässig gewölbte, die laterale Fläche noch glatt. In dieser Zeit beginnt auch das Cerebellum als selbständige Bildung hervorzutreten.

Die Längszonen des Hirnrohres.

Unmittelbar nach erfolgtem Schluss besitzt das Gehirn gleich dem Rückenmark den Charakter eines dickwandig abgeplatteten Rohres mit schmaler Lichtung. Zu der Zeit sind die Breiten- und die Tiefenunterschiede seiner einzelnen Abtheilungen viel weniger ausgesprochen, als dies später der Fall ist. Während z. B. am Ende des zweiten Monats die grösste Breite des Rautenhirns etwa das Vierfache von derjenigen des Halsrückenmarkes beträgt, ist das Verhältniss bei Embryo *Lg* nur das von 3 : 2 [1]).

Die beiden dicken Seitenwandungen des Gehirnrohres sind an der Basis und an der Decke je durch eine dünnere Zellenplatte verbunden, die Boden- und die Deckplatte. Im Uebrigen scheidet sich der ventrale Abschnitt der Seitenwand vom dorsalen durch eine mehr oder minder ausgesprochene Knickung, und ich werde die beiden Abtheilungen als Grundplatte und als Flügelplatte von einander unterscheiden [2]). Demnach zerfällt das Rohr in folgende vier Längszonen:

---

1) Man vergl. die Durchschnittsbilder vom Embryo *Lg* in der Anat. menschl. Embr. Taf. XII, Fig. 24—80. Zur weiteren Beurtheilung mögen beifolgende Messungen dienen, deren Ergebnisse, da sie an eingeschmolzenen Präparaten gewonnen sind, allerdings nur approximativen Werth beanspruchen. Bei den Schnitten von Embryo *Lg* beträgt:

	Die grösste Breite	Verhältniss in % der Rückenmarksbreite	Die grösste Tiefe	Verh. d. Tiefe zur Breite
am Halsrückenmark	0,13 mm	100	0,215 mm	1,65
» Rautenhirn	0,195 »	150	0,23 »	1,18
» Isthmus	0,13 »	100	0,22 »	1,70
» Mittelhirn	0,145 »	112	0,26 »	1,80
» Zwischenhirn	0,16 »	123	0,21 »	1,30
» Hemisphärenhirn	0,16 »	123	0,21 »	1,30

2) Das Bedürfniss durchgehender Bezeichnungen für die Längszonen der Seitenwand des Medullarrohres ist schon wiederholt empfunden worden, das Auffinden geeigneter Bezeichnungen ist aber nicht leicht. Die Adjectiva dorsal und ventral oder medial und lateral lassen uns bei den stattfindenden Verschiebungen der einzelnen Zonenabschnitte im Stich. Wollte man aber von einer motorischen

die Bodenplatte,
die Grundplatte,
die Flügelplatte und
die Deckplatte.

Diese vier Längszonen entsprechen den vier Längszonen des Rückenmarksrohres. Die Bodenplatte bildet hier das Epithel von der Vorderwand des Centralkanales und das spongiöse Lager der vorderen Commissur. Die Grundplatte wird zum Bezirke der Vorder- und Seitenhörner und der zugehörigen Längsstränge (zu dem von mir so genannten vorderen Markcylinder). Die Flügelplatte liefert das Gebiet der Hinterhörner und theilweise das Gerüst der Hinterstränge.

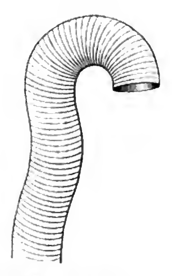


Fig. 12.
Rohr nach Art des embryonalen Gehirns gebogen.

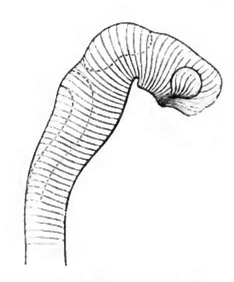


Fig. 13.
Gehirn vom Embryo *Lg* mit eingetragenen Querzonen.

Die Deckplatte des Rückenmarks wird frühzeitig zwischen das dorsale Ende der beiden Seitenwandungen eingeklemmt und wir begegnen ihren Resten im medialen Theil des Hinterstranggerüstes bez. in demjenigen der GOLL'schen Stränge [1]).

und sensibeln Hälfte des Rohres sprechen, so wäre dies, wenigstens in Betreff der letzteren, eine Petitio principii. LEURET hat s. Z. die Worte fulcral (für ventral) und spinal (für dorsal) gebraucht (Anatomie du système nerveux Bd. I, S. 158), ich selber die Worte basilar und marginal, beides Ausdrücke, die nicht ganz befriedigend sind. LOEWE spricht in seinem grossen Werke von einem unteren und oberen Seitentypus.

1) l. c. S. 183 und S. 196 u. ff.

Die im Laufe der Entwickelung zunehmenden Axenkrümmungen des Gehirnrohres haben zur Folge, dass bald die dorsalen, bald die ventralen Strecken der Längszonen zusammengedrängt oder auseinandergezogen werden. So lange die Axenbiegungen nicht sehr weitgehend sind, werden die derselben Querscheibe angehörigen Theile unschwer aufzufinden sein. Wenn dagegen stärkere Axenverbiegungen, sowie zugleich locale Ausweitungen des Rohres eingetreten sind, so finden sich Theile der Röhrenwand aus ihrem primitiven Querschnittsgebiet stellenweise in Nachbargebiete hineingedrängt und es bedarf alsdann einer sorgfältigen Analyse der Entstehungsgeschichte, um zu constatiren, welcher Primärscheibe bestimmte Theile angehört haben.

Das vordere Ende der primitiven Gehirnbasis liegt, wie dies schon v. BAER hervorgehoben hat [1], im Infundibulum. Was darüber hinausreicht, ist nicht mehr Basis im eigentlichen Sinne, sondern es ist die Endstrecke der Seiten- und der Rückwand des Rohres. Dieser prächordale Abschnitt der Gehirnbasis, die Vorbasis, wie man ihn nennen kann, hat, im Gegensatz zur ursprünglichen Basis, eine mediane Schlusslinie und er ist in Folge der Axenkrümmung des Rohres (der Hakenkrümmung) zu seiner Basilarstellung gelangt. Denkt man sich sonach das Gehirnrohr völlig gestreckt, so entspricht der vor dem Trichter befindliche Theil dem Endquerschnitt, dessen Ränder in der Mittelebene zur Vereinigung gebracht sind [2].

---

1) Entwickelungsgesch. Bd. II, S. 108. Man vergl. auch meinen oben citirten Aufsatz über die Gliederung des Gehirns.

2) LOEWE giebt an, das Centralnervensystem sei ursprünglich ein fast gestrecktes Rohr, an dessen oberem Ende die Lamina terminalis und der Ort des Trichters sich befinden. Dies ist eine Uebertreibung des wirklichen Thatbestandes, und LOEWE's Figur, welche dies beweisen soll (Taf. IX, 116 a) halte ich für eine unzutreffende. Die Axenkrümmungen der Kopfanlage sind auch beim Säugethierembryo vorhanden, bevor das Gehirn geschlossen ist, und sie sind schon durch das Auftreten der vorderen Keimfalte bestimmt. Die terminale Schlussstrecke des Gehirnrohres ist daher von früher Zeit an, wenigstens theilweise, der Basis zugekehrt, ihre Basalstellung nimmt in der Folge allerdings noch zu. Das, was LOEWE in seiner Figur mit *gh* als Hemisphärenanlage bezeichnet, kann nur die linksseitige Augenblase sein. Auffallender Weise sind in den drei auf jüngere Stufen bezüglichen Figuren LOEWE's die Augenblasen ignorirt.

Die Gestaltung des Querschnittes in den verschiedenen Abtheilungen des Gehirnrohres.

Um die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Abschnitte des Gehirnrohres zu verstehen, bedarf es vor Allem eines klaren Einblickes in die Gliederung ihres Querschnittes. Wegen der Axenkrümmung des Rohres ist es nicht möglich, an einem und demselben Präparate für die verschiedenen Abtheilungen Schnitte zu bekommen, die senkrecht zur Axe stehen. Neben einzelnen annähernd quer treffenden Schnitten wird man es mit solchen zu thun haben, die mehr oder minder schräg zur Axe oder selbst parallel dazu ver-

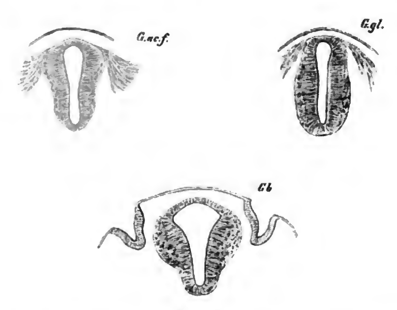


Fig. 14.
Durchschnitte durch die Bezirke II und III vom Embryo *Lg*. Vergr. 70. *G.ac.f.* acustico-faciale. *G.g.* Ganglion glossopharyngeum.

laufen. Das Material für die Querschnittbetrachtung ist demnach aus den verschiedenen Schnittreihen zusammenzutragen, wobei Profilconstructionen erforderlich sind, um die Richtung zu erkennen, in welcher die einzelnen Schnitte die Gehirnaxe treffen. Eventuell kann man übrigens auch auf dem Wege der Construction aus den Schräg- oder Längsschnitten einer Gegend die zugehörigen Querschnitte herstellen.

Rautenhirn. Im Rautenhirn ist die dorsale Hälfte des Rohres von früh ab ausgeweitet. Der Querdurchmesser der erweiterten Strecke nimmt von unten nach oben hin zu und erreicht sein Maxi-

mum etwas oberhalb der Gehörblase. Von da ab nimmt derselbe ziemlich rasch ab und sinkt beim Uebergang in den Isthmus auf ein Minimum. Der Ort der maximalen Weite des Rautenhirns fällt in die Höhe der Brückenkrümmung. Indem letztere im Laufe der Entwickelung sich steigert, wächst auch die Breite des Rohres, ein Verhalten, dessen mechanische Bedeutung ich bei früheren Anlässen discutirt habe [1]). Die Breite der Deckplatte wächst mit derjenigen der Höhlung, die Gesammtform beider bleibt somit eine ähnliche. Vermöge ihrer Durchsichtigkeit zeichnet sich die Deckplatte bei der Aussenbetrachtung deutlich als Rautenfeld ab.

Für die nachfolgende Betrachtung denken wir uns zweckmässiger Weise das Rautenhirn in fünf sich folgende Abschnitte zerlegt:

I. Die unterste Strecke von der Nackenbeuge ab bis zum Beginn der Rautengrube.

II. Die Strecke vom unteren Ende der Rautengrube bis zum Niveau der Gehörblase, sie entspricht dem Calamus scriptorius des ausgebildeten Gehirns und mit I. zusammen umfasst sie das Austrittsgebiet der vier unteren Kopfnerven.

III. Die Strecke, innerhalb deren die Gehörblase dem Gehirnrohr anliegt, mit Einschluss des Acustico-facialis-Gebietes.

IV. Das Gebiet der grössten Breite oder das Gebiet des Trigeminusaustritts.

V. Das Gebiet jenseits der maximalen Ausweitung der Rautengrube oder das Gebiet des Cerebellum.

Schon bei Embryonen der dritten Woche (*Lg*—*BB* Fig. 14 u. 15) ist die dorsale Erweitung der Rautenhirnlichtung vorhanden, während der ventrale Theil der Lichtung den Charakter einer schmalen Spalte trägt. Die Form des Querschnittes ist somit die eines langgezogenen Dreiecks mit zwei einspringenden Seiten. Im Beginn der vierten Woche ist die Breitenzunahme des Rohres erheblich fortgeschritten. Während in den Bezirken II. und III. die Form des Querschnitts noch eine dreieckige bez. eine herzförmige ist, ist sie in den Bezirken I. und IV. eine fünfseitige geworden, indem die Flügelplatte

1) l. c. S. 331 und Briefe über die Körperform S. 96 u. ff.

mit der Grundplatte einen ausgesprochenen Winkel bildet [1]). Der Boden des Rohres läuft nunmehr in eine schmale Spalte aus, welche von der ventralen Hälfte der beiden Grundplatten eingefasst ist. Diese springen mit convexer Biegung gegen die Lichtung vor und sie sind jederseits durch eine Furche von der anstossenden Flügel-



Fig. 15.
Durchschnitte durch die Bezirke III und IV vom Embryo *BB*. Vergr. 70. *G.Tr.* Ganglion Trigemini.

platte abgesetzt. Die Flügelplatten sind steil aufgerichtet und gehen an ihrem dorsalen Rande in die Deckplatte über. Auch sie wölben sich etwas nach der Lichtung vor, so dass nunmehr jede Seitenwand

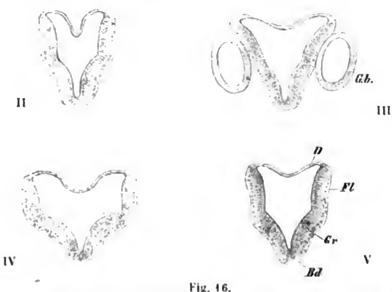


Fig. 16.
Querschnitt durch die Bezirke II, III, IV und V des Rautenhirns bei Embryo *a*. Vergr. 30. *Bd* Bodenplatte, *Gr* Grundplatte, *Fl* Flügelplatte, *D* Deckplatte, *Gb* Gehörblase.

des Rohres von zwei Längsleisten, der Grundleiste und der Flügelleiste, gebildet erscheint.

Weiterhin macht sich die fünfeckige Form des Querschnittes auch bei den Abschnitten II. und III. geltend, so dass sich dieselbe

1) Diese Formbestimmung gilt unter der etwas willkürlichen Voraussetzung, dass die Deckplatte eben ausgebreitet sei. Letztere zeigt sich an den Präparaten bald eingesunken, bald bauchig vorgetrieben.

nunmehr für die sämmtlichen Abschnitte des eigentlichen Rautenhirns als typisch erweist. Dann aber tritt gegen den Beginn der fünften Woche im Bereich des Rautenfeldes eine wichtige Umge-

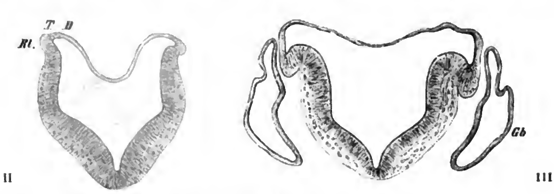


Fig. 17.
Querschnitt durch die Bezirke II und III des Rautenhirns von Embryo *A* mit beginnender Bildung der Rautenlippe (*Rl.*), *T* Taenia.

staltung der Flügelplatte ein. Ihr dorsaler Rand biegt sich lateralwärts um und bildet eine krempenartige Ausladung, welche das

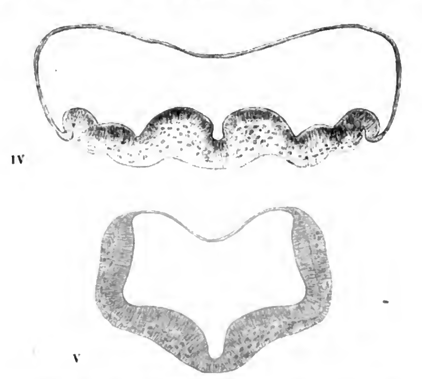


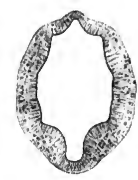
Fig. 18.
Bezirke IV und V des Rautenhirns eines ca. fünfwöcheutlichen Embryo (*Ho*).

Rautenfeld in seiner gesammten Ausdehnung einfasst und die sich schon äusserlich als ein heller Saum zu erkennen giebt[1]). Ich werde den umgekrempten Theil als Rautenlippe bezeichnen. Gemäss

1) l. c. Taf. XIII, Fig. 5 u. 6.

ihrer Entstehungsweise ist die Rautenlippe eine vorgeschobene Falte der Gehirnwand und sie besteht somit aus zwei in einander umbiegenden Plattenhälften, einer medialen und einer lateralen. Von innen her schneidet eine tiefe Furche, die innere Lippenfurche, zwischen denselben ein. Aeusserlich erscheint der freie Lippenrand gleichfalls durch eine Furche, die äussere Lippenfurche, von der übrigen Gehirnwand abgesetzt. Das laterale Blatt der Rautenlippe geht unter rascher Zuschärfung in die Deckplatte über, und ich bezeichne den zugeschärften Saum desselben mit dem bereits in der Anatomie gebräuchlichen Namen einer Taenia[1]. Die besondere Rolle, welche die Rautenlippe bei der Bildung des verlängerten Markes und des Kleinhirns zu spielen hat, werde ich bei einem späteren Anlass entwickeln.

Isthmus und Mittelhirn. Der Isthmus besitzt nicht allein einen absolut viel kleineren Querschnitt als die dahinter und die davor



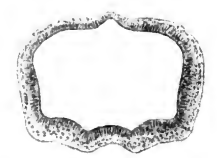


Fig. 19.
Isthmus und Mittelhirn desselben Embryo.

liegenden Strecken, sondern er weicht auch in seiner Form von diesen erheblich ab. Im Allgemeinen ist das Rohr in dessen Bereich seitlich comprimirt, die Boden- und die Deckplatte sind als schmale Leisten nach Aussen hervorgedrängt. Im Mittelhirn dagegen überwiegt wiederum der Querdurchmesser über den sagittalen, und vor Allem erscheint der Boden des Rohres verbreitert. Jene sagittale Längsfurche, welche entlang dem Boden des gesammten Rautenhirns verläuft und die auch im Grosshirn neuerdings auftritt, ist im Mittelhirn zu einer breiten Doppelrinne geworden, deren Grund sich als mediane Leiste gegen die Lichtung hervorwölbt. Auch die Deck-

1) Henle, Anatomie III, 2, S. 103.

platte erscheint im Mittelhirn weniger scharf von den beiden Flügelplatten abgesetzt, als in den übrigen Gehirnabtheilungen[1]).

Grosshirn. Die Scheidung des Röhrenquerschnittes in Boden-, Grund-, Flügel- und Deckplatte lässt sich auch am Grosshirn durchführen. Die Bodenplatte endigt im Infundibulum, die beiden Grundplatten erreichen die Corpora striata, die Flügelplatten sind bei der Bildung der Hemisphären betheiligt und die Deckplatte, welche längs des Zwischenhirns zu einer selbständigen Leiste sich erhebt, läuft mit ihrem vorderen Ende in der medialen Hemisphärenwand aus. Aus ihr entsteht als besonderes Product die Epiphyse. Die Geschichte aller dieser Bildungen soll auf eine spätere Mittheilung verspart bleiben.

Histologische Gliederung der Gehirnwand.

In der Gehirnwand vollzieht sich die histologische Gliederung wesentlich übereinstimmend wie im Rückenmark. Es kommt sehr frühzeitig zur Bildung eines Myelospongiums, es scheidet sich ferner eine lockere Mantelschicht von einer dichten Innenplatte, und die letztere allein ist die Trägerin karyokinetischer Figuren, während die Zellen der Mantelschicht in Axencylinder auswachsen. Auch eine Bogenschicht bildet sich am Gehirnrohr in weiter Verbreitung, indessen besteht sie nicht ausschliesslich aus solchen Fasern, die von hinten

1) Es ist unschwer zu verstehen, wie die Verbreiterung der Mittelhirnlichtung, gleich derjenigen des Rautenhirns als eine Folge der Axenbiegung des Rohres sich ergeben muss. Auffallend bleibt dabei die Verschiedenheit in der Gestaltung der einen und der anderen Lichtung, das Vorhandensein der medianen Längsrinne und die breite Ausbildung der Deckplatte am Rautenhirn, das Fehlen dieser Eigenthümlichkeiten am Mittelhirn. Bei Erklärung dieser Verschiedenheiten wird man zunächst beachten, dass die das Mittelhirn betreffende Scheitelkrümmung der Hirnaxe dorsalwärts convex, die Brückenkrümmung aber ventralwärts convex ist. Damit reicht man indessen nicht aus, denn auch im Bereiche der dorsalwärts convexen Nackenkrümmung besitzt das Rohr eine mediane Bodenrinne und eine relativ breite Deckplatte. Noch einschneidendere Bedeutung hat vielleicht der Umstand, dass die Ausbildung der verschiedenen Krümmungen zeitlich auseinanderfällt, indem beim menschlichen Embryo die Scheitelkrümmung der Brückenkrümmung erheblich voraus ist, d. h. die beiden bilden sich an Röhren verschiedener Weite und Wandbeschaffenheit. Diese Verhältnisse bedürfen einer eingehenderen Prüfung, wobei die vergleichende Betrachtung und das Experiment sich ergänzen müssen. Vielleicht finde ich später einmal Gelegenheit, darauf zurückzukommen.

nach vorn sich erstrecken wie bei Rückenmark, sondern sie nimmt stellenweise dorsalwärts gerichtete Fasern auf.

Beachtenswerth ist der zeitliche Ablauf der Entwickelung: Am weitesten ist das Rautenhirn voraus und zwar dessen untere Hälfte, die in der Hinsicht auch noch das Halsmark zu überholen scheint. Es ist dies deshalb von besonderer Bedeutung, weil die zuerst zur inneren Gliederung gelangende Strecke des Medullarrohres zugleich diejenige ist, die in der Folge die allerverwickeltste Organisation annimmt und die auch physiologisch die allermannigfaltigsten Beziehungen zu unterhalten hat. In der Hemisphärenwand vollziehen sich die Scheidungsvorgänge sehr spät, was übrigens auch damit in Beziehung zu bringen ist, dass die Hemisphären dem dorsalen oder Flügelbezirk des Medullarrohres angehören. Dieser Bezirk bleibt aber in der ganzen Länge des Rohres hinter dem der Grundplatten zurück und erscheint als eine mehr oder minder compacte Masse noch zu einer Zeit, wo die ventralen Abschnitte schon eine sehr ausgebildete Organisation zeigen. Da es nicht im Plane der diesmaligen Arbeit liegt, auf die anderweitigen Nervenbahnen des Gehirns einzugehen, so betrachte ich sofort:

Die Kerne und Wurzeln der motorischen Hirnnerven[1].

Im Rückenmark entsenden, wie dies bei anderen Anlässen gezeigt wurde, sämmtliche Zellen der Mantelschicht Axencylinderfortsätze und, während die der hinteren Markhälfte die Richtung ventralwärts einschlagen, so wenden sich die aus Zellen der vorderen Hälfte kommenden Fasern im Allgemeinen zur Oberfläche hin. Sie pflegen sich schon innerhalb des Marks zu kleinen Bündeln zusammenzuordnen, diese convergiren nach Aussen hin, überschreiten die Oberfläche und treten nunmehr als motorische Wurzeln in den Körper ein. Der Austritt von sämmtlichen, der vorderen Markhälfte entstammenden motorischen Fasern geschieht ungefähr an der Grenze des vorderen Markviertels. Hier erscheinen die Bündel an der Oberfläche in zwei bis drei nahe beisammen liegenden Reihen und sie bedingen so die Scheidung des Vorder- und des Seitenstranggebietes.

1) Besonders günstig für die Beobachtung der motorischen Kerne sowohl als der sensibeln Wurzeln erweisen sich menschliche Embryonen aus der Zeit, da der 4. und 3. Visceralbogen eben überdeckt werden.

Im überwiegenden Theil seiner Länge, d. h. vom Lendenmark herauf bis zum unteren Halsmark, bildet das Ursprungsgebiet der motorischen Rückenmarkswurzeln einen ungetheilten bandartigen Kern mit einer, summarisch betrachtet, einzigen Längsreihe von Austrittsbündeln. Im oberen Theil des Halsmarks tritt eine Abweichung von diesem allgemeinen Typus auf: die Fasern der Vorderhorn- und die der Seitenhornzone convergiren nicht mehr nach gemeinsamen Austrittspforten hin. Die der ersteren verlassen das Mark im vorderen Viertel des Umfangs, die der Seitenhornzone treten auf der Grenze zwischen dem zweiten und dritten Viertel aus. Es scheidet sich das

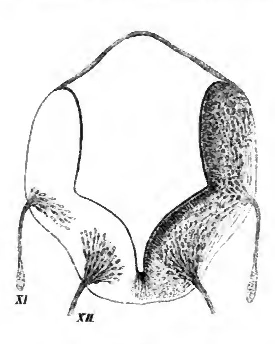


Fig. 20.
Querschnitt durch das Rautenhirn eines 10 mm langen Embryo (*Ko*). Vergr. 40. Links sind der Hypoglossus- und der Accessoriuskern isolirt dargestellt.

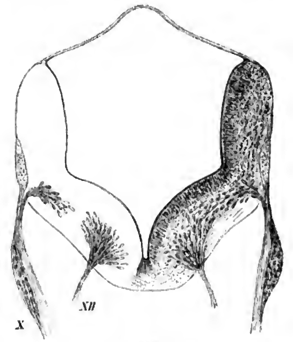


Fig. 21.
Von demselben Embryo; motorischer Vagus- und Hypoglossuskern, und aufsteigende Vaguswurzel.

Gebiet der vorderen Wurzeln im engeren Sinn von demjenigen der Accessoriuswurzeln. Die vorderen Wurzeln des oberen Halsmarks sind somit denen des übrigen Rückenmarks nicht völlig gleichwerthig, es fehlt ihnen hierzu der in den Accessorius übergehende Seitenhornantheil von Fasern.

Hypoglossus-, Accessorius-, Vagus- und Glossopharyngeuskern (Fig. 20 bis 22). Im unteren Abschnitte des Rautenhirns, in den Bezirken I und II obiger Aufzählung treten die aus den Zellen der Grundplatte hervorgehenden Wurzelbündel ebenfalls in zwei, unter sich parallelen Reihen zur Oberfläche. Die Fasern der medialen Hälfte

der Grundplatte, der Vorderhornzone im engeren Sinn, wenden sich ventralwärts und erscheinen an der Oberfläche als Wurzelbündel des N. **hypoglossus**. Die übrigen motorischen Fasern, aus dem Seitenhorngebiete der Grundplatte entspringend, verlassen das Gehirn an dessen lateraler Oberfläche, und zwar längs der Kante, welche die Grundplatte mit der Flügelplatte bildet und die sich kurzweg als **Seitenkante** bezeichnen lässt.

Von den Wurzelbündeln des Seitenhornkernes tritt der grössere Theil in den Sammelstamm des N. accessorius. Einige Bündel ge-



Fig. 22.
Von demselben Embryo; motorischer Glossopharyngeuskern, und aufsteigende Wurzel.

sellen sich direct dem Stamm des N. **vagus** bei und andere, der Zahl und Entwickelung nach wenig bedeutend, erreichen den N. **glossopharyngeus**.

Der bandartige motorische Kern des Rückenmarks erfährt sonach im Halsmark eine Spaltung in zwei langgezogene Parallelkerne, den des Vorderhorns und den des Seitenhorns. Beim Uebergang zum Gehirn setzt sich ein jeder derselben in einen besonderen Streifen fort, von denen der eine zum Hypoglossuskern wird, während der andere den Kopftheil des Accessoriuskerns nebst dem motorischen Vagus- und Glossopharyngeuskern umfasst. Eine Trennung des moto-

rischen Vaguskerns vom Accessoriuskern existirt nicht, wie denn überhaupt die Trennung des N. accessorius vom motorischen Antheil des Vagus als eine mehr oder minder künstliche sich herausstellt. Dagegen ist der motorische Glossopharyngeuskern, soweit ich verfolgen kann, vom vorderen Ende des Vaguskerns geschieden. Das vordere Ende des Hypoglossuskerns reicht bis in das Glossopharyngeusgebiet herein.

Jenseits vom Hypoglossus- und Glossopharyngeusgebiet treten die Kerne motorischer Nerven nur noch discontinuirlich auf. Ein grosser Theil von den Mantelzellen der Grundplatte ist von der Betheiligung an der Wurzelbildung ausgeschlossen und liefert statt dessen intracerebrale Commissurenfasern. Da die Umgrenzung der Kerne von Anfang ab keineswegs scharf gezeichnet ist, so wird das Vorhandensein der von den Zellen ausgehenden Wurzelfasern stets das wichtigste Erkennungsmittel sein. Indessen kommen den Kernen noch gewisse Eigenthümlichkeiten zu, die selbst bei schwacher Vergrösserung charakteristisch hervortreten. Einmal gehört dahin die bündelweise Zusammenordnung der hervortretenden Axencylinder, welche den Kernen eine gröbere Streifung verleiht, die zu einem Bündel gehörigen Zellen pflegen zu mehr oder minder compacten Büscheln zusammengefasst zu sein. Eine weitere Eigenthümlichkeit der embryonalen motorischen Nervenkerne äussert sich darin, dass einzelne ihrer Zellen bis an den Rand herangerückt sind. Es erscheinen in Folge davon die Kerne gleichsam aus der übrigen Mantelschicht herausgezogen. Am Rückenmark begegnen wir ähnlichen Verhältnissen, insofern auch da manche von den motorischen Zellen unmittelbar an den Rand gerückt erscheinen und stellenweise sogar das Spongiosagerüst überragen.

Der Kern des N. facialis. Der Facialis verlässt das Gehirn als ein ziemlich compacter Stamm in einiger Entfernung von der Gehörblase und etwas ventralwärts von der Eintrittsstelle der Acusticuswurzeln (Fig. 23). Von der Austrittsstelle aus tritt der Nerv zunächst durch die Mantelschicht hindurch bis an die Grenze der Innenplatte und nun folgt er dieser medialwärts, indem er im Bogen der Mittelebene sich nähert. Unweit von der letzteren liegt ein Längsbündel, zwischen dessen Fasern diejenigen des Facialis sich verlieren, bez. in die sie umbiegen. Dies Längsbündel besitzt nicht

mehr die geschlossene Abgrenzung, die dem lateralen Abschnitte des Facialis zukommt, es liegt seitlich und etwas dorsalwärts von den die Mittellinie überschreitenden Commissurenfasern. Der eigentliche Facialiskern liegt innerhalb des Gebietes der Gehörblase und zwar in der Seitenhornzone der Grundplatte. In einer gewissen Ausdehnung treten zahlreiche Faserbüschel aus dem Seitenborntheil der Grundplatte in die Formatio arcuata ein, und sie verlaufen medialwärts

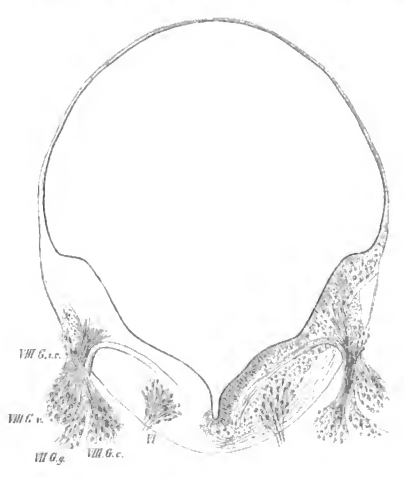


Fig. 23.

Von demselben Embryo Austrittsstelle des N. facialis und Kern des N. abducens. VII *G.g.* Ganglion geniculi, VIII *G.c.* G. cochleae, *G.v.* G. vestibuli, *G.i.c.* intracraniales Ganglion. Bei dieser Figur sind mehrere Schnitte combinirt. Die Austrittsstelle des N. abducens liegt nicht in derselben Ebene wie die des N. facialis, sondern etwas weiter hinten. Ebenso liegt der Stamm des N. facialis vor den Bündeln des Acusticus.

gegen das oben beschriebene Längsbündel hin. Den ununterbrochenen Verlauf dieser Faserbündel bis in den austretenden Facialisstamm vermag ich allerdings nicht zu verfolgen, sondern ich muss mich bei dessen Annahme einerseits an die bekannte Erfahrung der Anatomie über den Facialiskern des ausgebildeten Gehirns halten und sodann an die Thatsache, dass die aus dem Kern kommenden Fasern bei meinen embryonalen Präparaten in eben dem Längsbündel sich ver-

lieren, aus welchem weiter nach vorn die austretende Facialiswurzel hervorkommt.

Durch den Nachweis der frühen Existenz des inneren Facialisknies fällt der an und für sich ziemlich nahe liegende Gedanke dahin, als ob dasselbe durch eine secundäre Verschiebung in Folge der Gehirnkrümmung entstanden sein könnte[1]. Die innere Facialiswurzel beschreibt in der That von Anfang ab den Umweg, der sie vom

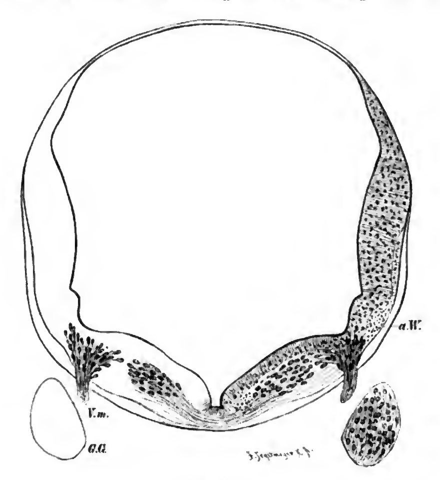


Fig. 24.
Von demselben Embryo. Motor. Kern des Trigeminus. *G.G.* Ganglion Gasseri. *a.W.* aufsteigende Trigeminuswurzel.

Ursprungskern aus erst medialwärts, dann nach vorn und zuletzt wieder lateralwärts zur Austrittstelle hinführt. Hieraus, sowie aus dem Beispiele des N. trochlearis geht hervor, dass für den Austritt der Fasern aus dem Mark der nächste Weg zur Oberfläche durchaus nicht immer der günstigste zu sein braucht. Vielleicht darf man daran denken, der Gehörblase einen bestimmenden Einfluss auf den Verlauf der inneren Facialiswurzeln zuzuschreiben. Die intracerebrale

---

1) W. KRAUSE, Specielle Anatomie, Hann. 1879, S. 727.

Facialiswurzel umgreift nämlich die Stelle, an welcher die Gehörblase dem Gehirn anliegt und zwar mit einem von der letzteren abgewendeten Bogen. Würden die Fasern des Facialiskerns auf dem nächsten Weg zur Oberfläche gelangen, so müssten sie der medialen Fläche der Gehörblase zugewendet sein, und um frei zu werden, dieselbe in der einen oder anderen Weise umgehen.

Der Kern des N. abducens (Fig. 23) ist ein ausschliesslicher Vorderhornkern. Seine Fasern gehen auf dem nächsten Weg zur Oberfläche und deren Austrittspforte liegt in der verlängerten Richtung des Hypoglossusaustrittes. Dabei wird der Kern schon beim 4- bis 4½wöchentlichen menschlichen Embryo in derselben Weise vom Knie der inneren Facialiswurzel umgriffen, wie dies für das ausgebildete Gehirn bekannt ist.

Motorischer Trigeminuskern. Die Portio minor trigemini erscheint an der Oberfläche des Gehirns vor der Eintrittsstelle der sensibeln Portion und etwas mehr ventralwärts als diese, bezw. etwas ventralwärts von der Seitenkante des Rautenhirns (Fig. 24). Die Mehrzahl der Fasern kommt aus einem ziemlich frühzeitig sich umgrenzenden Kern, der ausschliesslich der Seitenhornzone angehört. Die medialwärts davon liegende, der Vorderhornzone angehörige Zellenmasse entsendet zwar auch zahlreiche Fasern, allein diese gehen nach der Mitte hin und wenden sich über diese hinaus nach der entgegengesetzten Seite. Von einer absteigenden Trigeminuswurzel habe ich zwar bei den jüngsten daraufhin untersuchten Embryonen (*Br*₃ und *Ko*) nichts sicheres wahrzunehmen vermocht, dagegen finde ich bei dem 4½- bis 5wöchentlichen Embryo *Ha* ein im Seitenhorntheil der Grundplatte herabsteigendes Längsbündel, das nach seiner Lage und Ausdehnung für die absteigende Trigeminuswurzel zu halten ist. In Taf. I, Fig. 2 findet sich dasselbe dem Gehirnprofil eingezeichnet.

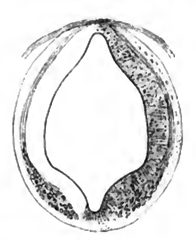


Fig. 25.
Isthmus nebst Trochleariskern und Trochleariswurzel von demselben Embryo.

Der Trochleariskern. Der N. trochlearis erscheint in sehr charakteristischer Weise als der Nerv des Isthmus. Seine Wurzel lässt sich vom Orte des Austritts aus durch die dicht hinter dem

Mittelhirn liegende Kreuzungsstelle hindurch als scharf umgrenztes Bündel in die Seitenwand des Rohres herein verfolgen, und ihre Fasern kommen aus einem Kern hervor, welcher der ventralen Hälfte angehört und der somit als Vorderhornkern aufzufassen ist. Auch die Trochleariswurzeln folgen während ihres intracerebralen Verlaufes der äusseren Grenze der Innenplatte, bezw. der allgemeinen Bahn der Formatio arcuata. Die Eigenthümlichkeit ihres Verlaufes lässt sich vielleicht auf die starke Abplattung des Gehirnrohres im Isthmusbereiche zurückführen, welche einer sagittalen Richtung der faserbildenden Zellen und der von ihnen ausgehenden Axencylinder günstig sein muss.

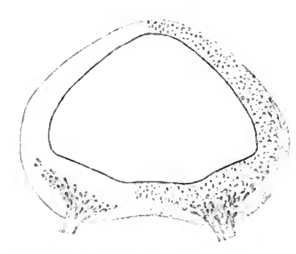


Fig. 26.
Querschnitt des hinteren Mittelhirnabschnittes desselben Embryo. Oculomotoriuskern.

Oculomotoriuskern (Fig. 26). Der vorderste von den motorischen Hirnnerven entwickelt sich aus einem ventralwärts gekehrten Kern des hinteren Mittelhirngebietes. Der Boden des Mittelhirns ist, wie früher gezeigt wurde, beim 4—5wöchentlichen Embryo sehr breit. Auch der Oculomotoriuskern nimmt eine gewisse Breite ein und seine Wurzelbündel treten beinahe direct ventralwärts und folgen hinsichtlich ihrer Austrittsstelle dem Typus der Abducens- und der Hypoglossusbündel.

Behufs übersichtlicher Darstellung sind in den Figuren 1 u. 2 von Tafel I die verschiedenen Nervenkerne der Embryonen *Ko* und *Ha* den bezüglichen Gehirnprofilen eingezeichnet und die Austrittsstellen durch kleine Kreise angegeben. Photographische Aufnahmen der Schnittbilder lieferten die Unterlage der Construction. Jeder Schnitt wurde bei Ausführung der Figuren mit stärkerer Vergrösserung gewissenhaft nachgeprüft. Unter Hinweisung auf diese Figuren, sowie auf die im voranstehenden Text eingedruckten Schnittbilder, fasse ich die Ergebnisse nochmals zusammen.

1) Sämmtliche Fasern motorischer Gehirnnerven entspringen als Axencylinderfortsätze aus Mantelschichtzellen der Grundplatte des Gehirns. Letztere ist aber die directe

Fortsetzung von der ventralen Hälfte des Rückenmarksrohres. Es besteht insoweit eine vollständige Uebereinstimmung in der Ursprungsweise der motorischen Nerven des Gehirns mit denjenigen des Rückenmarks.

2) In der Grundplatte des Gehirns lassen sich eine medioventral und eine laterodorsal gerichtete Hälfte unterscheiden, die wir im Anschluss an die Verhältnisse des Rückenmarks kurzweg als Vorderhornzone und als Seitenhornzone auseinanderzuhalten haben. Die Trennung dieser beiden Zonen ist im allgemeinen keine scharf gezeichnete; am bestimmtesten macht sie sich da geltend, wo die Fasern der beiden Zonen nach verschiedenen Austrittsstellen hingehen.

3) Obwohl die Abgabe von Axencylindern auch für die Mantelschicht des Rauten- und Mittelhirns ein durchgreifender Charakter zu sein scheint, so ist nur ein Theil von den Zellen der Grundplatte bei der Bildung motorischer Wurzelfasern betheiligt. An die Stelle der bandartig fortlaufenden Nervenkerne des Rückenmarks und des Nachhirns treten als vereinzelte Kerne diejenigen für die Nn. facialis, abducens, trigeminus, trochlearis und oculomotorius. Letzterer erscheint als das Endglied der gesammten Kette motorischer Kerne.

Es ist zu beachten, wie die Stelle, von wo ab die bandartige Continuität der Nervenkerne aufhört, annähernd mit dem hinteren Rande des Brückengebietes zusammenfällt. Von da ab wird der grössere Theil der Axencylinderfortsätze der Grundplatte zur Bildung intracerebraler Bahnen verwendet. Es bleibt durch spätere Untersuchungen genauer festzustellen, welche Bedeutung gerade diesen durch ihre Abstammung den motorischen Wurzeln homologen Faserbahnen zukommt; ein Theil derselben geht jedenfalls in die Quercommissuren über, andere scheinen in die Längsbahnen des Gehirns einzutreten.

4) In Betreff ihrer Austrittsweite zeigen die Nerven des Gehirns eine grössere Freiheit als diejenigen des Rückenmarks. Dem Typus der Rückenmarksnerven folgen nur die Nn. hypoglossus, abducens und oculomotorius und selbst für diese ist die Parallele nur eine theilweise, insofern diese Nerven nur der Vorderhornzone angehören, während, abgesehen vom obersten Halsmark, die motorischen Rückenmarkswurzeln die Fasern der Vorder- und der Seitenhornzone umfassen.

Eine sehr bevorzugte Austrittsstelle für motorische Hirnnerven ist die Seitenkante des Rohres. Längs derselben gelangen zur Oberfläche: der N. accessorius, die motorischen Bündel des Vagus, des Glossopharyngeus und die des Facialis. Auch die motorischen Fasern des N. trigeminus erreichen die Oberfläche unweit von der Seitenkante, wenn auch etwas ventralwärts davon. Für die Mehrzahl der genannten Nerven gilt die Regel, dass die Ursprungszellen der Fasern nahe bei der Austrittsstelle liegen. Ausnahmen von dieser Regel machen der N. facialis, der N. trochlearis und die absteigende Wurzel des N. trigeminus.

Verhalten der Gangliennerven des Kopfes.

In einem früheren Aufsatz ist der Beweis geliefert worden, dass die sensibeln Nerven des Rumpfes von den Ganglien aus in's Rückenmark hineinwachsen. Jede Ganglienzelle entsendet zwei Ausläufer, von denen einer peripheriewärts, der andere centralwärts geht. Die centralverlaufenden Ausläufer sammeln sich zunächst zu einem der Aussenfläche des Marks anliegenden Längsbündel, dem ovalen Bündel oder primären Hinterstrang. Von diesem aus treten Faserbüschel medianwärts zwischen die Zellen der Flügelplatte.

Alle Zellen der Spinalganglien[1]) senden Fasern nach dem Rückenmark, dagegen lässt sich beim gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse nicht mit Sicherheit behaupten, dass alle Fasern der hinteren Wurzeln mit Ganglienzellen zusammenhängen. Seit der Zeit, da M. Hall excitomotorische Fasern als eine besondere Kategorie hinterer Wurzelfasern aufgestellt hat, sind Seitens von Anatomen und von Physiologen immer wieder Versuche gemacht worden, die hinteren Wurzeln in Bestandtheile von verschiedener anatomischer und functioneller Bedeutung zu zerlegen[2]). Meine entwickelungsgeschichtlichen

1) Hierbei sehe ich von dem verkümmernden obersten Halsganglion ab, das Froriep entdeckt und dem N. hypoglossus zugetheilt hat.

2) Hier ist zunächst an die merkwürdigen Erfahrungen Schiff's über die von ihm sog. Analgesie zu erinnern (Lehrbuch der Physiologie, S. 252), sowie an eine Beobachtung Onody's, welcher beim Hühnchen abnorm auftretende hintere Wurzelfasern unter Umgehung des Ganglions direct in den Ramus posterior eintreten sah. Besonders bedeutsam erscheinen unter den Neueren die Beobachtungen von Bechterew einerseits und die von Joseph andererseits.

Ergebnisse berechtigen mich bis jetzt nicht, in dieser Frage Stellung zu nehmen; indess darf ich hier nicht stillschweigend daran

---

Gestützt auf die verschiedenen Zeiten der Markscheidenbildung unterscheidet Bechterew (Archiv f. Anat. Phys. anat. Abth. 1887, p. 126) zwei streng differenzirte Bündel hinterer Wurzeln. Das eine, früher sich entwickelnd und aus gröberen Fasern bestehend, geht medialwärts in den Wurzeltheil der Burdach'schen Stränge und zum Theil auch direct nach der gelatinösen Substanz, innerhalb deren seine Fasern steil in die Höhe steigen. Die Fasern der zweiten Art bekommen ihre Markscheiden später als die ersteren und sie sind feiner als diese. Zum kleineren Theil gehen sie in die Subst. gelatinosa, zum grösseren wenden sie sich lateralwärts in den hintersten Theil der Seitenstränge. Einige können noch den lateralen Theil der Burdach'schen Stränge erreichen. Die Fasern der medialen Gruppe wenden sich früher oder später nach der grauen Substanz des Hinterhorns, theils zwischen die Zellen der Clarke'schen Säulen, theils an diesen letzteren vorbei nach vorn, wo sie sich entweder im Zwischengebiet von Vorder- und Hinterhorn verlieren, oder in das Vorderhorn oder endlich in die vordere Commissur vordringen. Die Fasern der später entwickelten feinen Gruppe treten, nachdem sie eine Zeit lang vertical verlaufen waren, gleichfalls in die graue Substanz und verlieren sich der Hauptsache nach zwischen den Zellen der Hinterhörner; ein Theil derselben scheint bis zu den Zellen des Seitenhorns vorzudringen. Mittelbar, d. h. unter Einschiebung der Clarke'schen Säulen, hängen die Fasern der ersten Gruppe mit den Kleinhirnseitensträngen zusammen, während ein anderer Theil an die dorsale Basis der Burdach'schen und der Goll'schen Stränge gelangt und wieder andere die Richtung zur vorderen Commissur einschlagen. Die feinen Fasern der zweiten Gruppe finden ihre mittelbare Fortsetzung theils in der Commissura posterior und den Seitensträngen der gegenüberliegenden Seite, theils aber in den Bahnen der Goll'schen Stränge derselben Seite. Ausdrücklich bemerkt Bechterew, dass die beiderlei Bündel hinterer Wurzeln verschiedene functionelle Bedeutung besitzen und er vermuthet, dass die Hautempfindlichkeit durch die Fasern der zweiten (feinen) Gruppe vermittelt wird.

Von einer ganz anderen Seite aus ist Joseph (dass. Archiv, physiol. Theil 1887, p. 296) dazu gelangt, die hinteren Wurzelfasern in zwei Gruppen zu scheiden. Indem er nämlich die bekannten Waller'schen Versuche der Wurzeldurchschneidung wiederholte, kam er zum Ergebniss, dass nach Trennung der hinteren Wurzeln zwischen Ganglion und Mark zwar der überwiegende Theil der Fasern centralwärts entartet und peripheriewärts intact bleibt, daneben aber für einen zweiten etwas geringeren Faserantheil das Umgekehrte gilt. Hält man an dem, wie ich glaube, durchaus berechtigten Satze fest, dass nur jene Fasern entarten, deren Axencylinder von ihren Ursprungszellen getrennt sind, so muss man aus diesem Ergebniss schliessen, dass die hinteren Wurzeln neben ihren ganglionären Fasern einen bestimmten Procentsatz von medullaren enthalten.

Endlich ist eine fernere, zur Zeit noch räthselhafte Complication zu erwähnen, welche sich aus den Beobachtungen von Feodor Krause ergiebt (ibid p. 370):

vorbeigehen und ich gebe demnach ausdrücklich die Erklärung ab, dass meine positiven Angaben ausschliesslich auf das Verhalten ganglionärer Nerven sich beziehen.

Am Kopf scheiden sich primär vier Gangliencomplexe ab, von denen der erste die Trigeminusganglien, der zweite die Ganglien vom Acustico-facialis umfasst, während die Ganglien des Glossopharyngeus und diejenigen des Vagus die dritte und vierte Anlage bilden. Jeder von diesen primären Complexen erfährt secundär eine weitere Gliederung und Zerspaltung: so trennen sich vom ersten Complex anfangs das Ciliarganglion und später die übrigen kleineren Trigeminusganglien ab. Der zweite Complex zerfällt in das Ganglion geniculi und in die verschiedenen Acusticusganglien (das intracraniale Ganglion, sowie G. cochleae und G. vestibuli) und endlich trennen sich am Glossopharyngeus und Vagus die höher und die tiefer liegenden Massen, G. Ehrenritteri, G. petrosum sowie G. jugulare und G. nodosum von einander. Im allgemeinen sind es die auftretenden Faserbündel, welche die Gruppen von Nervenzellen auseinanderdrängen, daneben mögen allerdings noch fernere Motive hinzukommen, die Beeinflussung durch Nachbartheile, sowie die, wie es scheint, nicht unbeträchtlichen Verschiebungen, welche die Zellengruppen durch die Entwickelung ihrer eigenen Fortsätze erfahren.

Der histologische Charakter der verschiedenen Kopfganglien stimmt zu Beginn des zweiten Monats mit dem der Spinalganglien überein. Aus den Acusticusganglien bez. aus dem Spiralganglion kennt man schon seit den Arbeiten von CORTI bipolare Ganglienzellen[2]. Dieselbe Form kehrt aber in sämmtlichen Kopfganglien des Embryo wieder, im G. Gasseri, im G. geniculi, in den Glossopharyngeus- und in den Vagusganglien. Die beiden Fortsätze werden selbstver-

---

bei peripherischer Durchschneidung von Nervenstämmen soll ein bestimmter Antheil von Fasern centralwärts degeneriren. KRAUSE glaubt, es handle sich um Fasern, die in den Tastkörperchen entspringen. Diese Annahme ist aber unhaltbar, da schon MEISSNER (Beiträge zur Anat. und Phys. der Haut 1853) gezeigt hat, dass an den Nerven der letzteren die Degeneration peripheriewärts fortschreitet. Sollte man nicht eher an recurrirende Fasern denken können?

1) Archiv f. Anat. u. Phys. anat. Abth. 1880, S. 456. Ueber die Anfänge des peripheren Nervensystems, man vergl. insbesondere Taf. XVIII.

2) CORTI, Recherches sur l'organe de l'ouie, Zeitsch. für wissenschaftl. Zool. Bd. III, S. 24 und KÖLLIKER, mikrosk. Anatomie II, 2, S. 747.

ständlich nur da gleichzeitig sichtbar sein, wo der Schnitt mit der Faseraxe parallel läuft. Auch in Hinsicht der Gruppirung der Zellen und ihrer Anordnung in einzelne Ketten schliessen sich die grösseren Kopfganglien denen des Rumpfes an. Eine Verwechselung von bipolaren Bindegewebszellen mit Ganglienzellen wird wohl nur einem ungeübten Auge vorkommen. Von jenen unterscheiden sich diese durch ihren relativ breiten Protoplasmahof und durch den sehr allmählich vermittelten Uebergang des letzteren in den Axencylinderfortsatz. Auch sind ihre Fortsätze viel breiter als diejenigen der Bindegewebszellen.

Die Gestalt der einzelnen Kopfganglien ist charakteristisch genug, um ein jedes am Durchschnittsbild erkennen zu können. Das G. Gasseri zeigt sich als ein Oval, das an der Stelle grösster Entwickelung breiter als hoch ist. Das Acusticofacialis-Ganglion ist eigenthümlich zerklüftet und seine Faserbündel divergiren fächerförmig. Das G. petrosum zeigt wiederum eine geschlossene, fast kreisrunde Umgrenzung und die beiden Vagusganglien bilden langgezogene Spindeln, in denen die Zellen streifenweise den Faserbündeln angelagert sind.

Trigeminus. Nach meinen älteren am Hühnchen gemachten Erfahrungen[1]) erscheint das Trigeminusganglion gleich nach erfolgter Abschnürung als ein langgestreckter Zellenstreifen, der neben den drei vorderen Gehirnabschnitten herläuft, indem sein vorderes Ende der Augenblase und dem Vorderhirn, sein hinteres dem hinteren Rande des Hinterhirns anliegt. Wenn die Scheitelkrümmung des Gehirns zur Ausbildung gelangt ist, so spannt sich der Ganglienstreifen als Bogensehne von der Gegend der Brückenkrümmung direct nach dem Raume über den Augenblasen herüber, und das Mittelhirn ist nunmehr über denselben weit emporgestiegen. Das vordere und das hintere Ende des Streifens erscheinen verdickt, jenes stellt die Anlage des Ganglion ciliare dar.

Diese eben geschilderte Stufe kennen wir auch vom menschlichen Embryo und ich verweise in der Hinsicht auf die Tafeln zur Anatomie menschlicher Embryonen[2]), sowie auf die Figuren gegen-

1) Monogr. d. Hühnchenentwickelung, p. 106 und im oben citirten Aufsatz, p. 168 und Taf. XVIII, Fig. 2 und 3.

2) Anat. menschl. Embr. Taf. VII. A. I und B. I und Taf. VIII, Fig. α_2 und

wärtiger Abhandlung. Das genauere Studium der Schnitte, welche der Construction letzterer Figuren zu Grunde liegen, ergiebt, dass zu Ende des ersten Monats das Ganglion ciliare sich bereits emancipirt hat und dass dasselbe mit dem Hauptganglion durch einen zellenfreien Faserstrang verbunden ist. Das Hauptganglion hat eine dreieckige Grundform, seine Spitze ist dorsalwärts gerichtet und entsendet die zum Gehirn tretenden Wurzelfasern. Die peripheriewärts abgehenden Stämme sind eine Strecke weit von Ganglienzellen begleitet. Diese das Hauptganglion überschreitenden Zellen sind als die Anlagen der kleinen Trigeminusganglien, des G. rhinicum und des G. oticum anzusehen. Ueber die Anlage des Submaxillarganglions besitze ich keine brauchbaren Beobachtungen; ich vermuthe indessen, dass dasselbe gleichfalls aus Zellen hervorgeht, die sich vom Hauptcomplex abgelöst haben.

Die Hauptmasse der Wurzelfasern geht in ein dem Gehirn äusserlich anliegendes plattes Bündel von Längsfasern über, den Tractus trigeminus oder die aufsteigende Trigeminuswurzel der Autoren. Es schmiegt sich das Bündel der Seitenkante des Gehirns an (Fig. 27), seine Verbindung mit diesem ist indessen eine Anfangs nur lose. Die aufsteigende Trigeminuswurzel erstreckt sich nun bekanntlich am ausgebildeten Gehirn durch die Brücke und durch die Corpora restiformia hindurch bis in das Halsmark. Auch bei Embryonen vom Ende des zweiten Monats kann man sie auf eine grössere Strecke hin verfolgen, dagegen ist sie in früheren Zeiten nur sehr kurz. Bei Embryo *Br*$_3$ kann ich das Bündel nur um weniges über die Eintrittsstelle hinaus verfolgen (Taf. II, Fig. 4) und auch bei Embryo *Ko* verliert dasselbe noch diesseits des Acusticus seine charakteristische Abgrenzung (Taf. I, Fig. 1).

Der acustico faciale oder zweite Gangliencomplex liegt von Anfang ab unmittelbar vor der Gehörblase. Auch dieser Complex hat, als Ganzes betrachtet, eine dreieckige Grundform, indem er dorsalwärts schmaler, ventralwärts dagegen breiter ist. Schon die oberflächlichste Schnittbetrachtung zeigt eine sehr charakteristische, bei keinem anderen Ganglion wiederkehrende fächerförmige Grup-

---

α_4. Bei der Figur α_4 sind die Ganglien nach dem unzerlegten Präparate im durchfallenden Lichte eingezeichnet worden.

pirung der Elemente, die damit zusammenhängt, dass die beiden Zweige des N. acusticus, der N. vestibuli und der N. cochleae verschränkt laufen (Fig. 23). Von dem medialwärts liegenden Ganglion cochleae aus gehen die zum Gehirn tretenden Fasern lateral- und dorsalwärts. Von dem lateral gelegenen G. vestibuli dagegen wenden sie sich mit medialer Neigung in's Gehirn. Der N. facialis, der schon innerhalb des Gehirns als auffallend compacter Strang erscheint,

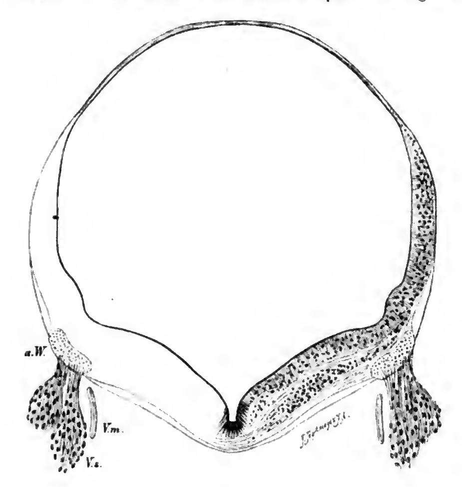


Fig. 27.
Querschnitt durch das Gehirn vom Embryo *Ko* an der Stelle, wo die dem Ganglion Gasseri entstammenden Fasern dem Gehirn sich anlegen und in die aufsteigende Wurzel *a.W.* übergehen. *V.s.* sensible Portion des N. trigeminus. *V.m.* motorische Wurzel.

schiebt sich als eben solcher zwischen den beiden Ganglien hindurch, sie auseinanderdrängend, und er nimmt nun den am meisten ventralwärts liegenden Theil des Complexes als Ganglion geniculi mit sich. Dieses rückt in der Folge immer mehr aus der Verbindung mit den Acusticusganglien heraus[1]).

1) Eine hierauf bezügliche Figur habe ich in der Anat. menschl. Embryonen I, S. 44 mitgetheilt. Irrthümlich ist dort der N. facialis mit seinem peripheren

Die genannten drei Ganglien werden in der Folge alle von der Knorpelmasse des Felsenbeins umschlossen. Jenseits von dem letzteren bleibt aber eine Anhäufung von Zellen übrig, welche die bekannte, den Wurzeln gleich neben dem Gehirn anliegende Anschwellung bilden, die einige Anatomen als lateralen, andere als vorderen oder als accessorischen Kern bezeichnet haben. Bei der Verwirrung, die in der Bezeichnung der verschiedenen Acusticuskerne existirt, ist es wohl am wenigsten missdeutbar, wenn die fragliche Bildung als intracranielles Ganglion bezeichnet wird. Die in das Gehirn eintretenden Wurzelfasern beider Acusticuszweige breiten sich im allgemeinen fächerförmig aus. Auf eine genauere Analyse ihres Verlaufes muss ich für diesmal verzichten.

Für den Erwachsenen ist von Sapolini nachgewiesen worden, dass vom G. geniculi aus eine besondere Verbindung nach dem Gehirn hingeht. Der Verbindungsnerv ist der N. intermedius Wrisbergi, und der genannte Beobachter hat eine aufsteigende Wurzel dieses Nerven auf weite Entfernung hin durch das verlängerte Mark zu verfolgen vermocht[1]).

N. glossopharyngeus. Am Nervus glossopharyngeus zerlegt sich die Ganglienmasse in einen kleineren oberen und einen grösseren unteren Complex, das Ehrenritter'sche Ganglion und das Ganglion petrosum; ersteres liegt anfangs dicht hinter der Gehörblase und nachdem diese sich ausgedehnt hat, wird es vom Anfangstheil des Schneckenganges überlagert. Das Ganglion petrosum ist dem Bereich der Gehörblase entrückt und sein unterer Theil liegt im Niveau des Rachenraumes. Das obere Ganglion ist von spindelförmiger, das untere von regelmässig ovaler Gestalt.

Das Faserbündel, das von den Glossopharyngeusganglien aus

Stumpf zu weit lateralwärts geführt, bez. auf eine Strecke weit mit dem N. vestibuli vermengt. Demgemäss sind die dortigen Bezeichnungen zu verbessern. Der Facialis geht medialwärts vom Ganglion vestibuli durch und die Reihenfolge von der Medialseite her ist G. cochleae, G. geniculi und G. vestibuli.

Auf den verschränkten Verlauf der beiden Acusticuszweige macht auch Gradenigo aufmerksam in seinem Aufsatz über die Entwickelung des Gehörorgans. (Wiener medic. Jahrbücher 1887, S. 77.)

1) Sapolini, Etudes anatomiques sur le nerf de Wrisberg etc. Bruxelles 1884.

an das Gehirn herantritt, erreicht dessen Seitenkante und biegt hier in ein dorsalwärts von der Kante befindliches Längsbündel um, die aufsteigende Glossopharyngeuswurzel oder den Tractus glossopharyngeus. Anfangs (bei Embryo Br_3) ist dies Bündel sehr kurz und es erreicht das entsprechende Bündel des Vagus noch nicht. In der Folge wird es aber beträchtlich länger und beide vereinigt treten als höchst charakteristischer Strang als Tractus solitarius (oder als aufsteigende Wurzel des gemischten Systems) bis in den oberen Theil des Rückenmarks herein.

N. vagus. Bei diesem Nerven dehnt sich die Ganglienmasse zu einem besonders langen Streifen aus und sie zerfällt in die beiden bekannten Abtheilungen des G. jugulare und G. nodosum, die übrigens gleich den beiden Glossopharyngeusganglien nicht absolut scharf geschieden sind, da kleinere Zellengruppen auch dem intermediären Stück anliegen. Jedes der beiden Vagusganglien hat seine Eigenthümlichkeiten. Das obere bildet eine fein ausgezogene Spindel, an deren medialer Seite ein Strang von zellenfreien Wurzelfasern zum Gehirn emporsteigt. In diesen letzten Strang treten die motorischen Wurzelfasern des Nerven ein. Auch das untere Ganglion ist von spindelförmiger Gestalt, es reicht tiefer herab denn irgend ein anderes Kopfganglion, da es mit seinem unteren Ende lateralwärts vom Kehlkopf gelagert erscheint.

Das Bündel von Fasern, das von den Vagusganglien ausgeht, erreicht auch seinerseits das Gehirn im Bereich der Seitenkante des letzteren und geht in einen flachen, der Flügelplatte anliegenden Längsstrang, die aufsteigende Vaguswurzel oder den Tractus n. vagi über. Gleich den übrigen sensibeln Wurzelsträngen des Gehirns ist dieser zur Zeit seines ersten Auftretens sehr kurz und er verlängert sich successiv, indem er weiterhin mit dem Tractus glossopharyngeus zum Tractus solitarius gemeinsam zusammentritt. Beide Bündel liegen anfangs durchaus oberflächlich und sie erscheinen sogar recht lose mit dem Gehirn verbunden. Von der sich umbiegenden Randlippe der Flügelplatte wird der Tractus solitarius späterhin umgriffen und in die Tiefe gedrängt. Es handelt sich dabei um einen Process allgemeinerer Art, der auf das Rautenhirn in dessen ganzer Länge umgestaltend wirkt und in dessen genauere Beschreibung ich für diesmal noch nicht eintreten werde.

Fassen wir in Betreff der sensibeln Nerven die Ergebnisse zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

1) Von den Ganglien der Kopfnerven aus wachsen die centralen Ausläufer der Nervenzellen, zu Bündeln geordnet, auf das Gehirn zu und sie erreichen zunächst dessen Aussenfläche.

2) Die Wurzeln von Trigeminus, Intermedius, Glossopharyngeus und Vagus gehen, wenn auch nicht alle, so doch jedenfalls zu einem grossen Theil in Längsbündel über, welche anfangs nur sehr kurz sind, dann aber mehr und mehr in die Länge wachsen und die Richtung nach dem Halsmark einschlagen. Es sind dies die sog. aufsteigenden Wurzeln der Hirnanatomen. Für den N. acusticus liegen die Verhältnisse etwas abweichend, insofern seine Wurzelfasern jedenfalls nur zu einem geringen Theil in eine aufsteigende Wurzel übergehen, zum grösseren Theil sich in der Nähe der Eintrittsstelle ausbreiten.

3) Nach ihrer Lage an der Aussenfläche der Flügelplatte und nach ihrer Faseranordnung erweisen sich die aufsteigenden Wurzeln der Ganglienнerven des Kopfes dem primitiven Hinterstrang oder ovalen Bündel des Rückenmarks durchaus homolog. Man darf die aufsteigende Trigeminuswurzel oder den Tractus solitarius geradezu als Hinterstrangbildung des Gehirns bezeichnen. Während aber bei der dichten Lagerung der Rumpfganglien die Wurzelbündel von Anfang ab zu dem zusammenhängenden System des Hinterstranges zusammentreten, kommt es im Gehirn nicht zu einer durchgreifenden Verbindung der Hinterstrangbildungen. Glossopharyngeus- und Vagusantheil treten zusammen; ehe dagegen der Trigeminusantheil soweit entlang gewachsen ist, um jene zu erreichen, sind secundäre Verschiebungen der Theile eingetreten, in deren Folge die aufsteigende Trigeminuswurzel vom Tractus solitarius getrennt bleibt.

4) Bei den motorischen Nerven bezeichnen wir die Stellen als deren Kerne, welche die Ursprungszellen der Fasern umfassen. Es ist klar, dass es im Gehirn sensible Kerne dieser Art nicht geben kann. Die sensibeln Kerne, d. h. die Ursprungsstätten der Fasern, finden wir in den Ganglien, somit in extracerebralen Bildungen. Es ist durch weitere Untersuchungen festzustellen, welches die Bedeutung derjenigen Bildungen ist, die man bis dahin als die Kerne sensibler Nerven, des Vagus, des Glossopharyngeus

und des Trigeminus aufgefasst hat. Vielleicht handelt es sich um solche Zellengruppen, zwischen welchen ein Theil der sensibeln Fasern ausläuft, falls nicht etwa in dem oben angedeuteten Sinn medullar entspringende Wurzelfasern besonderer Art von ihnen ausgehen.

Halten wir die eben aufgezählten Verhältnisse zusammen mit denen der motorischen Wurzeln, so ergiebt sich, dass die sensibeln und motorischen Wurzeln der Gehirnnerven hinsichlich ihres Ursprungs, sowie hinsichtlich ihrer nächsten Verlaufsweise denen des Rückenmarks sich durchaus an die Seite stellen. Alle motorischen Nerven entspringen von Zellen der Grundplatte des Rohres, alle Zellen der Spinalganglien und der entsprechenden Ganglien des Kopfes entsenden Fasern zum Medullarrohr, welche zunächst der Aussenfläche der Flügelplatte sich anlegen, um dann weiterhin successive in's Innere ihrer Substanz einzudringen. Den sensibeln Fasern ähnlich verhalten sich die Geschmacksnerven und der Gehörnerv. Die vorwiegende Verlaufsrichtung der sensibeln Wurzelfasern geht im Rückenmark von unten nach oben, im Gehirn ist sie eine umgekehrte.

Das Auswachsen der peripherischen Nerven.

Die nachfolgende Betrachtung schliesst sich einem Capitel der Anatomie menschlicher Embryonen als weitere Ausführung an, und sie basirt auf den Constructionen, die ich für das peripherische Nervensystem einer Anzahl von Embryonen vom Ende des ersten und Beginn des zweiten Monats ausgeführt habe. Hiervon theile ich in der Tafel II zwei mit, welche auch über den Rumpf sich ausdehnen und die mit Hülfe von photographischen Aufnahmen der Schnitte durchgearbeitet worden sind. Indem dabei ein jeder Schnitt zu seinem Recht kam und mit dem Mikroskop sorgfältig nachgeprüft wurde, bin ich im Stande gewesen, auch in das Einzelne der Verzweigungen und Geflechtbildung einzutreten. Die Hauptklippe, die man zu vermeiden hat, ist die Schematisirung. Wo von einigen aufeinander folgenden und im Uebrigen unter sich durchaus ähnlichen Schnitten der eine einen längeren, der andere einen kürzeren, ein dritter vielleicht an entsprechender Stelle gar keinen Nervenstamm zeigt, da ist man anfangs nur allzuleicht geneigt,

an der Sicherheit der Beobachtung zu zweifeln und eine Gleichartigkeit der Schnitte vorauszusetzen, die der Natur der Sache nach gar nicht vorhanden sein kann. Erst ein sehr genaues Individualisiren der Schnitte führt zur Erkenntniss der realen Verhältnisse, und diese ordnen sich schliesslich in einer sehr viel befriedigenderen Weise, als dies durch supponirte Schemata möglich gewesen wäre.

In Betreff der beiden Figuren bemerke ich, dass ich im Allgemeinen die Nerven soweit gezeichnet habe, als sie überhaupt erkennbar gewesen sind, die gezeichneten Enden stimmen also mit den zu der Zeit factisch vorhandenen überein. An einigen Stellen bin ich indessen nicht bis an's Ende gegangen; einmal habe ich die Dorsalzweige der Rumpfnerven ganz weggelassen, da sie die Zeichnung unnöthig complicirt hätten. Ebenso habe ich am Hals und in den Extremitätengeflechten einige Stämme unvollständig gelassen, weil sonst die Darstellung unklar geworden wäre, oder auch, weil die Beobachtung nicht präcis genug durchzuführen war. Alle diese Stellen sind als Schnittstellen durch kleine Kreise bezeichnet. Durchweg handelt es sich dabei nur um kurze weggelassene Strecken.

Die beiden benutzten Embryonen *Br*$_3$ und *Ko*, der eine von 6,9 mm, der andere von 10,2 mm Nl., waren in Schnitte von je 10 μ zerlegt und (der eine mit Hämatoxylin und Eosin, der andere mit P. Mayer's Carminlösung) so intensiv gefärbt worden, dass das Verhalten der Nerven an jedem Schnitt auf das deutlichste verfolgbar war.

Der N. olfactorius ist bei keinem der beiden Embryonen erkennbar und auch von einem N. opticus als von einer Faserbahn kann noch nicht gesprochen werden.

Der N. oculomotorius tritt bei *Ko* in nahezu gestreckter Richtung auf die Gegend hinter dem Auge zu und er verläuft auf eine weite Strecke im Gewebe des mittleren Schädelbalkens. Ungefähr im Niveau des Trichterfortsatzes kreuzt er sich mit dem N. trochlearis und liegt dabei mehr medialwärts als dieser. Dann erfolgt eine zweite Kreuzung mit dem N. ophtalmicus trigemini dicht am Ciliarganglion vorbei. Die letzte Fortsetzung des Stammes ist bis unter das Auge verfolgbar und sie entspricht, wie man sieht, dem Ramus inferior. Den abgehenden Ramus superior habe ich nicht zu

erkennen vermocht, lege indessen diesem negativen Ergebniss keinen Werth bei.

Der N. trochlearis geht in beinahe gestrecktem Verlauf von seiner Austrittsstelle aus auf das Auge los und er ist über diesem vorbei noch ein Stück weit erkennbar.

N. trigeminus. Die vom G. Gasseri ausstrahlenden drei Stämme gehen in gestreckter Richtung ab. Der Ramus ophtalmicus ist bei *Ko* ein Stück weit über das Ganglion hinaus und über dem Auge vorbei zu verfolgen. Die Rami maxillaris superior und inferior reichen bei Br_3 nur bis in die Wurzel der betreffenden Kieferfortsätze, bei *Ko* gehen sie tiefer in diese herein. Die Portio minor, medialwärts vom Ganglion und parallel dessen hinterem Rande verlaufend, kreuzt den Ramus mandibularis gleich in dessen Beginn und gelangt mit der Hauptmasse ihrer Fasern an dessen Aussenseite. Von da aus kann ich demselben nur noch auf kurze Entfernung folgen.

Der N. abducens verläuft bei *Ko* gleichfalls gestreckt bis hinter das Auge, indem er anfangs von der unteren Fläche des Gehirns wenig entfernt liegt. Er verläuft medialwärts vom G. Gasseri, bez. von dessen zwei hinteren Ausstrahlungen, und sein Ende liegt nahe hinter dem Auge.

Der N. facialis verläuft zur Zeit seines Hervortretens gestreckt nach der Wurzel des Hyoidbogens, bei Br_3 hört er schon hier auf. Bei *Ko* dagegen hat sich der Hyoidbogen stark zurückgekrümmt, er deckt den dritten Bogen zu und berührt die seitliche Halswand. Dem entsprechend ist jetzt auch der erheblich länger gewordene N. facialis zurückgekrümmt und sein freies Ende ist dem Mandibularbogen zugewendet. Nach dieser neuen Richtung hin wachsen in der Folge seine Zweige aus. Ein dünner Nerv tritt als Chorda tympani in die Verschlussplatte der ersten Spalte ein, aber auch dieser Nerv endet nach kurzem Verlauf als Stumpf und erreicht zu dieser Zeit den N. trigeminus noch nicht. Die Bündel des N. acusticus treten an die Medialseite der Gehörblase.

Der N. glossopharyngeus geht gerade abwärts in seinen Visceralbogen. Bei Br_3 nur kurz, hat er bei *Ko* an Länge gewonnen und sein unteres Ende erscheint hier bereits gekrümmt, entsprechend der Dislocation, die der ganze Visceralbogen erfahren hat. Bemerkens-

werth ist die frühzeitige Verbindung des Ganglion petrosum mit dem G. nodosum durch einen schrägen Anastomosenzweig.

Der N. vagus ist sowohl bei Br_3, als bei *Ko* der längste von den Gehirnnerven. Gestreckten Verlaufs geht er hinter dem vierten Visceralbogen herab, diesem den N. laryngeus superior zusendend. Auch der N. laryngeus inferior ist schon bei Br_3 zu erkennen. Der Stamm des N. vagus wird bei seinem Eintritt in den Rumpf durch die mächtige Jugularvene medialwärts gedrängt, und er gelangt nun neben die Speiseröhre und hinter das Vorhofsgebiet des Herzens.

Der N. accessorius erscheint als ein abgeplatteter, anfangs neben dem oberen Rückenmarkstheil und dem Gehirn herlaufender Stamm, dem von der Seitenkante des Medullarrohres aus zahlreiche Wurzeln zugeführt werden. Letztere schliessen sich, wie dies schon oben hervorgehoben wurde, den motorischen Vaguswurzeln unmittelbar an. Das Verhalten des Accessorius zum Vagusstamm ist das bekannte: während der vordere Theil desselben in den absteigenden Theil des Vagus übergeht, vereinigt sich der Rest zu einem selbstständigen Ast, dem Ramus externus N. accessorii.

Eine sehr lange Kette von Ursprungsbündeln sammelt sich zum N. hypoglossus. Die hintersten kommen von der einspringenden Ecke der Nackenbeuge, d. h. von der unteren Gehirngrenze, die vordersten reichen noch bis in das Glossopharyngeusgebiet. Der Nerv wendet sich lateralwärts und nach vorn, indem er auf eine Strecke weit das eigentliche Kopfgebiet verlässt, den Sinus praecervicalis von hinten und von unten her umgreifend. Der Hypoglossusstamm kreuzt den Vagus unterhalb des Ganglion nodosum, und etwas unterhalb der Kreuzungsstelle geht, in einer dem Vagusstamm parallelen Richtung, der Ramus descendens ab, welcher lateralwärts von der Jugularvene seinen Weg nimmt.

Rumpfnerven. Im Allgemeinen entsendet jedes von den Rumpfganglien ausser der centralwärts gerichteten Wurzel einen in die Rumpfwand eintretenden dicken Nervenstamm. Eine Ausnahme hiervon macht das alleroberste Halsganglion, das Froriep'sche Ganglion, wie ich es nach seinem Entdecker nennen will. Dieses in der verlängerten Richtung der übrigen Halsganglien unmittelbar neben der Nackenbeuge des Medullarrohres liegende Gebilde entsendet, soweit

ich ersehen kann, weder Stamm noch Wurzelfasern[1]. Ich spreche mich darüber etwas bedingt aus, weil das Ganglion dem Verlaufe der hintern Accessoriusfasern angelagert erscheint. So unwahrscheinlich es mir ist, dass es mit diesen Beziehungen unterhält, so wage ich doch nicht, dies absolut zu verneinen. Ich sehe keinen Grund, dieses abortive Ganglion dem Hypoglossus zuzutheilen, eher noch dürfte man es als Ganglion des Accessorius bezeichnen. Am richtigsten aber ist es, wenn man dasselbe mit keinem der Kopfnerven in Beziehung setzt, sondern es kurzweg den Halsganglien zuzählt, deren Reihe es sich unmittelbar anschliesst. Ausser dem FRORIEP'schen Ganglion scheinen auch die unteren Coccygealganglien zu abortiren, insoweit sie überhaupt zur besonderen Ausbildung gelangen.

Die Nervenbildung geht nicht in der ganzen Ausdehnung des Körpers gleichzeitig und gleich rasch vor sich. Schon in Betreff der Kopfnerven bemerkt man ein ausgesprochenes Vorauseilen von Hypoglossus, Accessorius und Vagus vor den Nn. Facialis, Trigeminus und vor dem N. olfactorius. Am Rumpf sind es die Halsnerven, welche in der Entwickelung voraus sind, und so finden wir auch den Plexus brachialis früher angelegt, als den Plexus lumbosacralis. Es stimmt dieser Gang der Nervenentwickelung mit der übrigen zeitlichen Entwickelungsfolge des Körpers überein, da ja in der Nackengegend auch das Medullarrohr zuerst sich schliesst und die Urwirbel zuerst auftreten.

Im Allgemeinen sind die Nervenstämme zur Zeit ihres ersten Auftretens senkrecht auf die Axe des Medullarrohres orientirt, d. h. sie besitzen dieselbe Orientirung, wie die Ganglien, aus denen sie kommen, bez. an denen sie vorbeitreten. Am reinsten tritt dies Verhalten von Anfang ab bei den Dorsalnerven hervor, während bei den Hals- und bei den Lumbosacralnerven schon auf der Stufe von Br_3 eine theilweise Schrägstellung der Stämme vorhanden ist. Bei den Verschiebungen, die die Theile durch das ungleiche Wachsthum der verschiedenen Zonen erfahren, ändert sich auch die relative Stellung der Nervenstämme. So wird durch die Emportreibung des Nackentheiles des Medullarrohres die Richtung sämmtlicher oberen Hals-

1) Das Ganglion ist auch in Fig. 62 der Anat. menschl. Embr. III, S. 89 eingezeichnet, ohne indessen im Text erwähnt zu sein.

nerven steiler denn zuvor, ein Verhältniss, das bei Vergleichung der Figuren *Br*₃ und *Ko* sofort in die Augen fällt. Ebenso erscheint es unverkennbar, dass die bei Abgliederung der Extremitäten eintretende Zusammenziehung ihres Wurzelgebietes eine Convergenz der in sie eintretenden Stämme mit sich bringt.

Innerhalb eines Nervenstammes verlaufen zwar die Fasern longitudinal, ohne indessen absoluten Parallelismus inne zu halten. Schon der Umstand, dass ja die Ganglien dicker sind, denn die abgehenden Stämme, bedingt es, dass die Fasern etwas convergent in die letzteren eintreten, und da die Fasern innerhalb des Stammes lose beisammenliegen, so ist ihnen die Möglichkeit geboten, sich stellenweise auch in ihren Richtungen zu verschränken. Das Bild, das ein längsgetroffener Nervenstamm gewährt, zeigt die Axencylinder zu kleinen Büscheln zusammengeordnet, die einander bald näher treten, bald sich von einander entfernen, und die auch mannigfach sich überlagern und durchkreuzen. Bei den Extremitätennerven zur Zeit ihres frühesten Auftretens laufen die kurzen Stümpfe pinselförmig aus, wie dies Taf. II, Fig. 4 für die Nerven der unteren Extremitäten von Embryo Br_3 zeigt.

Mit dem büschelförmigen Auseinanderweichen der Stümpfe der Extremitätennerven ist die erste Einleitung zur Geflechtbildung getroffen, denn es ist klar, dass durch die Begegnung benachbarter Büschel Stammesanastomosen entstehen können. Weitere Bedingungen für die Geflechtbildung sind aber da gegeben, wo primär oder secundär eine Convergenz der hervorwachsenden Stämme vorhanden ist. Die Verschiebungen in der Hals- und in der Beckengegend liefern hierbei eine Reihe von besonderen Motiven. Vor allem sieht man, wie die beim Hervorsprossen der beiderseitigen Stämme gekreuzte Richtung der hinteren Kopf- und der oberen Halsnerven die Möglichkeit zahlreicher Begegnungen und Anastomosenbildungen zur Folge hat.

Auf Einzelheiten eingehend, so finden wir bei Embryo Br_3 erst die Anfänge des Hals- und des Armgeflechtes, während bei *Ko* das System der Verästelungen in seinen Grundzügen angelegt ist. Von den schräg nach abwärts steigenden, unten sich anastomosirenden Stämmen des Plexus cervicalis gehen nach vorn eine Reihe von Zweigen ab, unter denen sich nach der Abgangsweise der N. occi-

pitalis minor von 1 und 2, die Nn. auricularis magnus und cervicalis superficialis von 2 und 3 kommend, sowie die Nn. supraclaviculares und der N. phrenicus sicher bestimmen lassen. Der N. phrenicus steigt anfangs, am Plexus brachialis vorbei, steil herab und tritt dann in die Wand der Brusthöhle ein. Hier liegt er in einer kleinen gegen die Höhlenlichtung hervortretenden Leiste unmittelbar hinter der Vena cava superior[1]). Wenn einmal die Vene nebst ihrem Gekröse den Organen des Mittelraumes sich angeschlossen hat, liegt der Nerv, wie dies FR. SCHMIDT erkannt hat, innerhalb der Membrana pleurocardiaca.

Am Plexus brachialis betheiligen sich die bekannten fünf Stämme. Das Wurzelgebiet der Extremität, d. h. die Fläche, die man bei flacher Abtragung der letzteren vom Rumpf erhalten würde, ist an den Figuren punktirt eingetragen. Man sieht, dass dasselbe dorsalwärts den drei unteren zum Geflecht gehörigen Ganglien sehr nahe rückt; das Ganglion des sechsten Halsnerven liegt noch im gleichen Niveau, aber durch einen Zwischenraum davon getrennt, und das fünfte Halsganglion steht auch bei Br_3 höher denn die Extremitätenwurzel. Dem entspricht nun auch das Verhalten der Stämme. Der fünfte geht der Hauptsache nach noch an der Extremität vorbei, daneben ist er aber durch gegenseitigen Faseraustausch mit seinem Nachbarn, dem sechsten Nerven verbunden. Durch die Verbindung von cerv. 5, 6 und 7 einerseits, von cerv. 8 und dors. 1 andererseits und durch intermediäre Verbindung der verschiedenen Wurzeln bilden sich die drei grosssen Stränge des Plexus brachialis, aus denen späterhin die langen in die Extremität eintretenden Aeste hervorgehen. Von diesen drei Strängen liegt der obere, bei der Bildung des Medianus und des Musculo cutaneus betheiligt, in der Flucht des sechsten Halsnerven, und er bekommt ausserdem Zuschuss vom fünften und vom siebenten. Der folgende Strang, aus dem die Nn. axillaris und radialis hervorzugehen haben, liegt in der Flucht des siebenten und er bekommt Zuschuss vom sechsten und achten Halsnerven, und der untere Strang endlich, aus dem die zweite Hälfte des Medianus, der N. ulnaris und die Cutanei

1) Diese Leiste, deren Bedeutung mir früher viel zu denken gegeben hat, findet sich u. a. abgebildet in der Anat. menschl. Embr. Taf. II, Fig. 38—41 und Taf. V, Fig. 69 und 70. In Betreff des Verhalten der Vene vergl. III, S. 145—147.

sich bilden müssen, geht in bekannter Weise aus dem Rest des achten Halsnerven und aus dem ersten Brustnerven hervor. Der zweite und der dritte Brustnerv entsenden ein jeder in sehr deutlicher Weise einen der Extremität zustrebenden R. intercosto-humeralis.

Ueber die nun folgenden Dorsalnerven ist nicht viel mitzutheilen. Dieselben sind anfangs nur kurz und sie erreichen bei Embryo Br_3 nur das Randgebiet der Leibeshöhle, ohne in die eigentliche Brust- und Bauchwand einzutreten. Später dringen sie nach vorn vor, indem sie in Bogenlinien den Bauch umgreifen.

Der Plexus lumbosacralis ist bei Br_3 noch nicht vorhanden, wogegen er bei *Ko* in seinen Hauptstämmen vorliegt. Vom ersten Lumbalnerven aus gehen zwei, und von seiner Verbindung mit dem zweiten ein fernerer Ast in die Bauchwand, die auf eine grössere Strecke weit verfolgbar sind. Es sind diese als die Nn. ileohypogastricus, ileoinguinalis und genitocruralis zu deuten. Dieselben verlaufen durchweg ausserhalb des Wurzelfeldes der Extremität, wogegen der nun folgende aus den Nn. lumbales 2 und 3 kommende Ast bereits die Extremität erreicht. Es ist dies der N. cutaneus externus. Die nächste Anastomose zwischen 2, 3 und 4 liefert den N. obturatorius und den N. cruralis, von denen jener dem ventralen Rande des Wurzelgebietes sich zuwendet. Nun folgt in breiter Ausdehnung, von den Nn. lumbales 4 und 5 und sacralis 1 und 2 kommend und theilweise noch mit 3 verbunden, der Plexus ischiadicus. Ein fernerer, von dem zweiten und dritten Sacralnerven gebildeter Ast liegt schon jenseits von der Extremitätenwurzel, es ist der N. pudendus communis. Die nun folgenden Stämmchen sind auch bei *Ko* ausnehmend kurz und die Segmente, welche jenseits des fünften Sacralnerven gezeichnet sind, sind überhaupt nicht mehr als Ganglien, sondern als Urwirbel erkennbar gewesen.

In Betreff der Innervationsverhältnisse der Extremitäten und des Rumpfes hatte ich vor einigen Jahren eine Anzahl von Folgerungen an die Aussenbetrachtung von Embryonen angeknüpft[2], wofür nunmehr die Profilfigur von *Ko* die thatsächliche Bestätigung liefert. Es

1) l. c. pag. 169 und Taf. V, Fig. 3.

2) Anat. menschl. Embr. I, S. 18 und 19.

ist damals darauf hingewiesen worden, wie die Innervation der oberen und der unteren Extremität genau der primitiven Stellung entspricht. Es wurde ferner gezeigt, wie durch die Krümmung des embryonalen Leibes ein strahliges Zusammenlaufen der auswachsenden Nervenbahnen nach der oberen Brustwand und nach der Dammgegend hin bedingt wird und wie in diesen Bezirken Nerven, von ziemlich entlegenen Ausgangspunkten herkommend, sich begegnen, an der Brust die Nerven vom 3. und 4. Hals- mit denen vom 2. und 3. Brustnerven, am Damm diejenigen von oberen Lumbal- mit solchen von mittleren und unteren Sacralnerven. Dabei kam noch das eigenthümliche Verhalten zur Sprache, dass die Extremitäten die Nerven ihres Bezirkes abfangen und von einem weiteren ventralwärts gerichteten Vordringen abhalten. Die Versorgung der ventralwärts von der Extremitätenwurzel liegenden Gebiete fällt daher solchen Nerven zu, die von oben oder von unten her die Extremität umgangen haben. Diese und ähnliche Verhältnisse sind meines Erachtens nunmehr mit Hülfe der Figur klar zu übersehen.

Was die Nn. dorsales der Rumpfnerven betrifft, so sind diese, wie ich schon bei früherem Anlass beschrieben und abgebildet habe, sehr zeitig zu erkennen als Faserstränge, welche in den Raum zwischen dem Ganglion und dem ihn bedeckenden Urwirbel eintreten. Den N. sympathicus habe ich von der diesmaligen Behandlung ausgeschlossen, indem derselbe eine gesonderte Bearbeitung verlangt. Auf den einen Punkt darf ich indessen hier hinweisen, dass für ihn in besonderem Maasse jene Bedingungen zutreffen, die wir oben in Hinsicht der Plexusbildung hervorgehoben haben, das Aufeinandertreffen von Faserzügen, die in gekreuzter Richtung auswachsen. Seine Längsbahn kreuzt die Bahnen sämmtlicher Spinalnerven, seine Zweigbahnen diejenigen von zahlreichen cerebrospinalen Zweigen.

Die Ausbreitungsweise der Nervenstämme.

Kurz nach ihrem Hervortreten aus dem Medullarrohre oder aus den Ganglien haben die Nervenstämme, auch wenn sie späterhin verwickelte Bahnen befolgen, einen gestreckten Verlauf. Demzufolge gelangen sie auch zunächst zu solchen Theilen, die in der geraden Richtung ihres Auswachsens gelegen sind. Sehr auffällig ist dies zu-

nächst bei den Augenmuskelnerven, die alle drei auf längere Strecken hin beinahe wie mit dem Lineal gezogen erscheinen, und die schliesslich in der Nähe ihrer Endbezirke unter einander und mit dem ersten Trigeminusast sich durchkreuzen. Auch bei den drei Aesten des N. trigeminus, ferner beim N. facialis und beim N. glossopharyngeus ist die Richtung von Anfang ab gestreckt und es ändert sich dies Verhalten erst infolge der Umgestaltung der Visceralbogen, die die Nervenstämme umschliessen[1]). Einen auf längere Ausdehnung gestreckten Verlauf zeigt ferner der N. vagus, und gerade bei diesem Nerven sind auch die entlegneren Ausbreitungsbezirke, Herz, Oesophagus und Magen in der Verlängerung der ursprünglichen Richtung befindlich. Man ist im Allgemeinen geneigt, die Innervation dieser Theile durch den Vagus dadurch zu erklären, dass dieselben ursprünglich dem Kopf angehört oder doch demselben nahe gelegen haben. Sie sollen dann bei ihrer Dislocation den Nerven mit sich genommen haben. Diese Auffassung, die ich selber lange Zeit vertreten habe, ist bei genauerer Ueberlegung nicht stichhaltig. Der Nerv geht mit der Hauptmasse seiner Fasern direct in den Rumpf hinein und er versieht solche Theile, die diesem von Anbeginn ab angehört haben. Die Trachea, das Speiserohr, der Magen und ebenso der Vorhof des Herzens haben niemals zum Kopf gehört. Die Grenze des embryonalen Kopfgebietes ist im visceralen System durch den Rand des vierten Bogens bezeichnet und, auf die bleibenden Organe bezogen, schneidet dieselbe zwischen dem Schild- und dem Ringknorpel des Kehlkopfes durch.

Von ihrer ursprünglich gestreckten Bahn können die Nerven durch verschiedene Einflüsse abgelenkt werden. Dahin gehören, wie dies bereits oben erwähnt worden ist, Verbiegungen der Theile, innerhalb deren ein Nerv gelegen ist. In dieser Weise bekommen durch Verbiegung des Unterkieferbogens, des Hyoidbogens und des dritten Visceralbogens die ursprünglich gestreckten Nn. mandibularis, facialis und glossopharyngeus einen gekrümmten Verlauf. Indem aber das Ende also verbogener Nerven an der Umlagerung Theil nimmt, wird auch die Richtung des Auswachsens eine andere, als sie ursprünglich gewesen war. Hierfür giebt besonders der N. fa-

1) l. c. III, pag. 88.

cialis ein schlagendes Beispiel, indem seine Zweige bis zur Stirn emporsteigen. Durch Verdrängung seitens von Nachbartheilen können Nervenstämme gleichfalls aus ihrer gestreckten Lage gebracht werden. Dies gilt z. B. für den N. laryngeus inferior, der durch den in die Brust herabsteigenden untersten Aortenbogen mitgenommen und im Laufe der fünften Woche zu einer langen Schleife umgewandelt wird, während er am Schlusse der vierten (bei *Br*$_3$ und selbst bei *Ko*) noch kein recurrirender Nerv ist.

Ein Nerv kann bei seiner Ausbreitung auf Widerstände stossen, und zwar können in der Hinsicht Blutgefässe, Knorpel oder überhaupt verdichtete Stellen bestimmend wirken. Schon oben wurde hervorgehoben, wie die Vena jugularis den Verlauf des N. vagus etwas medianwärts ablenkt. Auf den N. hypoglossus hat dieses Gefäss gleichfalls einen ablenkenden Einfluss. Zu der Zeit, da die Nerven eben aufzutreten beginnen, sind noch keine eigentlichen Knorpel da, höchstens solche Gewebsverdichtungen, welche wir mit Hasse als Vorknorpel bezeichnen können. Aber die knorpeligen Skelettanlagen entwickeln sich gleichzeitig mit den Nervenstämmen, und sie überholen diese besonders in den peripherischen Bezirken, so dass die Nerven bei ihrem weiteren Vordringen allenthalben deren Widerständen begegnen. Es kommt nun zu jenen spiraligen Umwachsungen, wie wir sie bei verschiedenen Extremitätennerven kennen, oder zu anderweitigen Bahnablenkungen.

Vorhandene Widerstände kommen nicht allein für die Ablenkung der Stämme, sondern auch für deren Theilung in Betracht. Indem ein Stamm auf einen Widerstand, z. B. auf einen Knorpelstreifen stösst, werden verschiedene Fasern in verschiedener Richtung abgelenkt und der Stamm theilt sich. So gabeln sich z. B. der N. mandibularis und der N. lingualis an der Grenze des Meckel'schen Knorpels. Auch kleinere Gefässe, sowie Epithelialgebilde können unzweifelhaft in gleicher Weise wirken. Indessen sind nicht alle Fälle von Stammtheilung auf solche äussere Beeinflussung zurückzuführen. Es kann eine Divergenz von Fasern schon innerhalb eines Stammes eingeleitet sein, und besonders kann innerhalb eines Ganglions die Lagerung der Zellen es mit sich bringen, dass die Fasern nicht alle in derselben Richtung austreten. Die Trennung der drei Trigeminusäste ist offenbar auf die primären Verhältnisse im Ganglion zurückführbar und Aehnliches gilt vom N. acustico-facialis.

Für das Auswachsen centraler Nervenfasern sind ähnliche Grundsätze als massgebend zu erachten. Auch hier wachsen die Fasern voraussichtlich in der Richtung ihres Endstückes weiter, bis ihnen der Weg durch einen Widerstand verlegt wird, oder bis ihr Wachsthum aus inneren Ursachen stille steht. Die longitudinale Umbiegung der sensibeln Wurzeln an der Oberfläche vom Rückenmark und Gehirn ist darauf zurückzuführen, dass die hier anlangenden Fasern in derselben Richtung nicht weiter vordringen können und daher aus ihr abgelenkt werden. Im Innern des Marks bildet das Myelospongium von früh ab ein System von Gängen, die für die Ausbreitungsweise der Fasern von allergrösster Bedeutung sein müssen. Wenn dies System schon auf die in früher Zeit sich entwickelnden Axencylinder leitenden Einfluss hat, so wird es fast noch bedeutsamer sein für die weit später entstehenden verzweigten Ausläufer der Nervenzellen. Gerade wegen ihres späten Erscheinens und wegen der grossentheils erfolgten Raumerfüllung finden diese von vornherein für eine geradlinige Ausbreitung ungünstige Bedingungen, ja, man ist versucht, die Verzweigungen selber nicht sowohl auf innere, in den Zellen wirksame Bedingungen, als auf äussere im Ausbreitungsgebiet liegende Momente zurückzuführen, und dies liegt um so näher, da ja auch die in ihrem übrigen Verlauf ungetheilten sensibeln Fasern nach ihrem Eindringen ins Mark laut den übereinstimmenden Angaben der competenten Forscher in getrennte Fibrillen auseinanderweichen.

Die zuletzt ausgeführten Erörterungen weisen darauf hin, ein wie grosses Gewicht bei der Entwickelung des centralen und des peripherischen Nervensystems auf das zeitliche Ineinandergreifen der einzelnen Vorgänge zu legen ist. Derselbe Grundvorgang führt zu verschiedenen Folgen, je nachdem er früher oder später eintritt: eine auswachsende Faser z. B. findet andere Bedingungen der Ausbreitung, wenn sie in weiches oder wenn sie in ein bereits verdichtetes Gewebe eindringt. Bis jetzt können wir im Ganzen und Grossen folgende zeitliche Reihenfolge von Entwickelungsvorgängen aufstellen:

1) Bildung eines Myelospongiums;
2) Hervortreten von Axencylindern aus den Zellen der Mantelschicht;
3) Bildung der ersten das Mark verlassenden Nervenstämme;

4) Entwickelung von Skelettanlagen;
5) allmähliches Vordringen der Nervenstämme bis zur Peripherie;
6) Entwickelung verzweigter Ausläufer innerhalb der Centralorgane.

In dieser Aufzählung, die natürlich nur eine sehr grobe Idee von dem thatsächlichen Ineinandergreifen der Verhältnisse geben kann, ist der Ungleichzeitigkeit noch keine Rechnung getragen, welche für die verschiedenen Abschnitte des Medullarrohres besteht, und deren schon oben (S. [21]) Erwähnung geschehen ist. Während die Medulla oblongata und das Halsmark vorauseilen, bleiben die Hemisphären und die untersten Rückenmarksabschnitte lange zurück, und auch diese Eigenthümlichkeiten müssen für die endgültige Organisation des Apparates von Bedeutung sein.

Ich kann nicht umhin mit einigen allgemeinen Betrachtungen meinen Aufsatz zu schliessen.

Aus der gegebenen Darstellung geht hervor, dass beim Aufbau unseres Nervensystems Principien allereinfachster Art in Betracht kommen. Wir können uns in der That kaum einen einfacheren Vorgang denken, als dass von einer Zelle aus ein Faden so lange weiter wächst, bis er schliesslich auf ein Endorgan stösst, oder bis sein Weiterwachsen überhaupt aufhört. Wir können uns nichts anscheinend Gröberes denken, als dass bei diesem Auswachsen der Fasern äussere im Wege liegende Hemmnisse, Gefässe, Knorpel und die im Gehirn vorhandenen Gerüstfasern die Richtung beeinflussen und damit das endgiltige Auslaufen der Fasern bestimmen. Nichts Einfacheres giebt es ferner, als die Thatsache, dass wenn verschiedene Bahnen unter einen Winkel zusammenstossen, sie theils ineinanderfliessen, theils sich durchkreuzen.

Bei aller dieser Einfachheit der Grundvorgänge und bei aller dieser Bestimmbarkeit derselben durch scheinbare Zufälligkeiten erscheint als Endergebniss des Gesammtvorganges der Aufbau eines Systems, das durch die Complication seiner inneren Gliederung aller unserer zu seiner endgiltigen Entwirrung unternommener Bemühungen zu spotten scheint, eines Systems, dessen Leistungen auf das Allerfeinste abgemessen und in einander gepasst erscheinen und das überhaupt erst unseren Leib zu einem beseelten macht.

Und zu allem übrigen Wunderbaren, was dies System darbietet,

kommt hinzu, dass dasselbe nur zum allerkleinsten Theil unser individuelles Besitzthum ist, dass dasselbe Eigenschaften unserer Eltern und unserer Voreltern bis in weitest zurückliegende Generationen reproducirt.

Nachdem die Forschungen des verflossenen Jahrzehnts den directen Uebergang elterlicher Kernstoffe in den Keim des neu entstehenden Wesens dargethan haben, hat man vielfach geglaubt, in der Natur dieser Stoffe die Lösung des Erblichkeitsräthsels zu finden, wie denn überhaupt in neuester Zeit die rein stofflichen Zeugungstheorien wieder erheblich in den Vordergrund getreten sind. Die Natur der Zeugungsstoffe ist sicherlich nicht gleichgiltig; aber eben so sicher scheint mir, dass alle unsere Bemühungen, in Stoffen allein diese Lösung zu finden, scheitern müssen. Nicht der Stoff als solcher, sondern die am Stoff ablaufenden Vorgänge sind das Wesentliche. Als ein grosser periodischer Process stellt sich das Leben dar, als ein Process, dessen einzelne Vorgänge, sie mögen so einfach oder so complicirt sein, als sie wollen, in räumlich und zeitlich streng geordneter Weise ineinandergreifen, und dabei von einem Gliede der Generation zum anderen in derselben Reihenfolge sich reproduciren. Das im Wesen der periodischen Function begründete gesetzmässige Ineinandergreifen der zahllosen Einzelnprocesse lässt eine jede Entwickelungssufe als Ergebniss der vorangegangenen, sowie als Bedingung der nachfolgenden Stufen erscheinen, unserem beschauenden Geiste aber gewährt es den Eindruck jener inneren Ordnung, für welche wohl auch heute noch die alte Leibniz'sche Bezeichnung einer prästabilirten Harmonie als die zutreffendste sich erweist.

Tafelerklärung.

Tafel I.

Fig. 1. Dem Gehirnprofil eingezeichnete motorische Nervenkerne und aufsteigende sensible Wurzeln vom Embryo *Ko* (Nl. 10,2 mm). Vergr. ca. 20 des Originals. Die Austrittsstellen der Wurzeln sind durch helle Ovale angedeutet. Bei den Nn. accessorius und hypoglossus ist die Zahl dieser Austrittsstellen nur approximativ innegehalten. Die Ausdehnung der Gehörblase ist durch eine punktirte Linie bezeichnet, ebenso den Weg der absteigenden Trigeminuswurzel, welche bei dem Embryo nicht mit Sicherheit erkannt werden konnte.

Fig. 2. Motorische Nervenkerne des etwas älteren Embryo *Ha* (Nl. 10,5 mm). Vergr. ca. 18 der Schnitte. Die Figur ist deshalb mitgetheilt, weil in diesem Fall eine absteigende Trigeminuswurzel (*Rd*) erkennbar gewesen ist.

Tafel II.

Fig. 3. Nervensystem vom Embryo *Ko*. Nl. 10,2 mm. Vergrösserung auf das Original bezogen ca. 20fach. Construirt nach den photographischen Aufnahmen der Schnitte. Die Nerven sind im Allgemeinen soweit gezeichnet, als sie vorhanden waren; wo dies nicht der Fall ist, ist eine Schnittfläche angedeutet (s. Text S. [40]). Die Kopfnerven bez. deren Ganglien sind mit römischen, die Rückenmarksnerven mit arabischen Ordnungszahlen versehen.

G.c.	Ganglion ciliare.	*F.*	Froriep'sches Ganglion.
G.G.	- Gasseri, darunter die Portio minor trigemini.	*C.*	Chorda tympani, die Grube des äusseren Ohres kreuzend.
G.r.	- rhinicum.	*l.*	N. laryngeus superior.
G.o.	- oticum.	*l.i.*	- - inferior.
G.v.	- vestibuli. Dasselbe deckt das G. cochleae und die obere Hälfte des G. geniculi, sowie das obere Ende des N. facialis zu.	*S.*	Sinus praecervicalis.
		R.d.	Ramus descendens hypoglossi.
		p.	N. phrenicus.
		i.	Nn. intercosto-humerales vom zweiten u. dritten Brustnerven.
G.b.	Gehörblase mit Recessus vestibuli und cochleae. Das Ehrenritter'sche Ganglion ist z. Th. noch von der Gehörblase überlagert.	*ih.*	N. ileohypogastricus.
		ii.	- ileoinguinalis.
		gc.	- genitocruralis.
		c.e.	- cutaneus externus.
		cr.	- cruralis.
G.p.	Ganglion petrosum, darüber die Anastomose mit dem G. jugulare.	*o.*	- obturatorius.
		is.	- ischiadicus.
G.j.	Ganglion jugulare.	*p.c.*	- pudendus communis.
G.n.	- nodosum.	*S.*	Sinus praecervicalis.

Herz, Leber, Magen und Darm sind leicht angedeutet, die Wurzeln der Extremitäten durch punktirte Linien angegeben.

Fig. 4. Peripherisches Nervensystem vom Embryo Br_3 (Nl. 6,9 mm). Vergr. auf das Original bezogen ca. 25fach. Nach den photographischen Schnittaufnahmen construirt. Bezeichnungen wie für Fig. 3.

Im Grunde des Sinus praecervicalis (*S.*) sind der dritte und vierte Visceralbogen sichtbar. Von dem dahinter liegenden G. nodosum geht der N. laryngeus superior ab, etwas tiefer sieht man den vom Vagusstamm sich ablösenden N. laryngeus inferior.

Auch bei diesen Figuren sind, überall da, wo keine Schnittflächen angegeben sind, die Nerven soweit gezeichnet, als sie überhaupt nachweisbar waren. Die Extremitätenwurzel ist oben und unten durch eine punktirte Linie umgrenzt.

Bei den Nn. trigeminus, acusticus, glossopharyngeus und vagus ist die Austrittsstelle der Wurzeln aus dem Gehirn durch ein helles Oval angegeben. Die kurzen Stümpfe, jenseits davon, sind die inneren, bez. die aufsteigenden Wurzeln der betreffenden Nerven, die zu der Zeit noch sehr kurz sind.

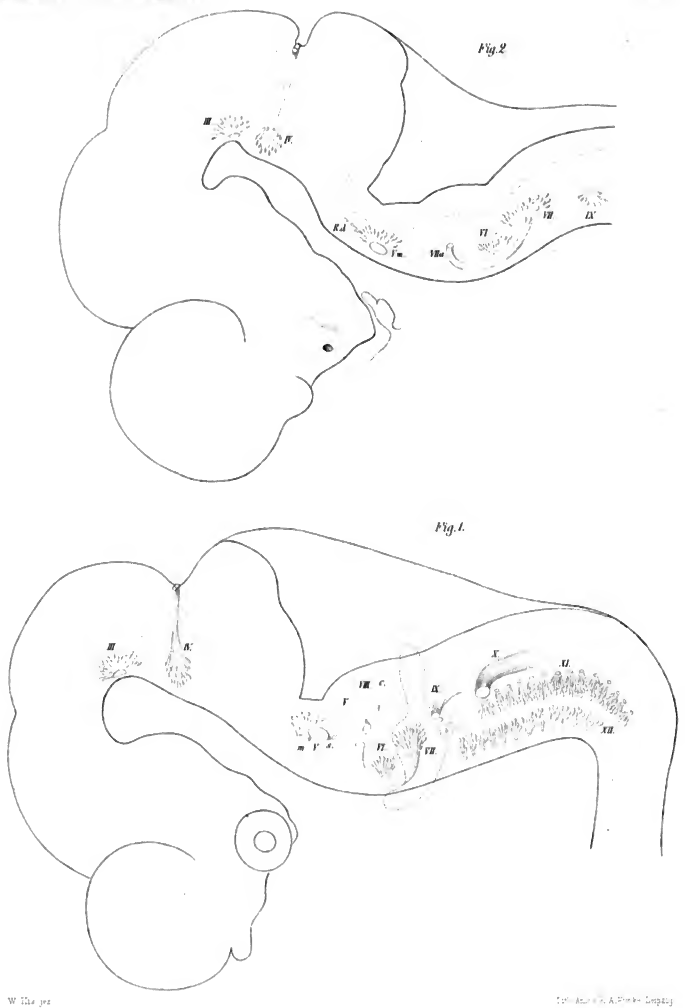

Fig. 2
III
IV.
Fig. 1.
III
IV.
X.
XI.
XII.
IX
VII.
VI.
W. His gez.

Fig. 4.

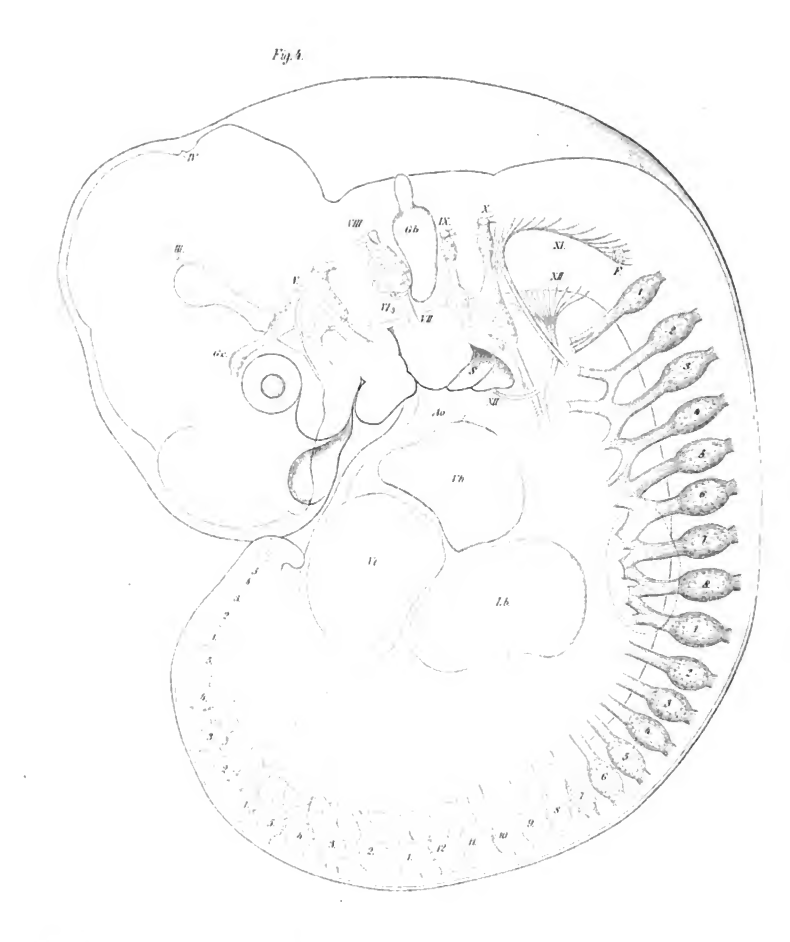




Fig. 3.

ÜBER DEN ANTHEIL
DEN DIE EINZELNEN
GELENKE DES SCHULTERGÜRTELS
AN DER BEWEGLICHKEIT
DES MENSCHLICHEN HUMERUS
HABEN.

VON

W. BRAUNE,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

UND

O. FISCHER.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VIII.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1888.

Von den Verfassern übergeben den 14. Februar 1888.
Der Abdruck vollendet den 31. März 1888.

ÜBER DEN ANTHEIL

DEN DIE EINZELNEN

GELENKE DES SCHULTERGÜRTELS

AN DER BEWEGLICHKEIT

DES MENSCHLICHEN HUMERUS

HABEN.

VON

W. BRAUNE UND O. FISCHER.

MIT DREI TAFELN.

Der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist die Beweglichkeit des menschlichen Humerus.

Der Humerus ist ähnlich wie der Oberschenkel mit seinem Kopfe in eine hohlkuglige Pfanne eingelenkt, er gewinnt aber dadurch eine bedeutend grössere Beweglichkeit als der Oberschenkel, dass in den beweglichen Schultergürtel noch zwei Gelenke eingeschaltet sind, welche dem starren Beckengürtel fehlen.

Im Schultergelenk selbst besitzt der Humerus drei Grade der Freiheit, ebenso wie der Oberschenkel im Hüftgelenk. Es fragt sich nun aber, welcher Einfluss auf dieses Verhältniss ausgeübt wird durch das hinzutretende Acromio-Claviculargelenk und das Sterno-Claviculargelenk.

Die Betheiligung des Schlüsselbeingelenkes und Acromialgelenkes bei den Bewegungen des Humerus ist zwar von Henke und Meyer eingehend erörtert worden, jedoch hat man noch nicht den Einfluss der beiden Gelenke auf die Excursionen des Humerus quantitativ bestimmt. Unseres Wissens hat man bisher noch keine Messungen der Humerusbewegungen vorgenommen, mit successiver Ausschaltung der einzelnen Gelenke. Die vorliegende Arbeit will nicht eine kinematische Untersuchung der einzelnen Gelenke liefern, sondern beschäftigt sich mit dem Schultergelenksystem als Ganzes, welches gebildet wird vom Sterno-Claviculargelenk, vom Acromialgelenk und vom Scapulo-Humeralgelenk, und untersucht den Antheil der einzelnen Gelenke an den Flexionsgrössen des Humerus durch successive Ausschaltung der einzelnen Gelenkabschnitte. Wie schon in einer früheren Abhandlung von uns

ausdrücklich bemerkt worden ist, wird unter dem Ausdruck Flexion ganz allgemein verstanden: Die Bewegung des Humerus von einer normirten Ausgangsstellung aus in irgend einer Bewegungsebene, so dass also sogenannte Abduction und Adduction mit unter diesen Begriff fallen. Die Rotation des Humerus um seine Längsaxe (Rollung) ist hierin nicht mit inbegriffen; sie ist nicht Gegenstand unserer Untersuchung gewesen.

Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt: Es wurde von einem Leichnam durch einen Querschnitt die obere Hälfte mit den daran befindlichen oberen Extremitäten abgelöst und darauf der Kopf durch einen Querschnitt des Halses abgetrennt. Beide Schnitte wurden oberhalb und unterhalb des Schulterblattes durchgeführt, so dass dasselbe gar nicht frei gelegt ward und völlig intact blieb. Darauf wurden auf beiden Seiten in gleicher Höhe, etwa in der Mitte des Humerus, die Arme amputirt, so dass man in den Humerus wie bei den früheren Versuchen vorn spitz auslaufende Holznadeln fest einfügen konnte. Es wurde dafür gesorgt, dass die Nadeln genau in die Humerusaxe zu liegen kamen und die Spitze der Nadel an beiden Armen ungefähr 200 mm von dem Mittelpunkte des kugligen Gelenkkopfes entfernt war, natürlich soweit dies technisch ausführbar war. Jedenfalls konnte erreicht werden, dass für beide Arme die Entfernung der Nadelspitze vom Mittelpunkte des Humeruskopfes bis zur wünschenswerthen Genauigkeit dieselbe war. Die Weichtheile über den Gelenken mit der darüber liegenden Haut blieben erhalten. Die Haut wurde nur an den Stellen, an denen späterhin Schrauben eingetrieben wurden, entfernt, über den Gelenken selbst blieb sie immer erhalten.

Darauf wurde nach Entfernung der Brusteingeweide der Thoraxraum mit Gyps ausgegossen und das Rumpfstück auf eine dem Querschnitt des Rumpfes angepasste starke Eichenholztafel über der horizontalen Glasplatte unseres Messapparates sicher befestigt, was dadurch ermöglicht ward, dass die horizontale Glasplatte in der Mitte durchbohrt ist. Durch diese Öffnung liess sich also das vierkantige Eichenholzprisma, welches die Holztafel trug, in einem Statif unter der Glastafel sicher fixiren. Es musste ferner aber auch darauf Bedacht genommen werden, die Beweglichkeit des Wirbelsäuleabschnittes auszuschliessen, um nicht Verschiebungen des Humerusende

in unseren Versuch hereinzubringen, die durch die Beweglichkeit der Wirbelsäule erzeugt wurden. Dies wurde dadurch bewerkstelligt, dass an die Holzplatte hinten ein solider Eichenholzstab vertical befestigt wurde, an den sich die einzelnen Wirbel von hinten her sicher anschrauben liessen, und zwar waren die Schrauben so lang, dass sie durch Wirbelbögen und Wirbelkörper noch eine Strecke weit in in den Gypsklotz hereinragten. Das Federn des Eichenholzstabes, der auf dem Querschnitt einem Quadrat von etwa 6 cm Seite entsprach, wurde am oberen Ende durch seitliche Spreizen beseitigt. Damit war allen Anforderungen an Fixirung des Apparats entsprochen.

Bei der Fixirung des Rumpfstückes auf der Holzplatte wurde darauf Bedacht genommen, dass die Mittelpunkte der Humerusköpfe bei senkrecht herabhängenden Armen in gleiche Höhe über der Glasplatte zu liegen kamen, also die sie verbindende Linie eine Horizontale war; und zwar wurde dies dadurch erreicht, dass bei senkrecht herabhängenden Armen die beiden Nadelspitzen in gleiche Höhe über der Glastafel liegen mussten. Auf den Holznadeln wurde in der Entfernung von 100 mm von den Spitzen je ein Punkt markirt, da wegen der Unzugänglichkeit des Humerusmittelpunktes seine Bewegungscurve sich nicht auf die Horizontalebene und Verticalebene projiciren lässt. Wohl aber liessen sich die Nadelspitze und der 100 mm davon entfernte Punkt der Nadel projiciren. Da nun der Punkt 100 mm von der Nadelspitze, und die letztere 200 mm vom Humeruskopfmittelpunkte angebracht war, so lag der Punkt auf der Nadel gerade in der Mitte zwischen Nadelspitze und Centrum des Humeruskopfes, also das Centrum des Humeruskopfes in der Richtung der Verbindungslinie von Nadelspitze und Punkt auf der Nadel gerade in der doppelten Entfernung von der Nadelspitze. Dadurch wird es ermöglicht, die Bewegungscurve des Humerusmittelpunktes zu projiciren. Man hat nur nöthig, die zugehörigen Projectionen der Nadelspitze und des Nadelpunktes durch eine gerade Linie zu verbinden und diese Strecke in derselben Richtung über die Projection des Nadelpunktes hinaus zu verdoppeln. Der Endpunkt dieser doppelten Strecke ist dann die Projection des Mittelpunktes vom Humeruskopf. Die Bewegungen des Humerus wurden durch die Hand des einen Beobachters bis zur jedesmaligen Grenzstellung ausgeführt und die Coordinaten der successiv erreichten

Grenzstellungen gemessen. Es wurden soviel Grenzstellungen benutzt, als nöthig waren, um in den verbindenden Curvenzügen eine möglichst genaue graphische Interpolation für die Zwischenstellungen zu ermöglichen.

Die erste Versuchsreihe wurde an einem Alkoholpräparate vorgenommen, um vor der Hand zu prüfen, ob die Versuche auch praktisch ausführbar wären und brauchbare Resultate lieferten. Der Humerus liess sich in alle Grenzstellungen bringen, und für alle Grenzstellungen liessen sich die Curvenpunkte projiciren; auch zeigten die Curven eine genügende Symmetrie, so dass schon darin ein Beweis für die Verwerthbarkeit der Messungen lag.

Drei Versuchsreihen wurden gemacht. Die erste Versuchsreihe ergab die Flexionsgrössen des Humerus bei Intacthaltung aller drei Gelenke. Bei der zweiten Versuchsreihe war das Sterno-Claviculargelenk ausgeschieden, bei der dritten Versuchsreihe ausserdem noch das Acromialgelenk. Somit ergiebt die erste Curve den Gesammtspielraum für die Bewegungen des Humerus. Die zweite Curve ergiebt den Spielraum für die Bewegungen des Humerus, wenn blos das Scapulo-Humeralgelenk und das Acromialgelenk thätig sind, die dritte Curve den Spielraum im Scapulo-Humeralgelenk allein. Die Differenz der Flexionsgrössen des ersten und zweiten Versuchs ergiebt also den Einfluss, den das Sterno-Claviculargelenk auf die Beweglichkeit des Humerus ausübt, die Differenz der Flexionsgrössen des zweiten und dritten Versuches den Antheil, den das Acromialgelenk an der Beweglichkeit des Humerus hat.

Die Fixirung von Clavikel und später Scapula wurde folgendermassen bewirkt. Die Clavikel wurde durch zwei sehr lange Schrauben (etwa 10 cm lang) in den Gypsblock fest eingeschraubt; dieselben waren möglichst weit von einander, aber doch auch hinreichend entfernt von den Gelenkapparaten angebracht. Bei der Scapula wurden drei Schrauben verwendet. Während der Fixirung wurde in beiden Fällen der Arm in der Normalstellung festgehalten, was deshalb nöthig war, weil alle Flexionsgrössen von der Normalstellung aus gemessen werden sollten. Die Beobachtung der betreffenden Knochen während des Versuchs ergab, dass die Fixirung gelungen war.

Nachdem alles dies an dem Spirituspräparat ausprobirt worden



war, wurde der Versuch an einem ganz frischen, muskelkräftigen männlichen Leichnam (Selbstmörder) angestellt.

Als Ausgangsstellung (Normalstellung) für alle drei Versuchsreihen wurde die genommen, bei welcher der Humerus senkrecht stand, die sich zugleich auch als eine Grenzstellung erwies. Die senkrechte Stellung des Humerus liess sich daran erkennen, dass die Nadelspitze und die Marke auf der Nadel senkrecht übereinander lagen, so dass ihre Horizontalprojectionen zusammenfielen. Von dieser Normalstellung ausgehend wurde der rechte Humerus in seinen Grenzstellungen herumgeführt und dabei von 16 Stellungen die Projectionen der Nadelspitze und der Marke in der bekannten Weise genommen. Dieselben sind in der späteren Tabelle für den rechten Arm und in den zugehörigen Curven auf Tafel I auf der Seite der positiven x-Axe mit den Zahlen 0 bis 16 versehen worden (0 ist die Normalstellung). Der Humerus umschrieb dabei einen geschlossenen Raum, der nur annähernd die Form eines Kegels hatte, weil der Mittelpunkt des Humeruskopfes nicht fest blieb, sondern infolge der gleichzeitigen Bewegung von Scapula und Clavikel seine Lage änderte. Am linken Arm wurden späterhin ausser der Normalstellung 15 Stellungen gemessen, welche auf der Tabelle für den linken Arm und in den Curven auf Tafel I auf der Seite der negativen x-Axe mit den Zahlen 0 bis 15 bezeichnet sind (0 ist die Normalstellung).

Nach Fixirung der Clavikel wurden in gleicher Weise von den Grenzstellungen des Humerus rechts 11 (in der Tabelle und auf Tafel I 17 bis 27) und links 10 (in der Tabelle und auf Tafel I 16 bis 25) zur Projection verwendet. Nachdem ausserdem noch die Scapula fixirt worden war, wurden rechts 10 (28 bis 37) und links 10 (26 bis 35) Grenzstellungen projicirt.

Um die Coordinaten möglichst bequem für die Rechnung zu machen, wurden die gewonnenen Curven, die die Horizontalprojection angaben, so auf ein anderes Millimeterpapier übertragen, dass zunächst die Verbindungslinie der Projectionen der Normalstellungen mit einer stärkeren Linie des Millimeterpapiers zusammenfiel und ferner der Mittelpunkt dieser Verbindungslinie den Kreuzungspunkt dieser einen stärkeren Linie mit einer zweiten zu ihr senkrechten stärkeren Linie des Millimeterpapiers bildete. Die Horizontalprojection wurde für das Coordinatensystem zur xy-Projection und der Kreuzungspunkt

der beiden stärkeren Linien des Millimeterpapiers zum Coordinatenanfang in der xy-Projection gemacht. Als x-Axe wurde die Verbindungslinie der Projectionen der Normalstellungen benutzt und zwar als positive x-Axe der Theil, der vom Coordinatenanfangspunkt aus nach der rechten Extremität und als negative x-Axe infolge dessen der Theil, der vom Coordinatenanfangspunkt nach der linken Extremität zu läuft. Als positive y-Axe wurde die Senkrechte zur x-Axe im Coordinatenanfangspunkt, welche nach vorn gerichtet ist, verwendet. Die xy-Projection ändert sich nicht, wenn der Coordinatenanfangspunkt des räumlichen Coordinatensystems in irgend eine andere Höhe senkrecht über den Coordinatenanfang der xy-Projection verlegt wird. Wir haben ihn in die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Humerusköpfe selbst verlegt, so dass also jetzt von der Mitte dieser Verbindungslinie, d. h. von unserem Anfangspunkt des räumlichen Coordinatensystems aus nach oben die positive z-Axe, nach unten die negative z-Axe, nach vorn die positive y-Axe, nach hinten die negative y-Axe, nach rechts die positive x-Axe und nach links die negative x-Axe läuft.

Die Beziehung unserer Grenzcurven auf dieses Coordinatensystem liess sich ohne Rechnung durch zweckmässige Übertragung der gewonnenen Projectionscurven auf ein anderes Millimeterpapier auch für die xz-Projection erreichen. Nach dieser Übertragung wurden erst die Coordinaten auf dem Millimeterpapier abgelesen. Sie sind in den folgenden Tabellen niedergelegt und die Curven in der xy-Ebene und xz-Ebene finden sich in der Tafel I aufgezeichnet. In den Tabellen sind die Coordinaten der Nadelspitze mit x, y, z, die der Nadelmarke mit x', y', z' bezeichnet worden, die Zahlen bedeuten Millimeter.

Tabelle Ia und Ib. Coordinaten von Punkten der Grenzcurven, wenn alle drei Gelenke bei der Bewegung des Humerus mitbetheiligt sind. Die zugehörigen Curven für die Nadelspitze sind auf Tafel I für den rechten Arm auf der positiven Seite der x-Axe, für den linken Arm auf der negativen Seite der x-Axe aufgezeichnet worden.

Tabelle Ia.

(Rechter Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
0	+ 154,5	+ 0	— 200	+ 154,5	+ 0	— 100
1	+ 152,5	+ 50	— 188	+ 153	+ 28	— 90,5
2	+ 151,5	+ 102	— 166,5	+ 150	+ 58,5	— 79,5
3	+ 115,5	+ 158	— 120,5	+ 131,6	+ 85	— 52
4	+ 92,5	+ 177	— 95	+ 119	+ 98	— 42
5	+ 64,5	+ 188,5	— 67	+ 98	+ 108	— 15
6	+ 44,5	+ 204	+ 30	+ 88,5	+ 144,5	+ 41
7	+ 92	+ 181	+ 108	+ 107,5	+ 86	+ 81
8	+ 130,5	+ 134,5	+ 179,5	+ 121,5	+ 58,5	+ 120
9	+ 155,5	+ 61,5	+ 231	+ 133	+ 12	+ 151,5
10	+ 191,5	+ 22	+ 234,5	+ 154	— 10,5	+ 153
11	+ 228,5	— 9	+ 229,5	+ 166,5	— 26	+ 152,5
12	+ 304,5	— 54,5	+ 142	+ 210	— 45	+ 107
13	+ 320,5	— 82	+ 89	+ 222,5	— 61,5	+ 75
14	+ 296	— 119	— 36	+ 215	— 83,5	+ 7
15	+ 231	— 121	— 137,5	+ 186	— 77,5	— 60
16	+ 181,5	— 73,5	— 188	+ 165	— 39	— 92,5

Tabelle Ib.

(Linker Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
0	— 144,5	0	— 200	— 144,5	0	— 100
1	— 143,5	+ 64	— 200	— 150	+ 32,5	— 100
2	— 126,5	+ 138	— 150	— 143,5	+ 71	— 77,5
3	— 111	+ 170	— 95,5	— 135	+ 88,5	— 52
4	— 94	+ 191	— 63,5	— 124	+ 100	— 29,5
5	— 80	+ 199	— 9	— 117,5	+ 106	+ 3,5
6	— 70,5	+ 206,5	+ 25	— 115,5	+ 112	+ 19,5
7	— 79	+ 204,5	+ 75	— 116,5	+ 112,5	+ 44,5
8	— 93,5	+ 173	+ 120	— 114	+ 81	+ 90
9	— 108,5	+ 140,5	+ 170,5	— 117,5	+ 58,5	+ 113
10	— 175	+ 65	+ 194	— 143,5	+ 12	+ 116,5
11	— 275,5	+ 20,5	+ 148	— 203	— 13,5	+ 87
12	— 321,5	— 20,5	+ 62	— 225	— 35,5	+ 36,5
13	— 296,5	— 96	— 57	— 208,5	— 68,5	— 16
14	— 192,5	— 117	— 175	— 169,5	— 80	— 85
15	— 160,5	— 51,5	— 194,5	— 155,5	— 38	— 98



Tabelle IIa und IIb. Coordinaten von Punkten der Grenzcurven, wenn nach Ausschaltung des Sterno-Claviculargelenks nur das Humerus- und Acromialgelenk functioniren. Die zugehörigen Curven finden sich auf Tafel I.

Tabelle IIa.

(Rechter Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
17	+ 121,5	+ 171,5	— 93	+ 134,5	+ 91	— 38
18	+ 94,5	+ 195,5	— 35	+ 116,5	+ 103	— 6,5
19	+ 104,5	+ 208	+ 20,5	+ 122,5	+ 109	+ 23
20	+ 155	+ 195	+ 95	+ 146,5	+ 100,5	+ 61
21	+ 208	+ 176,5	+ 97	+ 176,5	+ 89	+ 62
22	+ 278,5	+ 128,5	+ 101	+ 211,5	+ 65	+ 62
23	+ 321,5	+ 83	+ 95	+ 235,5	+ 42,5	+ 62
24	+ 344	+ 10,5	+ 96,5	+ 247	+ 25,5	+ 70
25	+ 330,5	— 36	— 83	+ 243	— 15,5	— 38
26	+ 240,5	— 84	— 165	+ 196,5	— 40,5	— 83
27	+ 209,5	— 72,5	— 181,5	+ 178,5	— 34,5	— 93

Tabelle IIb.

(Linker Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
16	— 140	+ 150,5	— 113,5	— 145	+ 67	— 55
17	— 136	+ 171	— 72	— 141,5	+ 78	— 37
18	— 137,5	+ 185,5	+ 5	— 145	+ 86,5	+ 2,5
19	— 147,5	+ 182,5	+ 40	— 148,5	+ 84	+ 25
20	— 169	+ 167	+ 83	— 159	+ 73,5	+ 45
21	— 253,5	+ 96	+ 129	— 196	+ 42	+ 66
22	— 326	+ 28,5	+ 90	— 236	+ 11,5	+ 50
23	— 325,5	— 33,5	— 95	— 235,5	— 22,5	— 50
24	— 278	— 65	— 150	— 214,5	— 35,5	— 77
25	— 211	— 80	— 187	— 184,5	— 42	— 95

Tabelle IIIa und IIIb. Coordinaten von Punkten der Grenzcurven, wenn nach Ausschaltung des Sterno-Claviculargelenks und Acromialgelenks nur das Humerusgelenk allein functionirt. Die zugehörigen Curven sind ebenfalls auf Tafel I aufgezeichnet worden.

Tabelle IIIa.
(Rechter Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
28	+ 151	+ 133	— 140,5	+ 152,5	+ 66	— 70,5
29	+ 150,5	+ 162,5	— 105	+ 152	+ 81,5	— 52,5
30	+ 168,5	+ 185	— 55	+ 164	+ 92,5	— 27,5
31	+ 214,5	+ 186	— 6	+ 184	+ 91	— 3
32	+ 258	+ 162	+ 20	+ 205,5	+ 81	+ 10,5
33	+ 308	+ 117	+ 33	+ 230,5	+ 58,5	+ 17
34	+ 348	+ 45	+ 16	+ 251	+ 22,5	+ 8,5
35	+ 326	— 26,5	— 94	+ 240	— 13,5	— 47
36	+ 251,5	— 73,5	— 155,5	+ 202,5	— 37	— 77,5
37	+ 211,5	— 57	— 178,5	+ 182,5	— 28,5	— 89

Tabelle IIIb.
(Linker Arm.)

No.	x	y	z	x'	y'	z'
26	— 142,5	+ 145	— 142,5	— 148	+ 72,5	— 71
27	— 158,5	+ 183,5	— 93	— 156,5	+ 92	— 46,5
28	— 177,5	+ 194	— 34	— 166	+ 97	— 17
29	— 223,5	+ 189	+ 11	— 189,5	+ 95,5	+ 5,5
30	— 266	+ 162	+ 39,5	— 210,5	+ 81	+ 19,5
31	— 319	+ 105	+ 33	— 237	+ 52	+ 16,5
32	— 343,5	+ 23	+ 5	— 248,5	+ 11,5	+ 2,5
33	— 343	— 9	— 55,5	— 248,5	— 5	— 27,5
34	— 279,5	— 48	— 153	— 217	— 24	— 77
35	— 208	— 50,5	— 191	— 181,5	— 25	— 95,5

Bei den ersten beiden Versuchsreihen blieb der Mittelpunkt des Humeruskopfes nicht an seiner Stelle. Deshalb wird im Allgemeinen die Richtung der Längsaxe des Humerus in irgend einer Grenzstellung die Richtung derselben in der Normalstellung, wie sie oben definirt worden ist, nicht schneiden. Man wird daher von einem Flexionswinkel im gewöhnlichen Sinne, d. h. von dem Winkel, den eine Grenzstellung der Humeruslängsaxe mit der Normalstellung bildet, nicht reden können, da die beiden Lagen der Humerusaxe zu einander windschief sind. Man muss daher als Flexionswinkel



den Winkel ansehen, den diese beiden im Raume gelegenen windschiefen Linien mit einander bilden. Unter dem Winkel zweier windschiefen Geraden versteht man aber den Winkel, den man erhält, wenn man die beiden Geraden parallel mit sich selbst nach einem beliebigen Punkt des Raumes verschiebt. Für die Rechnung gestaltet sich dies besonders einfach, wenn man die Normalstellung und alle gemessenen Grenzstellungen parallel mit sich selbst so lange verschiebt, bis die Marke auf der Nadel in jedem Falle in den Coordinatenanfangspunkt zu liegen kommt. Die Coordinaten der Nadelmarke sind in obigen Tabellen mit x', y', z', die der Nadelspitze mit x, y, z bezeichnet worden. Nach dieser Parallelverschiebung werden die neuen Coordinaten der Nadelmarke immer bezüglich die Werthe 0, 0, 0 haben. Die neuen Coordinaten der Nadelspitze, welche mit ξ, η, ζ bezeichnet werden sollen, gewinnt man nach einem Satze der analytischen Geometrie des Raumes, wenn man die alten Coordinaten x', y', z' der Nadelmarke von den entsprechenden Coordinaten x, y, z der Nadelspitze abzieht, so dass in jedem Falle

$$\xi = x - x', \quad \eta = y - y' \quad \text{und} \quad \zeta = z - z' \quad \text{ist.}$$

Da durch diese Operation die Nadelmarke fixirt ist, so wird sich die Nadelspitze nur noch auf einer Kugeloberfläche bewegen, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt und deren Radius 100 mm beträgt, weil die Nadelmarke in der Entfernung von 100 mm von der Nadelspitze angebracht wurde.

Folgende Tabellen geben die Werthe der neuen Coordinaten ξ, η, ζ, wie sie aus den 6 Tabellen von pag. 401 bis 403 hervorgehen. Die neuen Tabellen sind der Reihe nach mit Ia', Ib', IIa', IIb', IIIa', IIIb' bezeichnet, so dass also z. B. die Tabelle IIa' aus der früheren Tabelle IIa hervorgegangen ist u. s. w.

Tabelle Ia'.

No.	ξ	η	ζ
0	0	0	—100
1	— 0,5	+ 22	— 97,5
2	+ 1,5	+ 43,5	— 87
3	— 16	+ 73	— 68,5
4	— 26,5	+ 79	— 53
5	— 33,5	+ 80,5	— 52
6	— 44	+ 89,5	— 11
7	— 15,5	+ 95	+ 27
8	+ 9	+ 76	+ 59,5
9	+ 22,5	+ 49,5	+ 79,5
10	+ 37,5	+ 32,5	+ 81,5
11	+ 62	+ 17	+ 77
12	+ 94,5	— 9,5	+ 35
13	+ 98	— 20,5	+ 14
14	+ 81	— 35,5	— 43
15	+ 45	— 43,5	— 77,5
16	+ 16,5	— 34,5	— 95,5

Tabelle Ib'.

No.	ξ	η	ζ
0	0	0	—100
1	+ 6,5	+ 31,5	—100
2	+ 17	+ 67	— 72,5
3	+ 24	+ 81,5	— 43.5
4	+ 30	+ 91	— 34
5	+ 37,5	+ 93	— 12,5
6	+ 42	+ 91	+ 5,5
7	+ 37,5	+ 92	+ 30,5
8	+ 20,5	+ 92	+ 30
9	+ 9	+ 82	+ 57,5
10	— 31,5	+ 53	+ 77,5
11	— 72,5	+ 34	+ 61
12	— 96	+ 2	+ 25,5
13	— 88	— 27,5	— 41
14	— 23	— 37	— 90
15	— 5	— 13,5	— 96,5

Tabelle IIa'.

No.	ξ	η	ζ
17	— 13	+ 80,5	— 55
18	— 22	+ 92,5	— 28,5
19	— 18	+ 99	— 2,5
20	+ 8,5	+ 94,5	+ 34
21	+ 31,5	+ 87,5	+ 35
22	+ 67	+ 63,5	+ 39
23	+ 86	+ 40,5	+ 33
24	+ 97	+ 15	+ 26,5
25	+ 87,5	— 20,5	— 45
26	+ 44	— 43,5	— 82
27	+ 31	— 38	— 88,5

Tabelle IIb'.

No.	ξ	η	ζ
16	+ 5	+ 83,5	— 58,5
17	+ 5,5	+ 93	— 35
18	+ 7,5	+ 99	+ 2,5
19	+ 1	+ 98,5	+ 15
20	— 10	+ 93,5	+ 38
21	— 57,5	+ 54	+ 63
22	— 90	+ 17	+ 40
23	— 90	— 11	— 45
24	— 63,5	— 29,5	— 73
25	— 26,5	— 38	— 92



Tabelle IIIa'.

No.	ξ	η	ζ
28	— 1,5	+ 67	— 70
29	— 1,5	+ 81,5	— 52,5
30	+ 7,5	+ 92,5	— 27,5
31	+ 30,5	+ 95	— 3
32	+ 52,5	+ 81	+ 9,5
33	+ 77,5	+ 58,5	+ 16
34	+ 97	+ 22,5	+ 7,5
35	+ 86	— 13	— 47
36	+ 49	— 36,5	— 78
37	+ 29	— 28,5	— 89,5

Tabelle IIIb'.

No.	ξ	η	ζ
26	+ 6	+ 72,5	— 71,5
27	— 2	+ 91,5	— 46,5
28	— 11,5	+ 97	— 17
29	— 34	+ 93,5	+ 5,5
30	— 55,5	+ 81	+ 19,5
31	— 82	+ 52,5	+ 16,5
32	— 95	+ 11,5	+ 2,5
33	— 94,5	— 4	— 28
34	— 62,5	— 24	— 76
35	— 26,5	— 25,5	— 95,5

Die zugehörigen Projections-Curven in der $\xi\eta$-Ebene finden sich auf Tafel II für den rechten Arm und auf Tafel III für den linken Arm aufgezeichnet, und zwar ist der Theil der Curven, welcher auf der oberen Halbkugel liegt gegenüber dem welcher auf der unteren Halbkugel liegt durch andere Strichführung kenntlich gemacht worden.

Aus diesen Curven lassen sich nun auf einfache Weise die Flexionsgrössen, die alle von der Normalstellung aus gerechnet werden sollen, ableiten: Die Projection der Normalstellung, die in beiden Figuren wieder mit 0 bezeichnet ist, ist in den Curven ein Punkt, und zwar der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius 100 mm, innerhalb dessen alle Curven liegen müssen. Die Verbindungslinie *a* jedes Punktes einer der Curven mit der Projection 0 der Normalstellung (Mittelpunkt des Kreises in Tafel II und III) ist dann eine Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Nadel in der Länge von 100 mm ist, dessen eine Ecke in den Coordinatenanfangspunkt, und dessen andere Kathete in die Richtung der Normalstellung fällt. Der Winkel zwischen Hypotenuse und Normalstellung ist der Flexionswinkel, folglich ist die Verbindungslinie *a* die dem Flexionswinkel gegenüberliegende Kathete. Der Quotient aus der Länge dieser Verbindungslinie und der Länge der Hypotenuse (100 mm) ist dann der Sinus des Flexionswinkels. Misst man also den Abstand eines Punktes der Curven von dem Mittelpunkt 0 des Kreises in Millimetern und theilt ihn durch 100, so hat man den Sinus des Flexionswinkels. Der Abstand in Decimetern ausgedrückt giebt uns demnach direct den Sinus des Flexionswinkels. Um einen Einblick in die Grössen der Flexionen zu gewinnen, wurden diesel-

ben für alle Flexionsebenen gemessen, die um je 10° zu einander geneigt sind. Die Frontalebene, welche durch die Normalstellungen beider Arme bestimmt wird, diente uns als Ausgangsebene, auf die wir die Richtung aller anderen Flexionsebenen bezogen, und welche **Normalebene** genannt werden soll. Die Winkel, welche die nach vorn zu gelegenen Flexionsebenen mit dieser Normalebene bildeten, erhielten positive, die Winkel der nach hinten zu liegenden Flexionsebenen negative Werthe. In der $\xi\eta$-Projection, d. h. auf Tafel II und III, werden alle diese Flexionsebenen, da sie alle durch die betreffende Normalstellung gehen, als gerade Linien durch den Mittelpunkt des Kreises erscheinen.

Die folgenden Tabellen IVa und IVb enthalten die auf diese Weise gewonnenen Sinus der Flexionen und daneben die Flexionsgrössen selbst. Tabelle IVa gehört zu Tafel II, also zum rechten Arm, Tabelle IVb zu Tafel III, also zum linken Arm.

Tabelle IVa.

(Rechts.)

Richtung der Flexionsebene	Sinus der Flexionen zu Tabelle:			Daraus die Flexionswinkel:	Flexionen zu Tabelle:		
	Ia'	IIa'	IIIa'		Ia'	IIa'	IIIa'
— 70°	0,345	0,345	0,1		20° 10'	20° 10'	5° 50'
— 60°	0,405	0,405	0,22		23° 50'	23° 50'	12° 40'
— 50°	0,49	0,49	0,32		29° 20'	29° 20'	18° 40'
— 40°	0,675	0,665	0,525		42° 30'	41° 40'	31° 40'
— 30°	0,795	0,75	0,675		52° 40'	48° 40'	42° 30'
— 20°	0,93	0,835	0,755		68° 30'	56° 40'	49° —
— 10°	0,995	0,925	0,855		95° 40'	67° 40'	58° 50'
0°	0,86	1	0,95		120° 40'	90° —	71° 50'
+ 10°	0,715	0,98	1		134° 20'	101° 30'	90° —
+ 20°	0,595	0,96	0,985		143° 30'	106° 20'	100° —
+ 30°	0,525	0,94	0,975		148° 20'	110° —	102° 50'
+ 40°	0,5	0,925	0,965		150° —	112° 20'	105° 10'
+ 50°	0,495	0,915	0,96		150° 20'	113° 50'	106° 20'
+ 60°	0,52	0,915	0,97		148° 40'	113° 50'	104° 10'
+ 70°	0,58	0,925	1		144° 30'	112° 20'	90° —
+ 80°	0,725	0,835	0,955		133° 30'	123° 20'	72° 40'
+ 90°	0,845	0,96	0,855		122° 20'	106° 20'	58° 50'
+100°	0,965	1	—		105° 10'	90°	—
+110°	1	—	—		90°	—	

Tabelle IVb.

(Links.)

Richtung der Flexions-ebene	Sinus der Flexionen zu Tabelle:			Daraus die Flexionswinkel	Flexionen zu Tabelle:		
	Ib'	IIb'	IIIb'		Ib'	IIb'	IIIb'
— 70°	0,14	0,14	0,065		8° —	8° —	3° 40'
— 60°	0,415	0,415	0,135		24° 30'	24° 30'	7° 50'
— 50°	0,51	0,5	0,28		30° 40'	30° —	16° 20'
— 40°	0,6	0,57	0,41		36° 50'	34° 50'	24° 10'
— 30°	0,725	0,65	0,545		46° 30'	40° 30'	33° —
— 20°	0,875	0,745	0,685		61° —	48° 10'	43° 10'
— 10°	1	0,855	0,815		90° —	58° 50'	54° 40'
0°	—	—	0,985		—	—	80° —
+ 10°	—	—	0,945		—	—	109° —
+ 20°	—	—	0,945		—	—	109° —
+ 30°	—	—	0,965		—	—	105° 10'
+ 40°	—	—	0,97		—	—	104° —
+ 50°	—	—	0,97		—	—	104° —
+ 60°	—	—	0,975		—	—	102° 50'
+ 70°	—	—	0,99		—	—	98° 10'
+ 80°	—	—	0,99		—	—	81° 50'
+ 90°	—	—	0,89		—	—	62° 50'
+100°	—	—	—		—	—	—
+110°	—	—	—		—	—	—

Die zu den Ebenen mit den Richtungswinkeln 0° bis + 110° gehörenden Flexionen und Sinus der Flexionen, welche sich aus Tabelle Ib' und IIb' berechnen würden, sind nicht angeführt worden, weil für diese durch Anstossen der Scapula an den Stab hinter der Wirbelsäule Ungenauigkeiten sich einstellten. Diese Fehlerquelle liess sich jedoch nicht vermeiden, da vor allen Dingen die Beweglichkeit der Wirbelsäule ausgeschlossen werden musste.

Um nun aus den Beobachtungen zu ersehen, wie gross der Einfluss des Acromial- und des Claviculargelenks auf die Humerusbewegungen ist, oder um wieviel das Humerusgelenk durch die accessorischen Gelenke des Schultergürtels gewinnt, braucht man nur jedesmal in den Tabellen IV erstens von der Gesammtgrösse der Flexionen, die in der zu Tabelle Ia' resp. Ib' gehörenden Rubrik enthalten ist, die Flexion abzuziehen, welche zu Tabelle IIa' resp. IIb' gehört (nach Ausscheidung des Claviculargelenks gewonnen); diese Differenz



giebt dann den Einfluss des Claviculargelenks. Den Einfluss des Acromialgelenks erhält man, wenn man die zu Tabelle III a′ resp. III b′ (Humerusgelenk allein) gehörenden Flexionsgrössen von den zu Tabelle II a′ resp. II b′ gehörenden abzieht. Dies ist ausgeführt worden und in folgender Tabelle niedergelegt.

Tabelle V.

Rechts.				Links.			
Richtung der Flexionsebene	Flexionen im Humerusgelenk allein	Winkel, um welche die Flexionen des Humerus vergrössert werden, wenn die Bewegungen des Acromialgelenks hinzukommen	Vergrösserung der Flexionen durch den Hinzutritt des Claviculargelenks	Richtung der Flexionsebene	Flexionen im Humerusgelenk allein	Winkel, um welche die Flexionen des Humerus vergrössert werden, wenn die Bewegungen des Acromialgelenks hinzukommen	Vergrösserung der Flexionen durch den Hinzutritt des Claviculargelenks
— 70°	5° 50′	14° 20′	0°	— 70°	3° 40′	4° 20′	0°
— 60°	12° 40′	11° 10′	0°	— 60°	7° 50′	16° 40′	0°
— 50°	18° 40′	10° 40′	0°	— 50°	16° 20′	13° 40′	0° 40′
— 40°	31° 40′	10° —	0° 50′	— 40°	24° 10′	10° 40′	2° —
— 30°	42° 30′	6° 10′	4° —	— 30°	33° —	7° 30′	6° —
— 20°	49° —	7° 40′	11° 50′	— 20°	43° 10′	5° —	12° 50′
— 10°	58° 50′	8° 50′	28° —	— 10°	54° 40′	4° 10′	31° 10′
0°	71° 50′	18° 10′	30° 40′	0°	80° —	—	—
+ 10°	90° —	11° 30′	32° 50′	+ 10°	109° —	—	—
+ 20°	100° —	6° 20′	37° 10′	+ 20°	109° —	—	—
+ 30°	102° 50′	7° 10′	38° 20′	+ 30°	105° 10′	—	—
+ 40°	105° 10′	7° 10′	37° 40′	+ 40°	104° —	—	—
+ 50°	106° 20′	7° 30′	36° 30′	+ 50°	104° —	—	—
+ 60°	104° 10′	9° 40′	34° 50′	+ 60°	102° 50′	—	—
+ 70°	90° —	22° 20′	32° 10′	+ 70°	98° 10′	—	—
+ 80°	72° 40′	50° 40′	10° 10′	+ 80°	84° 50′	—	—
+ 90°	58° 50′	47° 30′	16° —	+ 90°	62° 50′	—	—

Aus dieser Tabelle erkennt man die Grösse der Betheiligung der einzelnen Gelenke des Systems an den Flexionen des Armes. Man sieht sofort, dass der Antheil des Acromialgelenks durchaus nicht geringer ist als der des Claviculargelenks (Sterno-Claviculargelenk), wie von Henke in seinem Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke pag. 122 u. ff. behauptet worden ist. Im Gegentheil zeigt das Acromialgelenk eine etwas grössere Betheiligung an den Bewegungen des Armes; jedoch differiren die Antheile von einander je nach den verschiedenen Flexionsebenen. Das Acromial-

gelenk spielt hauptsächlich bei den Bewegungen des Arms, wenn der Arm möglichst weit nach vorn oder rückwärts von der Normalstellung aus gehoben wird. Das Claviculargelenk betheiligt sich am meisten in der Nähe der Frontalebene. Wenn also eins von den beiden Gelenken erkrankt oder sonstwie an der Function gehindert ist, so würde die Functionsstörung durch die Hinderung des Claviculargelenks sich am meisten bemerkbar machen bei den Bewegungen des Armes in der Nähe der Frontalebene. Die Störung aber des Acromialgelenks würde am deutlichsten in die Augen fallen bei den Bewegungen des Armes nahe der Sagittalebene.



} zu Tabelle Ia.

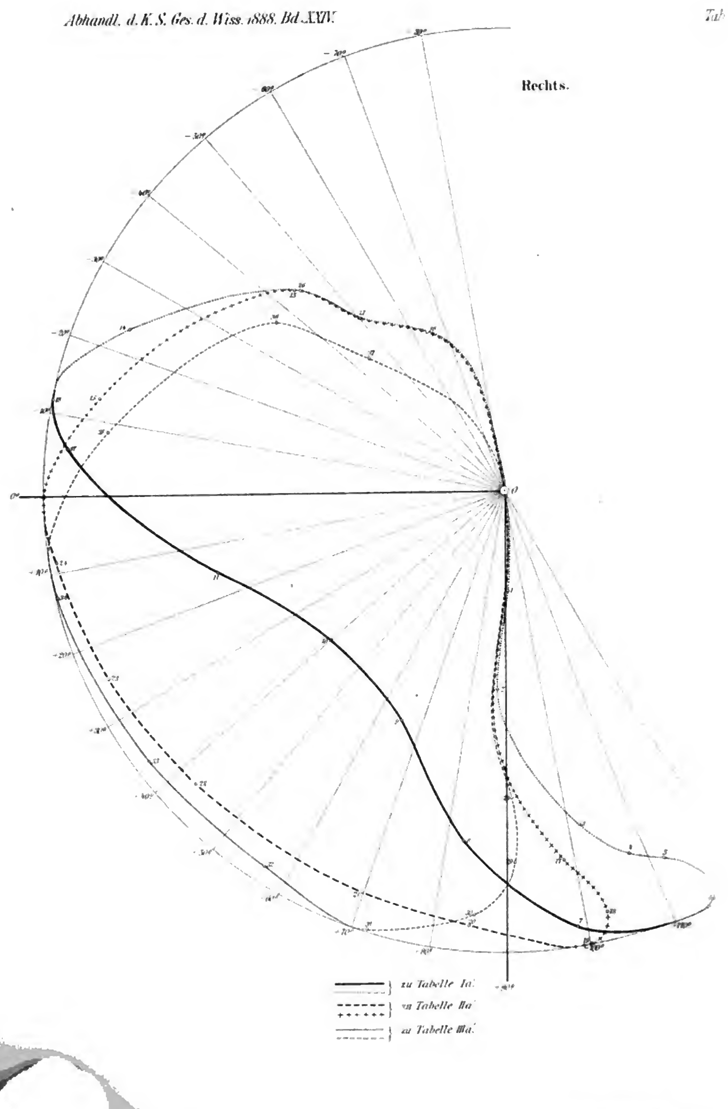
} zu Tabelle IIa.

} zu Tabelle IIIa.

} zu Tabelle Ib.

} zu Tabelle IIb.

} zu Tabelle IIIb.


Rechts.
0°
0
zu Tabelle Ia.
zu Tabelle IIa.
zu Tabelle IIIa.

Tab. III.

Links.

} zu Tabelle Ib

} zu Tabelle IIb.

} zu Tabelle IIIb.



BEITRÄGE ZUR KENNTNISS

DES

EINFLUSSES DER RESPIRATIONSBEWEGUNGEN

AUF DEN

BLUTLAUF IM AORTENSYSTEME.

VON

G. HEINRICIUS UND H. KRONECKER.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IX.

MIT FÜNF TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.

Von den Verfassern übergeben den 17. Januar 1888.
Der Abdruck vollendet den 15. Mai 1888.

Aus dem physiologischen Institut der Universität Bern

BEITRÄGE ZUR KENNTNISS

DES

EINFLUSSES DER RESPIRATIONSBEWEGUNGEN

AUF DEN

BLUTLAUF IM AORTENSYSTEME.

VON

G. HEINRICIUS UND H. KRONECKER.

AUS DEM PHYSIOLOGISCHEN INSTITUTE DER UNIVERSITÄT BERN.

Es sind gerade 40 Jahre verflossen, seitdem C. Ludwig eine Abhandlung unter obigem Titel in Johannes Müller's Archiv (1847, S. 242) veröffentlicht hat. In jener Arbeit ist auch zum ersten Male das von ihm erfundene Kymographion beschrieben. Diese Erfindung gab der experimentellen Forschung eine neue Richtung, indem sie die graphische Methode in die Physiologie einführte.

Ludwig beschrieb die epochemachende Versuchsanordnung in folgenden anspruchslosen Worten: »Um mit Hülfe des Poiseuille'schen Manometers unter allen Umständen genaue Druckhöhen und ihre Zeitdauer zu bestimmen, setzt man auf die freie Quecksilbersäule einen stabförmigen Schwimmer, versieht diesen am oberen Ende mit einer Feder und lässt durch sie die Schwankungen auf eine Fläche zeichnen, welche sich mit stetiger Geschwindigkeit an der Feder vorbeibewegt. Auf diese Weise erhält man Curven, welche allen Anforderungen entsprechen.«

Aus den Untersuchungen, welche damals Ludwig in Gemeinschaft mit Gerau ausführte, »stellte sich beim Pferde sowohl als beim Hunde das Ergebniss heraus, dass in den bei weitem meisten Fällen der (respiratorische) Luftdruck höchst unbedeutend im Vergleich mit dem Blutdruck ausfällt; woraus er (Gerau) den sicheren Schluss zog, dass die Erhöhung des Blutdruckes im Gefässsysteme während der Exspiration vom Luftdruck nicht allein abhängig sein könnte. In einer weiteren Versuchsreihe suchte er darauf den anderen Ursachen der Einwirkung nachzuspüren.«

Ludwig fand folgende Beziehungen zwischen dem Pulse und den Respirationsbewegungen:

I. »Keine Einwirkung der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme.« »Es ist dies das normale Vorkommen bei

den Pferden ..... bei ruhiger Respiration und ruhigem Pulsschlage.« Beim Hunde ist dieses Verhalten nur selten (in 2 Fällen unter 100) beobachtet worden.

II. »Die Respirationsbewegung erlangt einen Einfluss auf die Blutbewegung, doch so, dass man die Einwirkung der einzelnen Acte, aus welchen sich eine ganze Respirationsbewegung zusammensetzt, auf die Pulscurve nicht nachzuweisen im Stande ist.« Merklich wird der Einfluss beim Pferde, wenn dieses häufiger athmet. Es wird dann jeder einzelne Herzschlag kräftiger (höher), ohne dass die Pulsfrequenz zunimmt.

Beim Hunde findet man in dem Falle, wenn die Respirationen so häufig werden, dass sie die Herzschläge an Zahl weit übertreffen, die Pulse ebenfalls gleichartig; sobald aber die ersten in Dauer und Intensität sich verändern, merkt man auch Pulsänderungen.

III. »Hieran endlich reiht sich der beim Hunde gewöhnliche, beim Pferde nur in intensiver Respiration oder im Fieber, normale Fall an, dass man an der Pulscurve deutlich den Anfang und das Ende der In- und Exspiration bestimmen kann, und zwar derartig, dass mit der Druckmehrung und Minderung in der Respirationscurve ein Gleiches in den mittleren Werthen der Pulscurve geschieht.«

Aus den Curven der pleuralen Druckschwankungen, welche Ludwig ebenfalls registriren liess, ergab sich, dass mit der Exspiration der Druck in der Lunge steigt. Hierdurch würde die Aorta comprimirt und der Abfluss in die kleinen Arterien beschleunigt. Die Inspiration beeinflusst den Blutdruck in entgegengesetztem Sinne als die Exspiration.

An der Pulscurve macht sich die Exspiration oft auch noch dadurch geltend, dass mit ihrem Eintritt die Geschwindigkeit und die Intensität der Herzschläge sich wesentlich ändert.

Ludwig schliesst resignirt: »Alle Hypothesen, welche leicht aus dem vorhandenen Thatsachen-Material fliessen, sind so zweifelhaften Werthes und widerlegen sich durch ein selbst oberflächliches Nachdenken, dass man mir billigerweise ihre Widerlegung oder Aufstellung erlassen wird.«

Dreizehn Jahre später bearbeitete Einbrodt unter Ludwig's Leitung das gleiche Thema.

Von den mannichfaltigen unmittelbaren und mittelbaren Wir-

kungen der Athembewegungen auf das Kreislaufsystem hob EINBRODT, durch abnorme Verstärkung, den positiven und negativen Respirationsdruck heraus.

»Der positive Respirationsdruck (bis 125 mm Hg) erschwert den Zufluss des Blutes zum Herzen, mindert den Nutzeffect des Herzens und setzt die Spannung des Blutes im Aortensysteme herab« (nachdem der Blutdruck anfänglich mit dem Respirationsdruck gewachsen war). Er erzeugt durch venöse Stauung Hirndruck.«

»Der erhöhte Respirationsdruck bedingt auch Vagusreizung, welche, wenn kein directer Reiz aufs Herz wirkt, eine Verlangsamung der Herzbewegung einleitet.«

Dieser Effect fällt fort, wenn die Vagi am Halse durchtrennt sind. Die Reizung geschieht also an den centralen Ursprungsstellen der Vagi und zwar durch vermehrten Druck in den Hirnvenen.

»Der arterielle Blutdruck steigt nach Aufhebung des positiven Druckes in der weitaus grössten Mehrzahl der Fälle rasch und bedeutend an, denn das ins Herz aus den Venen ankommende gestaute Blut wird für den Strom sogleich nutzbar gemacht. Diese Steigerung des Blutdruckes hält aber in der Regel nicht lange an.«

»Für die Veränderungen, die der Blutdruck während der Athembewegungen erleidet, bestehen zwei Ursachen:

1) die beschleunigenden Kräfte, welche die Bewegungen der Brustwand ausüben und

2) die am Herzen hervorgebrachte Füllung mit Blut. Als begünstigendes Moment kann auch die veränderte Schlagfolge des Herzens angeführt werden.«

»Durch die Einathmung werden das Herz und die grossen Gefässe, die an der äusseren Lungenoberfläche liegen, unter geringere Spannung versetzt und dementsprechend sinkt auch im Beginne der Inspiration, wenn sie nur nicht zu kurz ist, der mittlere Blutdruck um ein Geringes unter den Werth herab, der ihm während der vorhergehenden Ausathmungspause zukam.«

Aber »in Folge des gesetzten Spannungsunterschiedes strömt eine bedeutende Quantität Blut dem Herzen zu und wird durch das erregbare Herz sofort für den Strom nutzbar gemacht: der Inhalt des arteriellen Systems wird unter hohe Spannung versetzt.« »Da sich nun die Füllung des Herzens so lange erhält, als die Inspiration

selbst, so erfährt auch der Blutdruck während der ganzen Dauer der Inspiration keine Abnahme mehr.«

»Stellt sich nun nach Ablauf der Inspiration die Exspiration ein, so summiren sich in ihrem Beginne zwei Einflüsse, um den Blutdruck rasch bis zur bedeutendsten Höhe ansteigen zu lassen: die beschleunigende Kraft der Brustbewegung, die aus der Zunahme der auf den Brusteingeweiden lastenden Spannung hervorgeht, und die vorher bestandene Blutanfüllung des Herzens, die jetzt erst allmählich zur Ausgleichung gelangt. Der Wirkung dieser beiden Einflüsse, namentlich aber des ersten, ist das beobachtete Steigen des Blutdruckes am Beginne der Ausathmung beizumessen.«

»Als drittes Element, das den beiden ersten jedenfalls aber an Wirksamkeit nachsteht, konnte die Veränderung in der Herzschlagsgeschwindigkeit angeführt werden; wo sie deutlich ausgesprochen auftritt, geschieht das Ansteigen während der Inspiration und das Absteigen während der Exspiration viel rascher als in denjenigen Fällen, wo die Herzschlagänderung fehlt. Dagegen kann aber das wirkliche Bestehen und wechselnde Ueberwiegen der beiden ersten Elemente gerade in diesem letzteren Falle z. B. nach Vagus-Durchschneidung, reiner beobachtet werden, zumal in Folge der Vagus-Durchschneidung die Athembewegungen selbst tiefer und langsamer werden und daher einen grösseren Einfluss erlangen können, namentlich aber bedeutendere Spannungsunterschiede setzen.«

Ludwig und Einbrodt betrachteten diese »Untersuchung nur als eine Vorarbeit, die in Folge der erlangten sicheren Einsicht in die Grundelemente der Frage ein weiteres Vordringen wesentlich unterstützen wird«.

Donders hatte (1853) »auf den niederen Druck aufmerksam gemacht, dem die Innenfläche der Brust und die Oberfläche des Herzens in Folge des Widerstandes der elastischen Lungen unterliegen«. Er lehrte nach Talma's Citat noch: »1) dass Erhöhung des Druckes in den Lungen und also auf die Oberfläche des Herzens die Erweiterung der verschiedenen Herzhöhlen bei der Erschlaffung hemmen und also die Ursache von venöser Hyperämie und arterieller Anämie sein kann; 2) dass Erniedrigung des Druckes auf die Oberfläche des Herzens die Erweiterung der Herzhöhlen bei der Erschlaffung stark befördern und also die Menge des Blutes, welches in die Arterien

strömt, bedeutend vermehren kann. Wenn nicht die Abnahme des Druckes so gross ist, dass die Zusammenziehung des Herzens, die Austreibung des Blutes in alle Körperarterien dadurch gehemmt wird .... Bei den Modificationen der Circulation durch die Respiration wirken wenigstens schon drei Factoren zusammen: die Schnelligkeit und die Kraft der Zusammenziehung des Herzens, die Quantität des Blutes, welche durch die Venen ins Herz geführt wird, und der Druck, worunter die Arterien in der Brusthöhle stehen. So kommt es, dass der Druck des Blutes in den Arterien grössere Unterschiede darbietet, als der Druck der Ein- und Ausathmung, von dem sie abhängen. DONDERS lieferte nur »Beiträge« zur Physiologie der Respiration und Circulation, studirte nicht alle Momente, welche einen Einfluss ausüben können.«

TALMA knüpft hieran die Bemerkung: »EINBRODT, das Verdienst der DONDERS'schen Mittheilungen vielleicht nicht genügend anerkennend, arbeitete in der von Letzterem eingeschlagenen Richtung weiter.« Ebenso gut liesse sich sagen, dass vor DONDERS schon CARSONS (1815) einige der angeführten Gesichtspunkte geltend gemacht hat, als er darlegte, wie die inspirirten Lungen sich durch ihre Elasticität zusammenzuziehen streben, hierdurch einen Theil des Druckes der Atmosphäre auf das Herz aufheben, also seine Diastole befördern, seine Systole erschweren, den Einfluss des Venenblutes in's Herz begünstigen.

EDUARD WEBER beschrieb und erklärte (1850 u. 51) die Wirkung der Exspiration auf das Herz folgendermassen: »Da nun das Blut aus den Körpervenen nur vermöge des Druckes, unter dem es sich in denselben befindet, nach dem entleerten und wieder erschlafften Herzen hinströmt, so muss, wenn auf das Herz und die Hohlvenen ein Gegendruck ausgeübt wird, wie bei der Compression der Luft in der Brusthöhle der Fall ist, die Kraft des Stromes sich vermindern. Wird der Druck auf das Herz aber so gross, dass er dem Drucke des Blutes in den Venen am Halse und im Unterleibe das Gleichgewicht hält, oder sogar noch grösser als dieser, so kann gar kein Blut in das Herz und die in der Brust gelegenen Hohlvenen mehr einströmen. Die geringe Menge Blutes, welche sich innerhalb der Brusthöhle in den Hohlvenen, im Herzen, in den Venen und Arterien der Lunge befindet, wird durch die zunächstfolgenden

Zusammenziehungen des Herzens vollends in die Aorta getrieben, worauf dann auch kein Blut mehr aus dem Herzen in die Aorta ausströmen kann.«

»Weil aus dem nun leeren Herzen kein Blut mehr in die Aorta gelangt, bleibt der Puls ganz aus, und kehrt erst wieder, wenn die Compression der Brusthöhle aufgehört oder nachgelassen hat.«

Gerade ein Jahrhundert zuvor hat aber schon Lamure, noch vor Haller (wie dieser in seinen Elementis Physiol. T. II. p. 335 gewissenhaft zugesteht), angegeben: »In exspiratione semper imprimis thorax contrahitur, comprimuntur pulmones ‚auriculae' venae cavae, fit refluxus sanguinis in venas cerebri, eae ergo in exspiratione turgent.«

Haller beschreibt den Einfluss der Respiration auf den Blutlauf in den Venen mit folgenden Worten:

»Magni ergo trunci venosi capitis, colli, pectoris, abdominis, brachii eiusmodi motu agitantur, in vivis animalibus, ut per exspirationem sanguine aut retento, aut a corde refluo turgescant, per inspirationem remisso ad cor sanguine eaedem (venae) depleantur: hinc per inspirationem, recedente de cerebri magnis vasis sanguine, cerebrum subsidet, idemque eo sanguine per exspirationem retento, et reduce intumescit et mole crescit. In vehementiori respiratione omnia evidentius adparent.« Auch die Wirkung der Zwerchfellbewegungen auf den Blutlauf hat Haller berücksichtigt. Er meinte, dass das Diaphragma bei seiner Contraction die Vena cava inferior comprimire.

Das Hauptgewicht legt er aber auf die Veränderung des Lungenkreislaufs durch die Athmung:

»Nempe per inspirationem via in pulmonem facilior aperitur, nascitur ergo derivatio, et sanguis venosus undique ad eam sedem confluit, a qua resistentia ablata est: confluit ergo per inspirationem sanguis auricularum et cordis in pulmonem, sanguis venarum cavarum in auriculam, sanguis venarum proximarum in venas cavas, deplentur ergo venae remotiores, cerebri, brachii, abdominis et inaniuntur. Contra in exspiratione sanguis in pulmones compressos difficilius recipitur, difficilius adeo cor dextrum se deplet, stagnat sanguis in venis cavis, in vena jugulari, in cerebro demum toto, atque adeo sinus cerebri, et venae jugulares, intumescunt, quod a minimis vasculis sanguinem accipere pergant, emittere nequeant.«

Die Bedeutung der Athembewegungen für die Blutbewegung in den Venen würdigt Haller in dem Satze:

»Earum causarum (quae motum sanguinis venosi partim adjuvant, partim morantur) illustrior, forte et efficacior, est respiratio. Adjuvare videtur sanguinis circuitum, quod per Hookii experimentum (künstliche Athmung) aliaque in eundem sensum instituta, utique sanguis in pulmonem inflatum facilius subeat, facilius etiam circulum per pulmonem absolvat, celeriusque in sinistrum ventriculum redeat. Ita saepe, et in vivis animalibus, inflato pulmoni vidi, et in mortuo pulmone, quem minister inflabat, dum interim per siphonem liquorem tenuem, colore tamen aliquo saturato tinctum, in venam cavam impellebam. Is enim liquor longe facillime per pulmonem, vehementer distentum, et in sinistrum ventriculum, et in asperam arteriam transit. Hactenus adeo inspiratio pulmonem aperit sanguini, et expedit, absque ea futurum inmeabilem.«

Und an anderer Stelle (Elem. T. III p. 246):

»Hinc pulmo (immeabilis), quando collapsus, et non inspiranti similis, meabilis redditur, quoties aere inflatur. Facilius ergo per inflatum pulmonem transit injectus quicunque liquor: facilius transit sanguis ipse de corde expulsus. Hinc de inciso pulmone sanguis per inspirationem celerius projicitur. Hinc inspiranti homini pulsus celerior et suspirium pulsum accelerat.

Sed eiusmodi compressio pene nulla est, si cum cordis vi comparaveris.«

Diese Experimente beschreibt Haller hundert Jahre vor den ganz ähnlichen von Poiseuille angestellten, welche Ceradini in Ludwig's physiologischer Anstalt, danach Quincke und Pfeiffer etc. wieder in den Vordergrund stellten.

Eine neue Erklärung der respiratorischen Druckschwankungen versuchte Schiff (1872).

Im Jahre 1861 hatte Traube gefunden, dass der Blutdruck in curarisirten Thieren, bei denen man die künstliche Athmung unterbrochen hat, rhythmisch schwanken kann. Auf Grund der Untersuchungen von Ludwig und Thiry über das vasomotorische Nervencentrum stellte er die vielfach gebilligte Ansicht auf, »dass die Kohlensäure durch ihre erregende Wirkung auf das vasomotorische Nervencentrum abwechselnd und in rhythmischer Weise Contraction und

Erschlaffung der Körperarterien hervorzurufen vermag.« Traube fügt hinzu: »Dass diese Wirkung der Kohlensäure nicht darauf beruht, dass sie abwechselnd in grösserer und geringerer Menge dem vasomotorischen Nerven-Centrum zugeführt wird, liegt auf der Hand« (Ges. Abh. I. p. 389). Hering beobachtete (1859) die Traube'schen Wellen auch während (ungenügender) künstlicher Respiration.

Schiff machte nun die Hypothese (Med. Centralbl. 1872, p. 757), »dass die Bewegungen der Brusteingeweide höchstens nur ganz ausnahmsweise als die Ursache dieses Phänomens angesehen werden können. Vielmehr ist bei normaler Respiration eine die Phasen derselben begleitende Erhöhung oder Erniedrigung des Blutdruckes nicht als ein Effect der Respiration, sondern nur als ein Co-Effect derselben anzusehen, welcher auf derselben Ursache, wie die Respiration selbst, beruht. Es treten die respiratorischen Oscillationen des Blutdruckes immer dann auf, wenn in dem Blute Sauerstoffmangel und Kohlensäureüberschuss vorhanden ist und so das Respirationscentrum gereizt wird. Zu der gleichen Zeit oder doch kurz darauf erregt der gleiche Reiz auch das Innervationscentrum der Gefässe und es erfolgt eine Contraction der kleinen Arterien, welche den Blutdruck etwas erhöht.«

»Die Thiere, die zu diesen Versuchen dienten, waren zum grössten Theil curarisirt und chloralisirt; auch war die Brusthöhle eröffnet und die künstliche Respiration eingeleitet, so dass von einem Druck der Brusteingeweide nicht die Rede sein konnte. Es stellte sich nun heraus, dass die sogenannten respiratorischen Oscillationen des Blutdruckes allemal dann eintreten, wenn in der chemischen Zusammensetzung des Blutes gleichfalls Schwankungen vor sich gehen. Diesen Schwankungen der chemischen Zusammensetzung entsprechen die respiratorischen Oscillationen des Blutdruckes völlig und begleiten sie in vollkommen entsprechender Regelmässigkeit.«

Sigmund Mayer (1876) kam durch seine Untersuchungen zu der Ansicht, dass vom Athmungscentrum rhythmische Impulse auf das Centrum für die Gefässinnervation übergehen, welche durch Summation rhythmische Verstärkungen des Gefässtonus veranlassen.

Hering fand auch, dass unvollkommen curarisirte Thiere rhythmische Beinbewegungen machen, isarithmisch mit den Traube'schen

Wellen und häufig associirt mit mangelhaften Athembewegungen und Zuckungen der Beine.

Zu ähnlicher Anschauung neigt Fredericq, auf Grund einer Reihe von Untersuchungen, die er selbst und mit seinen Schülern Moreau und Leckénier, Legros und Griffé ausgeführt hat.

Er fasst selbst die Hauptresultate bezüglich der Blutdruckschwankungen in der Beschreibung folgenden Musterversuches zusammen:

»Sur un chien morphiné, à poitrine et ventre largement ouverts, à pneumogastriques et phréniques coupés, les mouvements respiratoires des côtes, qui se produisent lorsqu'on cesse la respiration artificielle, sont accompagnés d'oscillations de la presse sanguine, semblables à celles décrites par Traube et Hering sur les chiens curarisés (périodes de Traube-Hering). La portion descendante de ces larges oscillations correspond à l'inspiration; la pression se relève au contraire pendant l'expiration. Cette augmentation de pression n'est pas due à un changement dans le rythme cardiaque; elle a probablement une origine périphérique, vaso-motrice. Elle semble indiquer une activité rythmique automatique du centre des vasomoteurs, à chaque expiration ce centre exagère son action, tout comme le centre modérateur du coeur.« (Travaux du Laboratoire de Léon Fredericq, Gand 1886, p. XIV: Notice sur les recherches exécutées au laboratoire de Physiologie de l'université de Liège 1880 à 84.)

In jüngster Zeit sind dann wieder die mechanischen Erklärungen der respiratorischen Blutdruckschwankungen in den Vordergrund getreten.

Kuhn hat (1875) an Hunden den Einfluss des Bauchdruckes auf den Blutdruck studirt. Er beobachtete bei geöffneter Brusthöhle und durchtrennten Vagi Athembewegungen unabhängig von dem Rhythmus der Einblasungen, und bei jeder activen Inspiration Steigen, bei jeder Exspiration Sinken des Blutdruckes. Diese Schwankungen fehlten, wenn die Bauchhöhle geöffnet wurde oder das Thier curarisirt. Dann nimmt mit der Einblasung der Druck anfangs zu und gegen Ende ab und fällt weiter während der Exspiration. Er schloss daraus, dass durch Compression des Bauchinhaltes bei der Inspiration der Abfluss aus der Aorta erschwert, der Zufluss zum rechten Herzen durch die Vena cava inferior vermehrt sei.

Luciani theilt mit (1877), dass nach der Durchschneidung der Phrenici die inspiratorische Steigung ausbleibe und schliesst daraus, dass die Zwerchfellcontraction ein wesentliches Moment für die inspiratorische Erhebung sei.

S. v. Basch und Schweinburg bestätigten (1881 und 82) die Schlüsse aus diesen Versuchen, die sie nicht für beweiskräftig hielten. Schweinburg unterband in späteren Versuchen die Aorta descendens und sah, dass danach die Druckschwankungen verschwanden (weil die Blutfülle der Bauchhöhle nun nicht mehr respiratorisch wechseln konnte).

Schweinburg fand, mittels des Sphygmomanometers, auch am Menschen ähnliche Druckschwankungen wie bei Hunden, und zweifelt nicht: »dass die Zwerchfellcontractionen überhaupt die respiratorischen Blutdruckschwankungen des Menschen zum grössten Theile bedingen«.

Die Veränderung des Lungenkreislaufs stellen als ausschliessliche oder wesentliche Ursache der respiratorischen Blutdruckschwankungen auf: Kowalewsky (1877) und de Jager (1879—1887).

Talma vertritt 1882 wieder die Ansicht, dass die Störung des Lungenkreislaufs und die Behinderung der Herzbewegung combinirt die circulatorischen Athemschwankungen veranlassen. Er schliesst (Pflüger's Arch. Bd. 29, p. 335):

»Bei der Druckerhöhung in den Lungen und bei der natürlichen Exspiration wird, wenn die Veränderungen einen hinreichend hohen Grad erreicht haben: 1) die Erweiterung des rechten und linken Herzens vermindert; 2) der Blutstrom durch die Lungen, wahrscheinlich durch Verengung der Lungengefässe (wozu ich hier auch die Pulmonalvenen und die linke Vorkammer rechne), ceteris paribus, erschwert. Aus den obigen Versuchen geht jedoch hervor, dass die Hemmung der Diastole des rechten Ventrikels so in den Vordergrund tritt, dass die Verengung der Lungengefässe factisch vernachlässigt werden kann.«

»Die natürliche Inspiration und die künstliche Erniedrigung des Druckes in den Lungen beeinflussen den arteriellen Blutdruck auf verschiedene Weise. 1) Machen sie die verschiedenen Herzhöhlen während der Diastole geräumiger. 2) Erschweren sie die Systole des Herzens und zwar die der Atrien mehr als die der Ventrikel und die des rechten Ventrikels mehr als die des linken. 3) Er-

weitern sie (ceteris paribus) die Lungengefässe, vermindern sie jedenfalls den Widerstand, welcher dem Blute geboten wird, das durch die Lungen strömt. Wenn die Druckerniedrigung auf die Oberfläche des Herzens wenig abgenommen hat, kommen fast nur die Beförderung der Diastole und die Erweiterung der Lungengefässe zur Geltung. Sei es auch, dass die Systole des rechten Herzens um etwas gehemmt wird, so können die zwei anderen Momente die Ursache sein, dass in der Zeiteinheit doch mehr Blut aus dem Herzen fliesst als im normalen Zustande. Sobald jedoch die Hemmung der Systole eine gewisse Höhe erreicht hat, wird die Menge des ausströmenden Blutes geringer und also der arterielle Druck niedriger.«

Durch diese kurze Uebersicht einiger dem wichtigen Gegenstande gewidmeten Arbeiten wollte ich nur andeuten, welche Gesichtspunkte für die bisherigen Untersucher leitend waren.

Rollett's eingehende Darstellung der einschlägigen Arbeiten (die bis zum Jahre 1880 erschienen) in Hermann's Handbuch der Physiologie (B. IV. Theil 2. Cap. 4 u. 5) macht hier vollständige Referate entbehrlich. Doch habe ich wenigstens die Titel aller diesem Gegenstande gewidmeten Arbeiten im Anhange zusammenzustellen versucht.

Die wichtige Frage ist noch unbeantwortet und die Lücke wird in den verbreiteten Lehrbüchern bedauert.

Wir haben daher versucht, unter den einfachsten Bedingungen den causalen Zusammenhang zwischen künstlicher Athmung und Blutdruck aufzuklären.

Dem Einen von uns steht ein grosses Curvenmaterial zu Gebote aus zahlreichen früheren Versuchen, welche Nicolaides und J. Sander über den Einfluss von Reizungen der Gefässnerven auf den Blutdruck angestellt hatten. Nach den oben erwähnten Anschauungen von Schiff, S. Mayer, Fredericq und deren Mitarbeitern sollte Erregung des Gefässnervencentrum in der Medulla oblongata die respiratorischen Blutdruckschwankungen modificiren resp. in maximaler Höhe aufheben. — Wir fanden aber, dass auch nach Abtrennung der Vagi (also bei ziemlich constanter Pulsfrequenz) bei Hunden, Kaninchen und Katzen keine feste Beziehung zwischen Höhe der circulatorischen Athemwellen und der Grösse des mittleren Blutdruckes besteht. Beifolgende Curvenbeispiele zeigen, wie mannichfaltige Modificationen unter solchen Umständen auftreten. Die künstliche Athmung wurde

in jeder Hinsicht gleichartig gehalten, indem ein Wassergebläse mit constantem (beliebigem) Drucke (gewöhnlich 30—40 cm Hg) die Athmungsluft in genau gleichmässig gehaltenen Intervallen der Trachea des Versuchsthieres zuführte: derart, dass der mittlere Blutdruck eine Stunde und länger gleich erhalten werden konnte. Dennoch änderten sich oft die circulatorischen Athemwellen, wenn der Mitteldruck durch Gefässinnervation alterirt wurde.

Häufig wurden die Resp.-Wellen höher, wenn der Blutdruck stieg. Als ein Beispiel diene das auf Tab. I, Fig. 1 facsimilirte Curvenstück [1]).

Oft wurden die Schwankungen um so beträchtlicher, je stärker der Mitteldruck wuchs.

In manchen Fällen erschienen bei geringer Druckhebung beträchtliche Wellen Figg. 2 u. 8; in anderen Fällen wieder trotz bedeutender Hebung nur geringe Wellen Fig. 3.

In noch anderen Versuchen änderten sich die Wellen gar nicht, während der Blutdruck stieg und sank.

Dagegen kam es auch nicht selten vor, dass die Respirationswellen klein oder unmerklich waren bei hohem Blutdrucke, dagegen hoch wurden, während der Blutdruck sank, Figg. 4 u. 5.

Zuweilen blieben bei tiefem wie bei hohem Blutdrucke die respiratorischen Schwankungen unmerklich: Fig. 7, oder traten unregelmässig wechselnd auf: Fig. 6.

Endlich konnte man auch beobachten, dass im einen oder anderen Falle die Wellen einen anderen Rhythmus einhielten als die Athmung. Figg. 6 u. 7 (am Ende), Figg. 9, 10 u. 11.

Bei alledem erschien es ganz gleichgültig, ob der Blutdruck durch Elektrisiren der Medulla obl., des Rückenmarks oder der Splanchnici gesteigert worden Fig. 8, ob die Steigerung durch Strychnin oder Asphyxie hervorgebracht worden. Figg. 4 u. 5.

Auffällig war es, dass durch manche chemische Agentien, besonders durch kohlensaures Natron, welches in das Arteriensystem gelangte, tiefe und frequente Traube'sche Wellen hervorgerufen werden

---

1) In allen hier illustrirten Fällen waren die Versuchsthiere (durch Morphium) anästhesirt und (durch Curare) paralysirt. Die wissenswerthen Eingriffe sind unter den Curvenbeispielen notirt.

konnten. Während derselben war dann oft die künstliche Athmung gar nicht merklich, selbst nicht, wenn wir dieselbe unter hohem Drucke wirken liessen. Figg. 9, 10 u. 11.

Es geschah dann wohl auch, dass zeitweilig die Athmung zur Geltung kam, zeitweilig wieder unmerklich wurde. In einigen Fällen bemerkten wir sogar vorübergehend einen sonderbar regelmässigen Rhythmus in der Wellenfolge derart, dass eine Athmung wenig wirksam war, die nächste wirksamer und so fort. Fig. 11.

Vergeblich versuchten wir auf nervösem und auf mechanischem Wege den Lungenkreislauf zu beeinflussen und hierdurch die Wellen zu modificiren (Fig. 16). Vergeblich durchtrennten wir die Phrenici und Vagi (Fig. 5) und verschlossen die Bauchaorta, vergeblich auch durchtrennten wir das Zwerchfell.

Als wir aber die Bauchhöhle mit Flüssigkeit anfüllten, sahen wir zu wiederholten Malen die Athmungswellen verschwinden. Das Gleiche geschah, wenn wir die Vena cava inf. comprimirten, während bei Compression der Aorta abd. die Athemwellen mit dem Drucke wuchsen (Fig. 20), bei Verschluss der Vena portarum nur mit dem Mitteldruck die Wellen auch niedrig wurden.

Da nun Dr. Haslam im hiesigen physiologischen Institute gefunden hatte, dass ein ganz geringer intraperikardialer Druck (8—10 cm Wasser) genügt, um den arteriellen Blutdruck zum Verschwinden zu bringen und dass 2 cm Wasserdruck, unter welchem die Herzbeutelhöhle gefüllt wurde, den Blutdruck in der Carotis schon merklich mindern, so lenkten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Druck, der von den Lungen das Herz trifft.

Wir öffneten, wie Viele vor uns gethan, den Brustkasten, und wir bemerkten im Gegensatz zu Vielen, dass die Athemwellen danach oft merklich kleiner wurden (Fig. 15). Wenn wir den Thorax zuhielten, wurden die Oscillationen wieder grösser; wenn wir die Lungen vom Herzen möglichst zurückzuhalten versuchten, wurden die Wellen ebenfalls kleiner; wenn wir das Herz auf dem gespaltenen Perikard zur Oeffnung des Brustkastens emporhoben, wurden die Schwankungen desto kleiner, je weniger die aufgeblasenen Lungen das Herz oder die einmündenden Venenstämme erreichten, und verschwanden zuweilen fast völlig, ohne dass der mittlere Druck sehr litt. Figg. 12, 13 u. 14.

Deutlicher als diese Analyse sprach die Synthese. Jeder leichte Druck auf das Herz störte sogleich die Form der Athemwellen, Figg. 15 u. 16. Endlich machten wir den Versuch, die Athmungsluft direct durch den Herzbeutel zu treiben, anstatt in die Lungen. Wir banden in die Spitze des Herzbeutels eine »Perfusionscanüle«, welche sonst zur Durchspülung der Froschherzkammer diente, und brachten das eine der freien Gabelenden des Y-förmigen Doppelröhrchens in Verbindung mit dem Athmungsapparate, während auf das andere Gabelende ein Kautschukschlauch gesteckt war, der durch eine Schraubenschlauchklemme beliebig verengt werden konnte. Die rhythmisch eingeblasene Luft konnte man so unter grossem oder kleinem Widerstande entweichen lassen. Das diastolisch sich erweiternde Herz trieb die Luft, während die Einblasung unterbrochen wurde, aus dem Herzbeutel. So entstanden ausnehmend starke Blutdruckschwankungen, ganz analog den Schwankungen, welche wir erhielten, wenn wir die Lunge aufbliesen. Fig. 17.

Wir combinirten nunmehr Lungenathmung mit perikardialer Einblasung und erhielten einfache Wellenzüge. Immer aber war Anblasen des Herzens wirksamer, wenn es direct erfolgte, als vermittelst der zwischengeschalteten Lungenwände. Daneben zeigte sich, dass dieses Luftdrücken für die Erhaltung der Herzkraft sehr günstig war. Figg. 17 u. 18. Die rhythmischen Drucke wirkten wie Massage, welche ja von Boehm zur Belebung des asphyktischen Herzens empfohlen ist.

Welcher Art der Einfluss des Druckes ist, darüber kann man nicht mehr im Zweifel sein.

Jede Behinderung der Herzdiastole erniedrigt den Blutdruck. Sobald also die Inspiration der Lunge einen solchen Grad erreicht hat, dass das Herz bedrängt wird, so werden die Diastolen beeinträchtigt und damit sinkt die Spannung im Aortensysteme. Fig. 19. Sobald die Luft aus den Lungen entweichen kann und dieselben zusammenfallen, wird das Herz mehr gefüllt und der arterielle Druck steigt, da sich ja, wie Ludwig und seine Schüler gezeigt haben, das normale Herz mit jeder Systole vollkommen entleert..

Sobald also die künstliche Athmung (bei offener Trachea) unterbrochen wird, steigt der Blutdruck; sobald die Athmung (natürlich mit Inspiration) beginnt, sinkt der arterielle Druck. Figg. 21 u. 22.

Woher kommen aber die oben erwähnten seltsamen Modificationen unter gleichen Druckbedingungen in der Brusthöhle?

In erster Linie sind es arterielle (vermuthlich peripher verursachte) Gefässkrämpfe, welche durch wechselnde Widerstände die Druckwellen verunstalten, sodann aber hat sicherlich auch das Herz unter wechselnder Dehnbarkeit zu leiden. Auch dieses kann unter nervösen Einflüssen geschehen, wie dies ja N. Baxt in Ludwig's Institut bei Accelerans-Reizung beobachtet hat. Die Veränderungen der Widerstände in der Lunge spielen aber wohl nur eine kleine Rolle bei den Blutdruckschwankungen in dem Aortensysteme. Verschluss oder Oeffnung einer Pulmonalis beeinflusst ja, wie schon Lichtheim gezeigt hat, den Blutlauf nur unmerklich.

So haben uns also die Gesichtspunkte, welche durch C. Ludwig schon Gerau und Einbrodt geboten wurden, einen Schritt näher geführt zum Verständniss der circulatorischen Athemfunctionen.

Die regelmässige Athmung bewirkt eine heilvolle Massage des Herzens.

Verzeichniss der Arbeiten über den Einfluss der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme.

(Nach den Namen der Autoren in alphabetischer Reihenfolge geordnet.)

d'Arsonval, Recherches théoriques et expérimentales sur le rôle de l'élasticité du poumon dans les phénomènes de circulation. Thèse de Paris. 1877.

Autenrieth, J. H. F., Handbuch der empirischen menschlichen Physiologie. § 374. III Bde. Tübingen. 1801.

Barry, Dav., Recherches expérimentales sur les causes du mouvement du sang dans les veines. Paris. 1825.

v. Basch, Ueber den Einfluss der Athmung von comprimirter und verdünnter Luft auf den Blutdruck des Menschen. Medic. Jahrbücher der Aerzte zu Wien. Heft 4. 1877.

Baumgärtner, H. K., Beobachtungen über die Nerven und das Blut in ihrem gesunden und krankhaften Zustande. Freiburg. 1830.

Bert, Paul, La pression barométrique. Paris. 1877.

Bichat, Xav., Recherches physiologiques sur la vie et la mort. IIe édit. Paris. p. 146. 1802.

Boissier de Sauvages, De aeris transitu in pulmones. In actis Monspeliensis Academiae. 1743.

Borden, Recherches sur le pouls par rapport aux crises. Paris. 1752.

Bourdon, J., Recherches sur le mécanisme de la respiration et sur la circulation du sang. Paris. 1820.

——, Sur la respiration et la circulation. Paris. 1823.

Bowditch and Garland, The effect of the respiratory movements on the pulmonary circulation. Journal of physiologa II. No. 2. Cambridge. 1879.

Bremond, Ad motum cordis experimenta. Experimenta de respiratione. 1739.

Brown-Séquard, Faits nouveaux relativs à la coïncidence de l'inspiration avec une diminution dans la force et la vitesse des battements du coeur. Gaz. méd. 1876.

——, Note sur l'association des efforts inspiratoires avec une diminution ou l'arrêt des mouvements du coeur. Journ. de la physiol. 1858.

Burdon-Sanderson, On the influence exercised by the movements of respiration on the circulation of the blood. The croonian lecture. London. 1867.

——, Proceed. of the royal Soc. of London. XV. p. 391. 1867.

——, On the influence of the movements of respiration on the circulation of the blood. London 1868. Vergl. Handbook for the physiological Laboratory. London. p. 318. 1874.

Burdach, K. F., Vom Baue und Leben des Gehirnes. III Bde. Leipzig. 1819—1826.

Carson, James, An inquiry into the causes of the motion of the blood. Liverpool. p. 118. (Cit. in Burdach's Physiologie Bd. IV. S. 446.) 1815.

——, On the elasticity of the lungs. Philosoph. Transact. Vol. CX. 1820.

Ceradini, La meccanica del cuore. Omod. anniv. univ. 1870.

Cloquet, De l'influence des efforts sur les organes renfermés dans la cavité thoracique. Paris. 1820.

Cotugni, Giornale per servire alla storia raggionata della medicina di questo secolo. Tom. VII. p. 476. Venezia. Cit. in Burdach's Phys. Bd. IV. S 442. 1791.

Cyon, E., Zur Physiologie des Gefässnervencentrums. Pflüger's Archiv IX. (Gesammelte Abhandl. Berlin 1888. S. 149 u. 170.) 1874.

Dalske, De influxu respirationis in motum cordis. 1730.

Defermon, Archives générales de médécine. XVII. p. 314. Paris. Cit. v. Burdach. Phys. IV. S. 442. 1823.

Dietrich, J., Die Wirkung comprimirter und verdünnter Luft auf den Blutdruck. (v. F. Riegel, Berichtigung dieser Arbeit.) Arch. f. exp. Path. XVIII. 242—259. 1884.

Donders, Bijdrage tot het Mechanisme van Ademhaling en Bloed-samloop. Nederlandsch Lancet Tom. V. 2e serie. S. 354. 1849.

——, Beiträge zum Mechanismus der Respiration und Circulation im gesunden und kranken Organismus. Zeitschr. f. ration. Med. Neue Folge. Bd. III. 1853.

Drosdoff und Botscheschkaroff, Die physiol. Wirkung der im Waldenburgschen Apparate comprimirten Luft auf den arteriellen Blutdruck der Thiere. Centralbl. für die medic. Wissenschaft. S. 65. 1875.

Drosdoff, Ueber die Wirkung der Einathmung von verdichteter und verdünnter Luft. Idem. Ss. 773 u. 785. 1875.

Ducroq, Ueber die volum. Bestimmung des Blutdrucks am Menschen. Wiener med. Jahrb. 1876.

Dupuy, F., Rapports généraux des mécanismes circulatoires et respiratoires. Gaz. méd. 1867.

Einbrodt, Ueber den Einfluss der Athembewegungen auf Herzschlag und Blutdruck. Wiener Akad. Sitzungsberichte. Bd. XL. S. 345. 1860.

Emmert, A. G. F., Ueber die Unabhängigkeit des kleinen Kreislaufs von dem Athmen. Rail's Arch. Bd. V. S. 401. 1802.

Floyer, J., Praeternatural state of humours. London. 1696.

François-Franck, Du volume des organes dans ses rapports avec la circulation du sang. Physiologie expérim. Travaux du lab. de M. Marey. 1876.

Fredericq, Sur la théorie de l'innervation respiratoire. Bulletins de l'académie royale de Belgique. 2e ser. T. XLVII. No. 4. 1879.

——, L'ascension inspiratoire de la pression carotidienne chez le chien. Bull. de l'Acad. royale de Belgique. 3e série. T. III. No. 1. 1882.

——, Sur le ralentissement du rythme cardiaque pendant l'expiration. ibid. T. III. No. 2. 1882.

——, Sur l'existence d'un rythme automatique commun à plusieurs centres nerveux de la moelle allongée. Comptes rendus. 9. janvier. 1882.

——, Sur les discordances entre les variations respiratoires de la pression intracarotidienne et intrathoracique. Comptes rendus. 17. janvier. 1882.

——, Sur la discordance entre les variations respiratoires de la pression intracarotidienne et intrathoracique. Comptes rendus. XCIV. p. 141—143. 1881.

——, De l'influence de la respiration sur la circulation. I. partie: Les oscillations respiratoires de la pression arterielle chez le chien. Archives de Biologie. T. VIII. 1882.

——, Sur les oscillations de la pression sanguine dites periodes de Traube-Hering. Bulletins de l'académie royale de Belgique. 3me série. T. II. No. 12. 1881. T. II. No. 12. 1881, et 3me série. T. III. No. 1. 1882.

Frey, H., Versuch einer Theorie der Wellenbewegung des Blutes in den Arterien. J. Müller's Arch. S 218. 1845.

——, Von den verschiedenen Spannungsgraden der Lungen-Arterien. Arch. f. physiol. Heilkunde. Bd. V. S. 520. 1846.

Funke und Latschenberger, Ueber die Ursachen der respiratorischen Blutdruckschwankungen im Aortensysteme. Pflüger's Archiv. XV. S. 405. 1877.

——, Ueber die Ursachen der respiratorischen Blutdruckschwankungen im Aortensysteme. ebend. XVII. S. 547. 1878.

Gad, Ueber Athemschwankungen des Blutdruckes. du Bois-Reymond's Archiv f. Physiol. Ss. 287—89. 1880.

Gautier, J., Des phénomènes mécaniques de la respiration. Paris. 1844.
Gautier, Ch., Influences mécaniques de la respiration sur la circulation artérielle. Thèse de Paris. 1876.
——, Des rapports de la pression artérielle et de la respiration. Paris. 1877.
Goodwyn, The connection of Life with Respiration. London. 1788.
Gréhant, Comptes rendus de l'Académie des Sciences. LXXIII. p. 274. Paris. 1871.
Grunmach, E., Ueber den Einfluss der verdünnten und verdichteten Luft auf die Respiration und Circulation. Zeitschr. f. klin. Med. V. Ss. 469—70. 1882.
Günsburg, M., Einfluss der Athmung in comprimirter und verdünnter Luft auf den Blutdruck in den Arterien und Venen, sowie auf den Herzschlag (russisch). Moskauer med. Zeitung. Nr. 29—32. 1875.
Guyon, F., Note sur l'arrêt de la circulation carotidienne pendant l'effort. Archives de physiologie. Paris. 1866.
Hales, Stephan, Vegetable statiks, animal statiks. Londini. 1733.
Haller, A., Elementa physiologiae corporis humani. Lausannae. Vol. II et III. 1760—1761.
——, Opera minora anatomici argumenti. III Vol. Lausannae. 1762.
——, De vasis cordis. 1737. De valvula Eustachii. 1738.
Hamernjk, Ueber einige Verhältnisse der Venen der Vorhöfe und Kammern des Herzens und über den Einfluss der Contractionskraft der Lungen und der Respirationsbewegungen auf den Circulationsapparat. Prager Vierteljahrsschr. III. Ss. 32—103. 1853.
Hasse, C., Ueber die Bewegungen des Zwerchfells und über den Einfluss derselben auf die Unterleibsorgane. Arch. f. Anat. u. Entwicklgesch v. His u. Braune. S. 185. Leipzig. 1886.
Heger, P., Expériences sur la circulation du sang dans les organes isolés. Thèse de Bruxelles. 1875.
——, Recherches sur la circulation du sang dans les poumons. Annales de l'Université de Bruxelles. I. 1880.
Heger et Spehl, Recherches sur la fistule péricardique chez le lapin. Archives de Biologie. II. p. 154. 1881.
Heidenhain, R., Die Einwirkung sensibler Reizung auf den Blutdruck. Pflüger's Archiv IX. S. 250. 1874.
Henschaw, Nathanael, In aerochalino. Londini. (Cit. in Haller. Methodus studii medici. p. 348.) 1677.
Hering, Ueber Athembewegungen des Gefässsystems. Wiener Sitzungsberichte XL. S. 829. 1869.
Heynsius, A., Sur la valeur de la pression négative intrathoracique pendant la respiration normale. Harlem. A. 1882.
Holmgren, F., Methode zur Beobachtung des Kreislaufs in der Froschlunge. Beitr. z. An. u. Phys. Festgabe f. C. Ludwig. Leipzig. 1874.
Hooke, Rob., Lectures physical, medic. geographic. etc. Londini. 1679 u. 1726.

Hooker, Charles, An essay on the relation between the respiratory and circulating functions. Boston M. and Surg. Journ. 1838.

Jacobson, H., und Lazarus, Ueber den Einfluss des Aufenthaltes in comprimirter Luft auf den Blutdruck. Med. Centralbl. S. 929. 1877.

De Jager, Ueber den Blutstrom in den Lungen. Pflüger's Archiv. XX. S. 426. 1879.

——, Die Lungencirculation und der arterielle Blutdruck. Ibid. XXVII. Ss. 152—189. 1882.

——, Les oscillations de la pression sanguine artérielle lors de la respiration par soufflet et de la respiration dans l'air condensé ou raréfié. Avec 2 pl. Arch. Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. XX. p. 303. 1882.

——, Welchen Einfluss hat die Abdominal-Respiration auf den arteriellen Blutdruck? Pflüger's Arch. XXXIII. Ss. 17—51. 1883.

——, Die Schwankungen in dem arteriellen Blutdrucke bei Blasebalgrespiration und bei Respiration in comprimirter und verdünnter Luft. Pflüg. Arch. XXXVI. Ss. 309—347. 1885.

——; Die Respirationsschwankungen im arteriellen Blutdruck beim Kaninchen. Ibid. XXXIX. S. 171. 1886.

Kaan, De perspiratione Hippocratica. Leidae. 1739.

Kay, J. P., Physiol. Experiments and Observ. on the Cessation of the Contractility of the Heart and Muscles of Warm-Bloodet Animals. Edinb. Med. and Surg. Journal. XXIX. p. 37. 1828.

Klemensiewicz, Ueber den Einfluss der Athembewegungen auf die Form der Pulscurven beim Menschen. Sitzungsber. der Acad. d. Wissenschaften Wien. LXXIV. III. Abth. Dec.-Heft. 1876.

Knoll, Ueber den Einfluss modificirter Athembewegungen auf den Puls beim Menschen. Prag. 1880.

——, Ueber periodische Athmungs- und Blutdrucksschwankungen. Wiener Sitz.-Berichte. XCII. III. Abth. 1885.

Kowalewsky, N., Ueber die Einwirkung der künstlichen Athmung auf den Druck im Aortensystem. du Bois-Reymond's Arch. f. Physiologie. S. 416. 1877.

Kuhn, Over de Respiratie-schommelingen der slagaderlijke Bloedsdrukking. Amsterdam. 1875.

Kupfer, H. E., Commentatio physiologico-medicade vi, quam aer pendere suo et in motum sanguinis et in absorptionem exercet. Lipsiae. 1828.

Kuss, Alb., Étude sur la pneumatométrie et la pneumothérapie. (Nancy.) Strasbourg. 1876.

Lambert, Étude clinique et expér. sur l'act. de l'air compr. et raréfié dans les malad. des poum. et du coeur. Paris. 1877.

Lamure, Recherches sur la pulsation des artères, sur le mouvement du cerveau dans les trépanés et sur la couenne du sang. Montpellier. 1769.

Landois, Ueber die Bewegung und Volumveränderung der Gase in den Lungen während der Herzbewegung. Berl. klin. Wochenschr. 1880.

Latschenberger und Deahna, Beiträge zur Lehre von der reflectorischen Erregung der Gefässmuskeln. Pfl. Arch. XII. S. 157. 1876.

Lazarus und Schirmunski, Ueber die Wirkung des Aufenthalts in verdünnter Luft auf den Blutdruck. Ztschr. f. klin. Med. VII. Ss. 299—313. 1883.

Legros et Griffé, Note sur l'influence de la respiration sur la pression sanguine. Bull. de l'Acad. roy. de Belg. 3e série. T. VI. p. 153. No. 8. 1883.

Lenzmann, Ueber den Einfluss der Anwendung transportabler pneumatischer Apparate auf die Circulation des gesunden Menschen. Ctrlbl. f. klin. Med. Nr. 29. 1881.

v. Liebig, G., Wirkung der saugenden Spannung im Pleuraraum auf die Circulation. Sitzber. der Ges. f. Morphologie u. Physiologie. München. 1885.

Lorain, P., Le pouls. Étude de med. clinique. Paris. 1870.

Löwit, Ueber den Einfluss der Respiration auf den Puls des Menschen. Arch. f. exp. Path. X. S. 412. 1879.

Luchsinger, B., Zur Kenntniss der Functionen des Rückenmarkes. II. Die dyspnoischen Erregungen der Gefässwand. Pfl. Arch. XVI. S. 518. 1878.

Luciani, Delle oscillazioni della pressione intratoracica et intraabdominale. Torino. 1877.

Ludwig, C., Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Resp.-Bewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Arch. f. Anat. u. Phys. S. 242. 1847.

Magendie, F., De l'influence des mouvements de la poitrine et des efforts sur la circulation du sang. Journal de phys. expér. et pathol. I. p. 316. Paris. 1821.

Marey, La circulation du sang. pp. 437, 453. Paris. 1881.

Martin, N., und Donaldson, F., Experiments in Regard to the supposed suction pump action of the Mammalian Heart Studies from the biolog Labaratory. John's Hopkins Univ. Baltimore. Vol. IV. 1887.

Marx, Henr., Diatribe anatomico-physiologica de structura atque vita venarum. Carlsruhae. 1819.

Maurocordatus, Alex., De pulmonum usu. Pneumaticum circulationis sanguinis instrumentum. Francofurt. 1665.

Mayer, Sig., Ueber spontane Blutdruckschwankungen. Sitzungsber. d. Wiener Akad. LXXIV. S. 281. 1876.

Mayow, J. M., Tractatus quinque physico-medici, quorum secundus agit de respiratione. Oxford. 1669 u. 1674.

Milne-Edwards, Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée de l'homme et des animaux. T. IV. p. 238. 1857.

Mislawsky, Ueber Blutbewegung in den Lungen bei verschiedenen Phasen der Athmung (russisch). Protoc. der Ges. d. Naturf. in Kasan. 1878.

Moreau, J., et Lecrénier, A., Sur les variations respiratoires de la pression sanguine chez le lapin. Arch. (belges) de biologie. III. pp. 285—290. 1882.

Mosso, Sull' azione fisiologica dell' aria compressa. Torino. 1877.

——, Sulla circulazione del sangue nel cervello dell' uomo. Accad. dei Lincei. V. Cap. 10 e 11. 1880.

Mosso, Applicazione della bilancia allo studio della circolazione sanguigna nell' uomo. Accad. dei Lincei XIX u. Arch. ital. de biologie V. 1884.

Mordhorst, C., Ueber den Blutdruck im Aortensysteme und die Vertheilung des Blutes im Lungenkreislaufe während der In- und Exspiration. Pfl. Arch. XX. Ss. 342—355. 1879.

Morgan, Th., philosophical principles of medecine. Lond. 1725.

——, mechanical practice of phys. Lond. 1735.

v. Openchowsky, Ueber die Druckverhältnisse im kleinen Kreislauf. Pfl. Arch. XXVII. S. 233. 1882.

Panum, P. L., Untersuchungen über die physiol. Wirkung der compr. Luft. Pfl. Arch. I. S. 164. 1868.

Parry, C. H., Experimentaluntersuchung über die Natur, Ursachen und Verschiedenheiten des arteriösen Pulses. Hannover (aus dem Englischen übersetzt von E. Embden). 1817.

Pawlow, Ueber die normalen Blutdruckschwankungen beim Hunde. Pfl. Arch. XX. Ss. 215—225. 1879.

Pitcarne, Arch., De circulatione sanguinis per vasa minima. Leyden. 1693.

——, De circulatione sanguinis in genitis et non genitis. Edinburg. 1713.

——, De causis diversae molis qua sanguis fluit per pulmones. Edinburg. 1713.

Piorry, Influence des respirations profondes et accélérées sur les maladies du coeur, du foie, des poumons etc. Compt. rend. de l'acad. des scienc. XLVIII. p. 689. 1858.

Poiseuille, Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les veines. Paris. 1832.

——, Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires. Mém. de l'Acad. des sciences VII. Paris. 1839.

Pokrowsky, Ueber das Wesen der Kohlenoxydvergiftung. Beitrag zur Physiologie der Herzinnervation. Reichert's u. du Bois-Reymond's Arch. S. 59. 1866.

Portal, Histoire de l'académie royale des sciences. p. 554. Paris. (Cit. in Burdach's Physiol. IV. S. 445.) 1768.

Pravaz, J. C. F., Recherches expérimentales sur les effets physiologiques de l'augmentation de la pression atmosphérique. Paris. 1875.

Quincke, H., und Pfeiffer, E., Ueber den Blutstrom in den Lungen. Reichert's und du Bois-Reymond's Arch. S. 90. 1871.

Reichel, Chr., De sanguine eiusque motu experimenta. Lips. 1767.

Reid, J., On the Order of Succession in which the Vital Actions are arrested in Asphyxia. Edinb. Med. and S. Journal. LV. p. 437. 1841.

Richardson, On the balance of the respirating and circulating mechanisms etc. Med. Times. 1867.

Riegel, E., Ueber die respir. Aenderungen des Pulses und den Pulsus paradoxus. Klin. Wochenschr. S. 26. Berlin. 1876.

Riegel, E., und Frank, Ueber den Einfluss der verdichteten und verdünnten Luft auf den Puls. Deutsch. Arch. f. klin. Med. XVII. S. 402. 1876.

Riegel, E., und Frank, Berichtigung zur Arbeit von J. Dietrich. 1884.
Robinson, Bryan, On food and discharges. Haller Meth. p. 320. Lond. 1748.
——, On animal oeconomy. London. 1738.
Rollet, Blut und Blutbewegung. Hermann's Physiologie. Bd. IV. 1. 1880.
Sandahl, Des bains d'air comprimé. Stockholm. 1867.
Santorini, Observationes anat. Venet. 1724.
——, De nutritione animali. Venet. 1705.
Schiff, M., Cenno sulle Richerche fatte dal Prof. M. Schiff nel laboratorio di fisiologia del Mus. di Firenze durante il I. Trimestre 1872. Relazione del Dottore A. Mosso estratto dal Giornale »La Nazione«. Referat v. Boll im Centralblatt f. d. med. Wiss. S. 756. 1872.
Schmidtborn, Die Ursachen der Athembewegungen und ihre Bedeutung für den Kreislauf. Wiesbaden. 1886.
Schreiber, J., Ueber den Einfluss der Athmung auf den Blutdruck in physiol. u. pathol. Beziehung. Archiv f. exper. Path. X. S. 19. 1878.
——, Die Wirkung des veränderten Luftdruckes auf den Blutkreislauf des Menschen. 2. Theil. Ibid. XII. Ss. 117—193. 1880.
Schulmann, De l'influence de la respiration sur la circulation artérielle. Lille. 64 pp. 1887.
Schwartzius, Benj., De vomitu et motu intestinorum. Leiden. 1745.
Schweinburg, Die Bedeutung der Zwerchfellcontractionen für die resp. Blutdruckschwankungen. du Bois-Reymond's Archiv. S. 475. 1881.
——, Weiteres über die Entstehung der respiratorischen Blutdruckschwankungen. Ibid. S. 540. 1882.
Seelig, A., Ueber den Athmungsdruck des Kaninchens. (Langendorff.) Pfl. Arch. XXXIX. S. 237. 1886.
Sénac, M., L'Anatomie de Heister avec des essais de physique sur l'usage des parties du corps humain. Paris. 1724.
——, Traité de la structure du coeur de son action et de ses maladies. Tom. II, livre III, Chap. 8, pag. 238. Paris. 1749.
Sommerbrodt, J., Die Einwirkung der Inspiration von verdichteter Luft auf Herz und Gefässe. Deutsch. Arch. f. klin. Med. XVIII. S. 193. 1876.
Spallanzani, Expériences sur la circulation, observée dans l'universalité du système vasculaire. Ouvrage traduit de l'Italien avec des notes par Tourdes. Paris. 1800.
Spehl, Trois expériences sur la circulation pulmonaire. Journal de médecine. p. 322. Bruxelles. 1880.
Skoda, J., Ueber die Function der Vorkammern des Herzens und über den Einfluss der Contractionskraft der Lunge und der Respirationsbewegungen auf die Blutcirculation. Wien. Zeitschr. d. Ges. d. Aerzte. IX. Ss. 193—211. 1853.
Strack, C., De reliquis instrumentis, quibus praeter cor sanguis in circulum agitur. Mogunt. 1752.
Swammmerdam, Tractatus de respiratione. Sect. II, Cap. 8, § 1. Leid. 1677.

Talma, S., Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respiration auf die Circulation des Blutes. Pflüg. Arch. XXIX. Ss. 311—338. 1882.

Terné van der Heul, De invloed der respiratie phasen op den duur der hartsperioten. Nederl. Arch. voor Genees. 1867.

Thruston, M., De respirationis usu primario. Lond. 1670.

Traube, Versuche über den Einfluss des Worara-Giftes auf die Herzthätigkeit. Centralblatt für die med. Wissenschaften. Nr. 4 u. 5. 1863.

——, Ueber periodische Thätigkeitsäusserungen des vasomotorischen und Hemmungsnerven-Centrum. Centralbl. f. med. Wiss. Nr. 56. 1865.

——, Versuch über den Einfluss des Lungengaswechsels auf das dem Einfluss der Nervi vagi entzogene Herz. Gesammelte Beitr. z. Path. u. Phys. von Dr. L. Traube. 1. Bd. XIII. S. 310. Berlin. 1871.

Vierordt, Die Lehre vom Arterienpuls in gesunden und kranken Zuständen. Braunschweig. 1855.

v. Vivenot, Ueber Veränderungen im arteriellen Stromgebiete unter dem Einflusse des verstärkten Luftdruckes. Virchow's Archiv. XXXIV. 1866.

——, Zur Kenntniss der physiol. Wirkungen und der therapeut. Anwendung der verdichteten Luft. Erlangen. 1868.

Voit, Ueber Druckschwankungen im Lungenraum in Folge der Herzbewegungen. Zeitschr. f. Biol. 1865.

Volkmann, Die Haemodynamik. 1850.

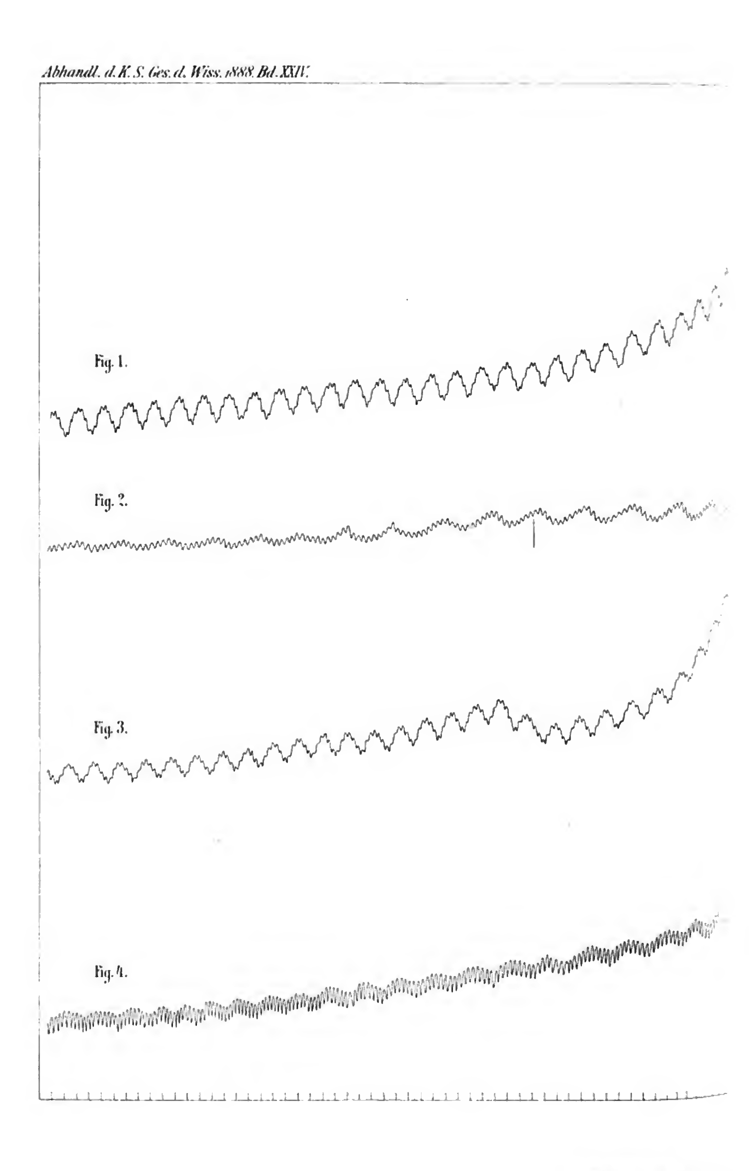
Weber, Eduard, Ueber ein Verfahren, den Kreislauf des Blutes und die Function des Herzens willkürlich zu unterbrechen. J. Müller's Archiv. S. 88. 1851.

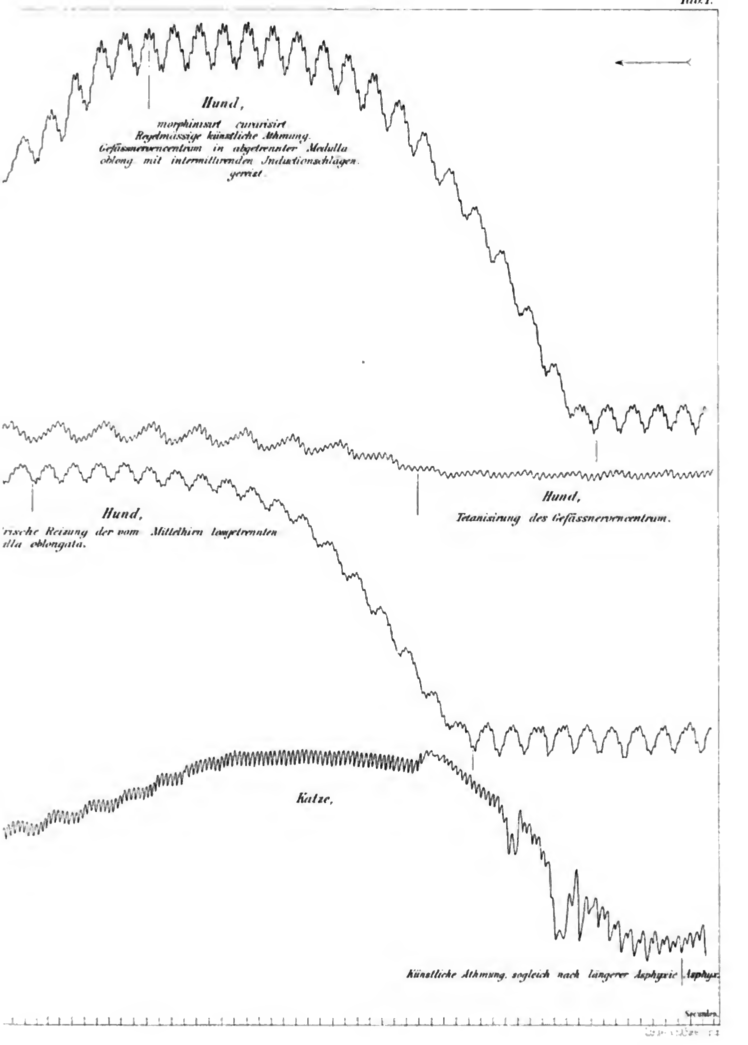
Wedemeyer, G., Untersuchungen über den Kreislauf des Blutes, und insbesondere über die Bewegungen desselben in den Arterien und Capillargefässen. Hannover. 1828.

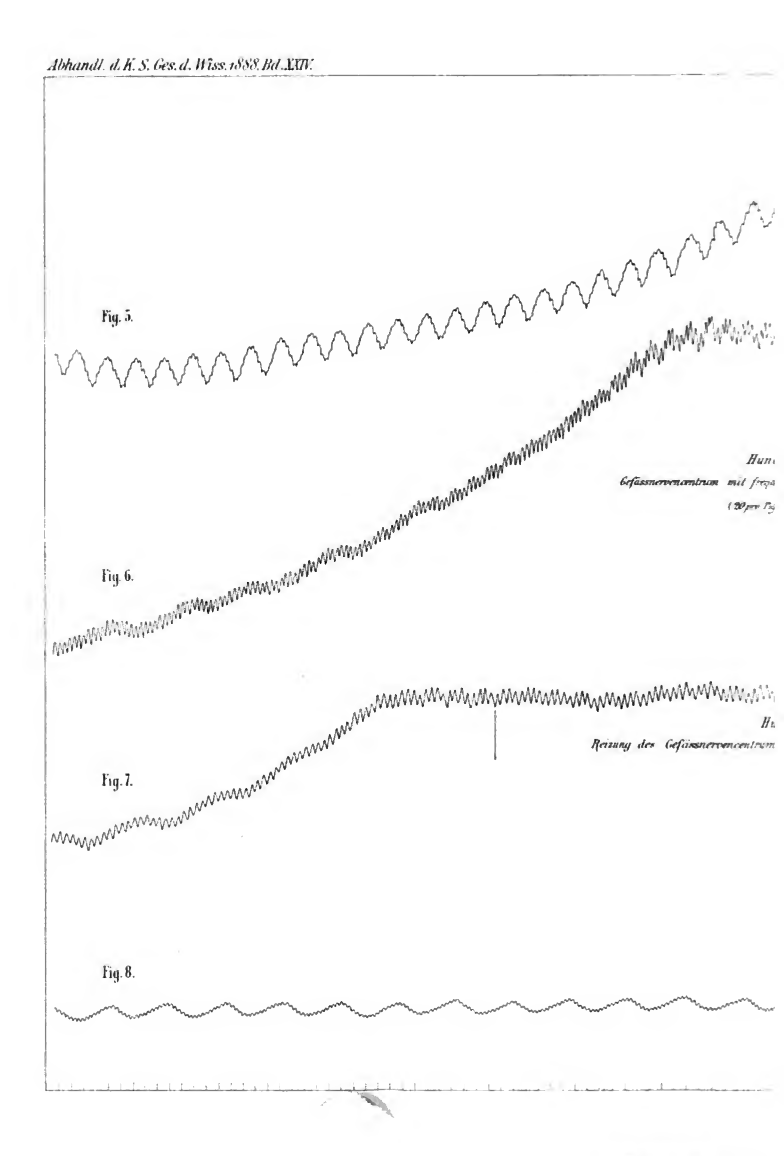
Williams, D., On the Cause and the Effects of an Obstruction of the Blood in the Lungs. Edinb. Med. and Surg. Journ. XIX. p. 524. 1823.

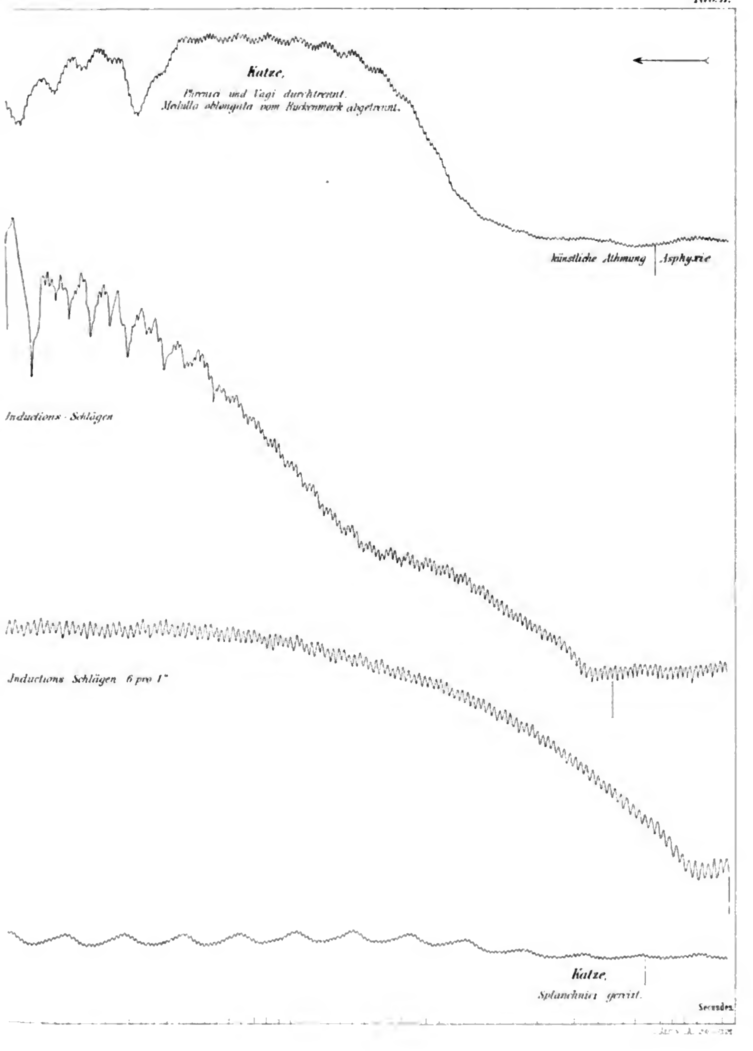
Wilson, Ph., Ueber die Gesetze der Functionen des Lebens. A. d. Engl. übers. von J. v. Sontheimer. Stuttgart. 1822.

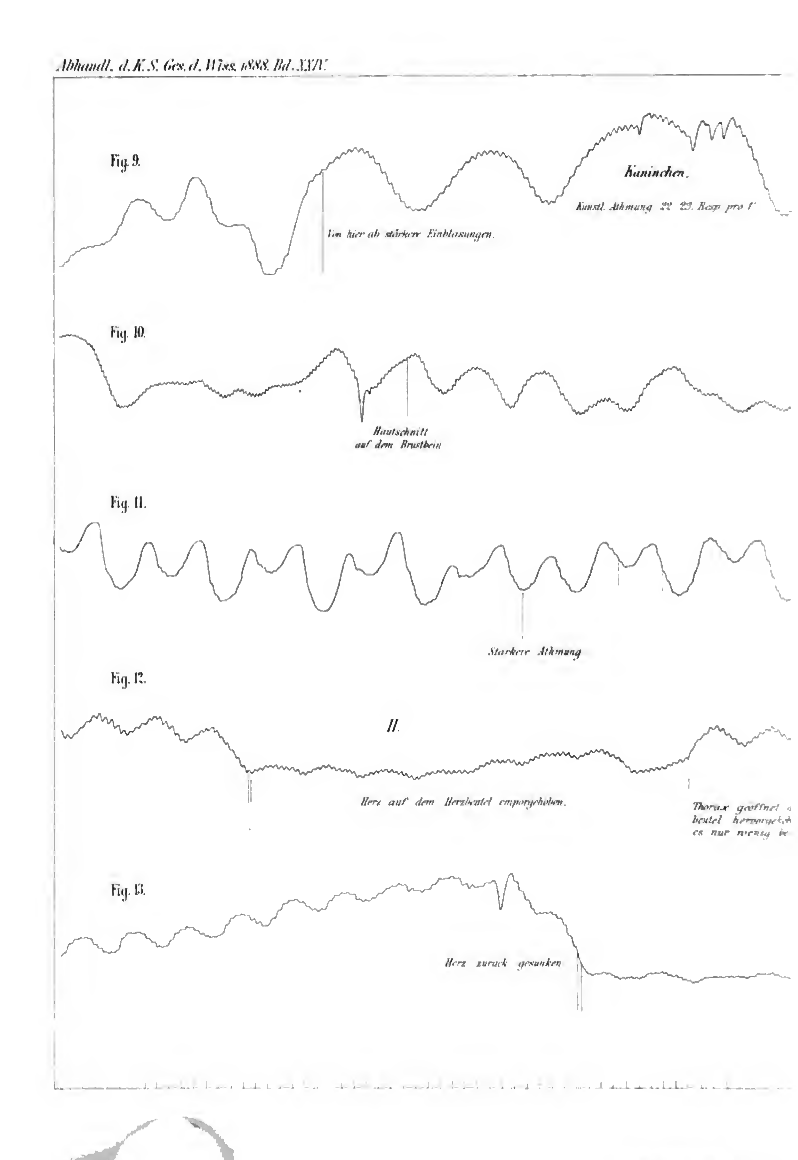
Zuntz, Beiträge zur Kenntniss der Einwirkung der Athmung auf den Kreislauf. Pflüg. Arch. XVII. S. 374. 1878.

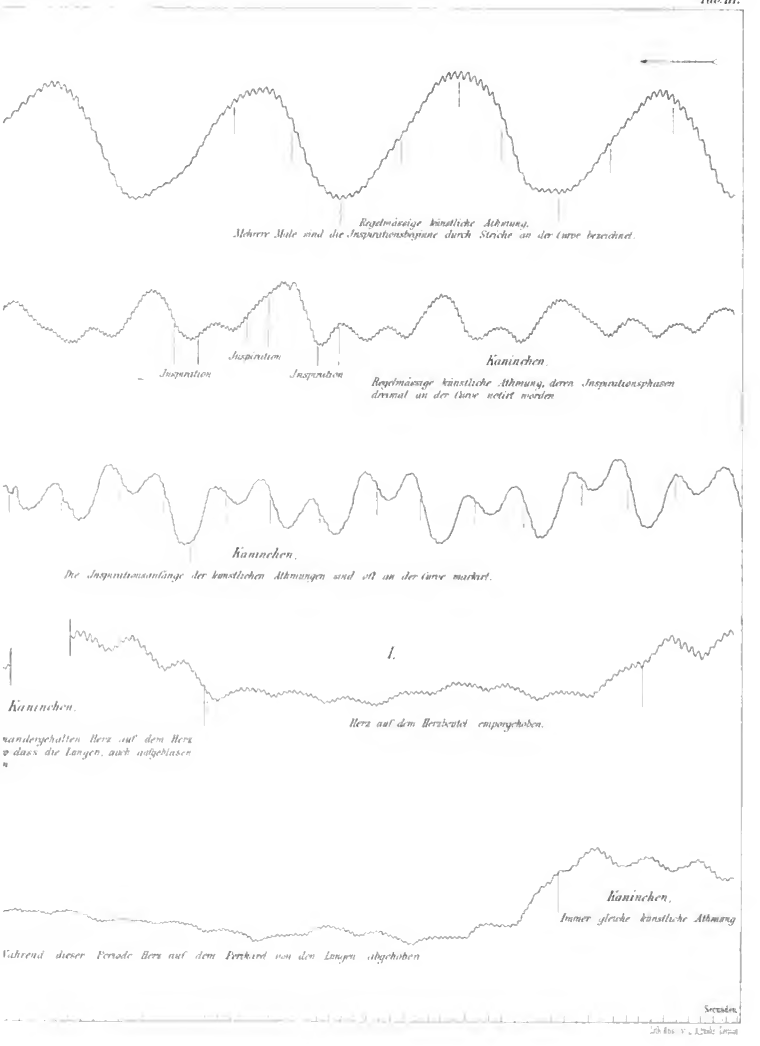

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.

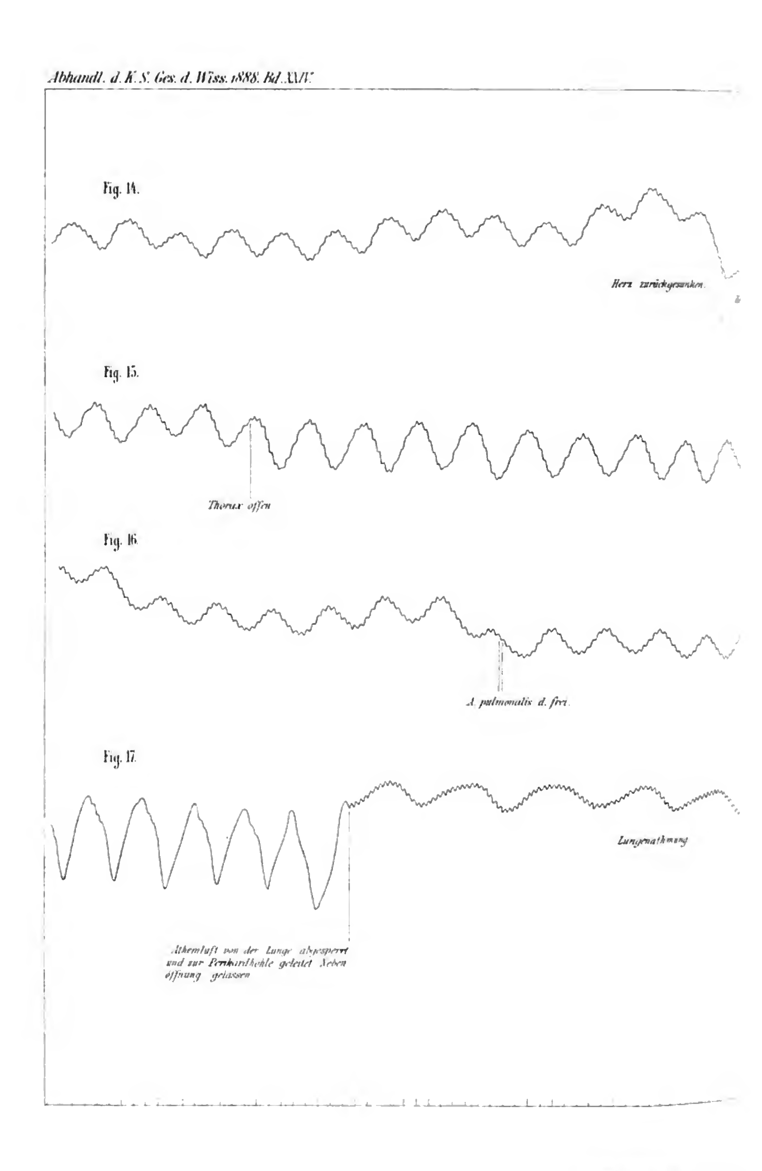

Hund,
morphinisirt curarisirt
Regelmässige künstliche Athmung.
Gefässnervencentrum in abgetrennter Medulla
oblong. mit intermittirenden Inductionsschlägen
gereizt.
Hund,
Tetanisirung des Gefässnervencentrum.
Hund,
rische Reizung der vom Mittelhirn losgetrennten
lla oblongata.
Katze,
Künstliche Athmung, sogleich nach längerer Asphyxie
Asphyx.
Secunden.

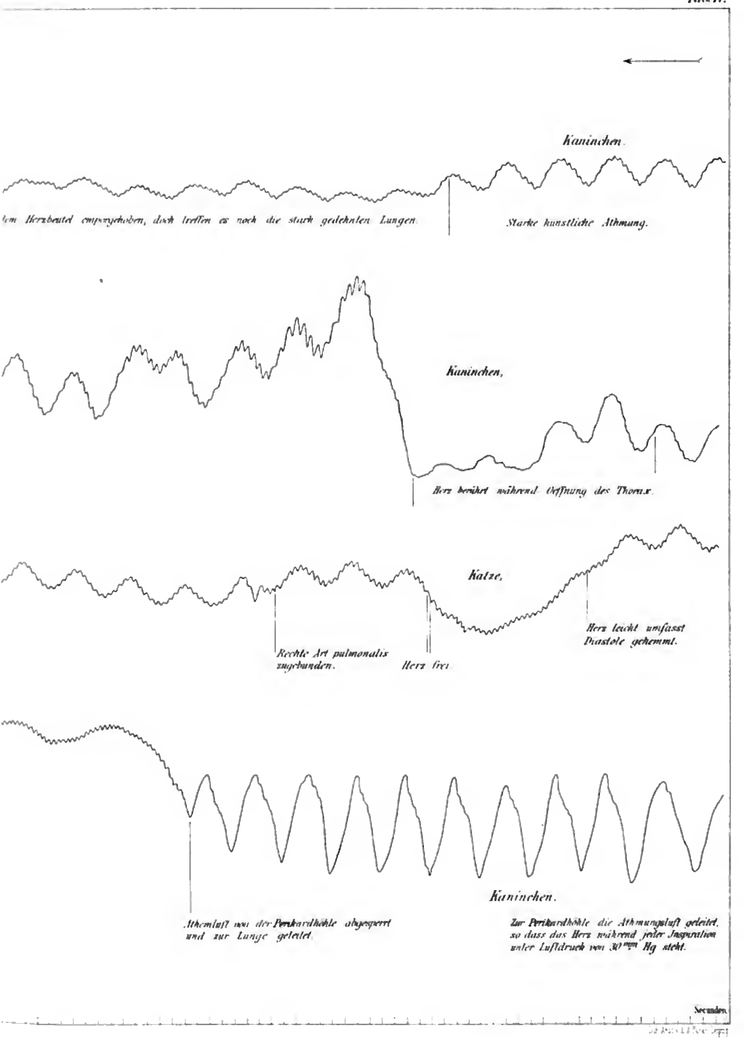

Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Gefässnervencentrum mit frequ
Reizung des Gefässnervencentrum

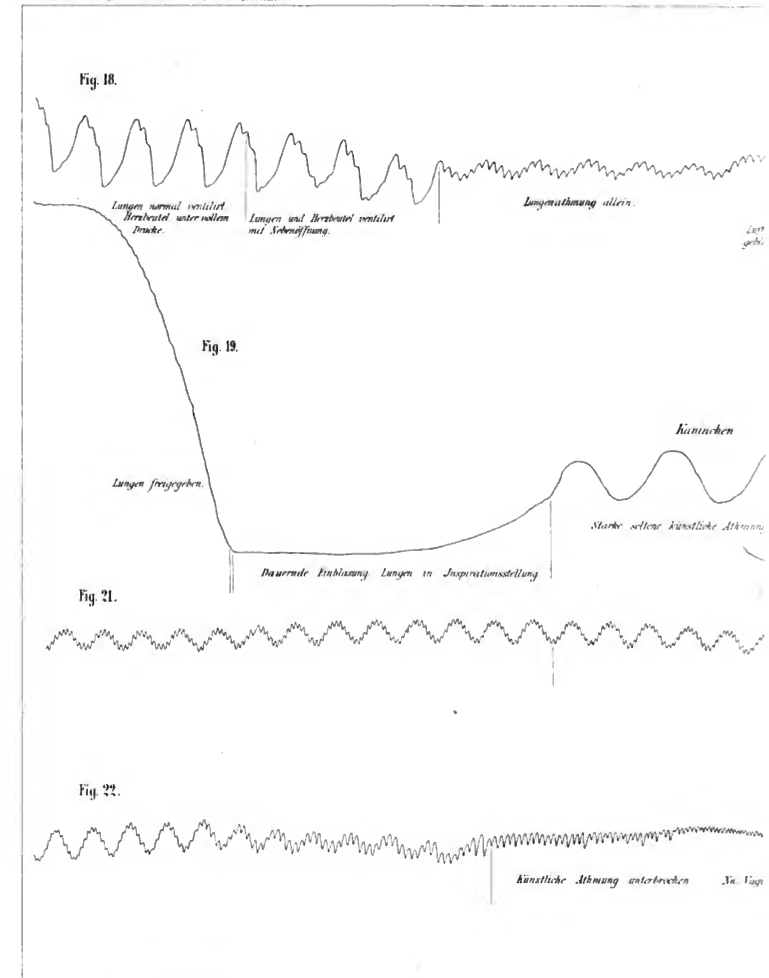

Tab. II.
Katze,
künstliche Athmung
Asphyxie
Inductions-Schlägen
Inductions Schlägen 6 pro 1"
Katze,
Secunden

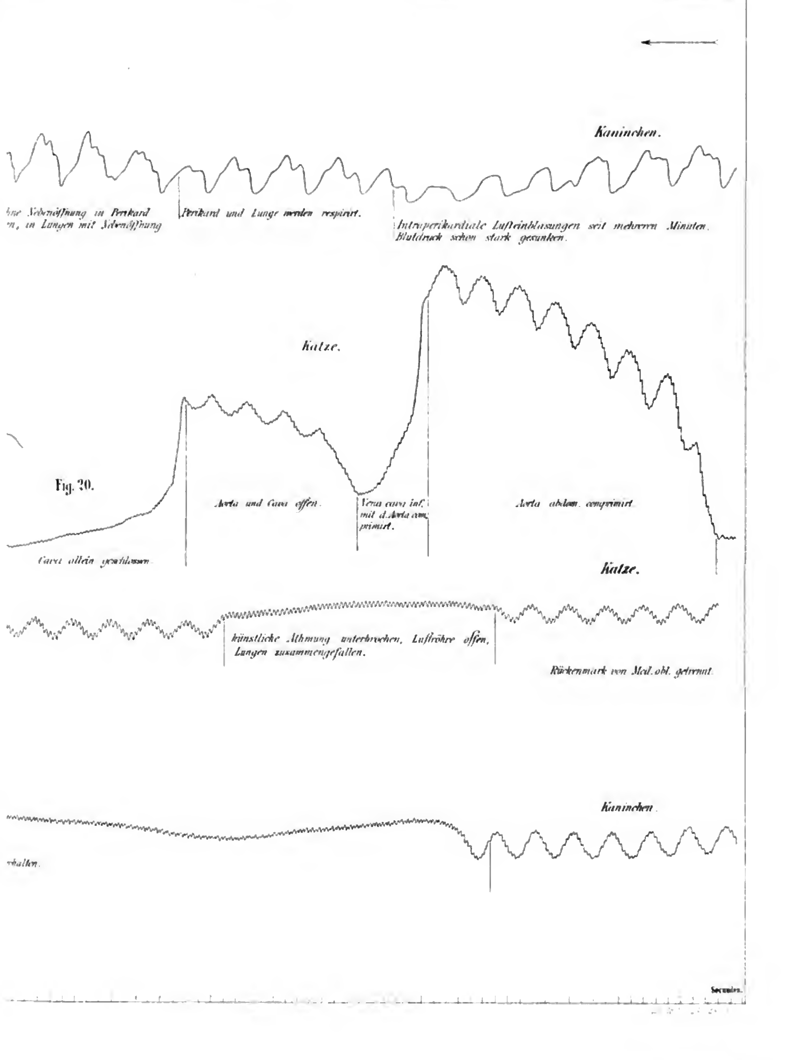

Fig. 9.
Kaninchen.
Künstl. Athmung 22–23. Resp. pro 1'
Von hier ab stärkere Einblasungen.
Fig. 10.
Hautschnitt auf dem Brustbein
Fig. 11.
Stärkere Athmung
Fig. 12.
II.
Herz auf dem Herzbeutel emporgehoben.
Fig. 13.
Herz zurück gesunken


Regelmässige künstliche Athmung.
Mehrere Male sind die Inspirationsbeginne durch Striche an der Curve bezeichnet.
Inspiration
Inspiration
Inspiration
Kaninchen.
Regelmässige künstliche Athmung, deren Inspirationsphasen dreimal an der Curve notirt worden
Kaninchen.
Die Inspirationsanfänge der künstlichen Athmungen sind oft an der Curve markirt.
I.
Kaninchen.
nandergehalten Herz auf dem Herz
o dass die Lungen, auch aufgeblasen
n
Herz auf dem Herzbeutel emporgehoben.
Kaninchen.
Immer gleiche künstliche Athmung
Vährend dieser Periode Herz auf dem Perikard von den Lungen abgehoben
Secunden.


Fig. 14.
Herz zurückgesunken.
Fig. 15.
Thorax offen
Fig. 16.
A. pulmonalis d. frei.
Fig. 17.
Athemluft von der Lunge abgesperrt und zur Perikardhöhle geleitet Nebenöffnung gelassen
Lungenathmung


Tab. IV.
Kaninchen.
lem Herzbeutel emporgehoben, doch treffen es noch die stark gedehnten Lungen.
Starke künstliche Athmung.
Kaninchen,
Herz berührt während Oeffnung des Thorax.
Katze,
Rechte Art. pulmonalis zugebunden.
Herz frei.
Herz leicht umfasst Diastole gehemmt.
Kaninchen.
Athemluft von der Perikardhöhle abgesperrt und zur Lunge geleitet.
Zur Perikardhöhle die Athmungsluft geleitet, so dass das Herz während jeder Inspiration unter Luftdruck von 30 mm Hg steht.
Secunden.


Fig. 18.
Lungen normal ventilirt
Herzbeutel unter vollem
Drucke.
Lungen und Herzbeutel ventilirt
mit Nebenöffnung.
Lungenathmung allein.
Fig. 19.
Kaninchen
Lungen freigegeben.
Starke seltene künstliche Athmung
Dauernde Einblasung. Lungen in Inspirationsstellung
Fig. 21.
Fig. 22.
Künstliche Athmung unterbrochen


Kaninchen.
hne Nebenöffnung in Perikard
en, in Lungen mit Nebenöffnung
Perikard und Lunge werden respirirt.
Intraperikardiale Lufteinblasungen seit mehreren Minuten.
Blutdruck schon stark gesunken.
Katze.
Fig. 20.
Aorta und Cava offen.
Vena cava inf. mit d. Aorta comprimirt.
Aorta abdom. comprimirt.
Cava allein geschlossen.
Katze.
künstliche Athmung unterbrochen, Luftröhre offen,
Lungen zusammengefallen.
Rückenmark von Med. obl. getrennt.
Kaninchen.
rhalten.
Secunden.

DIE

KORALLENRIFFE DER SINAIHALBINSEL.

GEOLOGISCHE UND BIOLOGISCHE BEOBACHTUNGEN

VON

JOHANNES WALTHER,
DR. PHIL., PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT JENA.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº X.

MIT 1 GEOLOGISCHEN KARTE, 7 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN, 1 LICHTDRUCKTAFEL UND 34 ZINKOTYPEN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1888.

Vorgetragen am 13. Februar 1888.
Das Manuscript eingeliefert am 15. Juni 1888.
Der Druck beendet den 20. Juli 1888.

DIE

KORALLENRIFFE

DER

SINAIHALBINSEL.

GEOLOGISCHE UND BIOLOGISCHE BEOBACHTUNGEN

VON

DR. JOHANNES WALTHER.



I. Topographische Einleitung.

Am Râs Muhámmed[1]), dem südlichen Ende der Sinaihalbinsel, vereinigen sich drei langgestreckte Meeresarme, welche sich durch die Gestaltung ihres Bodens auffällig von einander unterscheiden.

Wenn man auch den Meerbusen von Súes und den von Akabáh als nördliche Arme des eigentlichen Rothen Meeres zu betrachten gewohnt ist, so bietet doch jeder derselben so viel Eigenthümliches, dass man eine topographische Individualität jedes einzelnen dieser Meerestheile feststellen kann. Die englischen Admiralitätskarten The Red Sea (in five sheets) 8ª, Gulf of Suez 757 und Strait of Jubal 2838 sind unter Leitung von Capt. Nares, dem technischen Führer der Challengerexpedition, aufgenommen worden und dieser Name bürgt für die wissenschaftliche Genauigkeit des topographischen Reliefs und der Riffgrenzen.

Längs der Küsten des eigentlichen Rothen Meeres zieht sich beiderseits eine wohlausgeprägte »Küstenstufe«, eine Zone flachen Wassers, besetzt mit jenen unzähligen Koralleninseln und Riffen, welche dieses Meer so gefährlich machen. Ausserhalb der Korallenriffzone sinkt der Meeresspiegel ziemlich rasch zu Tiefen von 400 bis 700 englischen Faden. Abgesehen von einzelnen, theils vulkanischen (Gebel Tejir, G. Zebajir), theils mit Korallenriffen bedeckten kegelförmigen Inseln (The Brothers, Daedalus), welche aus der erythräischen Rinne emportauchen, zeigt die Mittelzone des südlichen Rothen Meeres sehr gleichmässige Tiefen.

---

1) Alle arabischen Eigennamen wurden phonetisch wiedergegeben und zwar so, wie ich sie nach der Aussprache der Emsénebeduinen niederschrieb. Ein ^ über einem Vokal bedeutet langen Ton, ein ´ kurzen Ton.

Der korallenreiche Küstensaum fehlt dem Golf von Akabah vollständig. Nur im Osten des Râs Muhámmed finden sich schmale Schirmriffe an den steilen Abhängen der Felsen; und aus der jüngeren Tertiärzeit sind dort etwas ausgedehntere Riffe zu beobachten. Im inneren Golf finden sich am Ausgang des Uâdi Nasb und an der Mundung des U. Ghasáleh kleine Korallenansiedelungen (auf der Karte durch ++ bezeichnet). Direct an der Küste sind überall Tiefen von 60—150 Faden gelothet (der Punkt über den Zahlen bedentet, dass in dieser Tiefe der Grund nicht erreicht wurde). Am Eingang der Strasse von Tiran ist der Grund in 594 Faden erreicht. Somit stellt sich uns der Meerbusen von Akabáh als eine schmale tiefe Rinne dar, mit riffarmen, steil abstürzenden Rändern.

Wenden wir uns jetzt dem Meerbusen von Súes zu, der am sorgfältigsten durchlothet ist, dessen Bodengestaltung unzählige Lothungen bis in alle Einzelheiten verfolgen lassen, so ist in erster Linie die Thatsache bezeichnend, dass seine grösste Tiefe nicht mehr als 46 Faden beträgt und dass 35 Faden als Durchschnittstiefe betrachtet werden kann; zweitens dass an seinem südlichen Ausgang, der Strasse von Djûbal, 25 Faden und 200—460 Faden nebeneinander gelothet werden, dass also der Übergang in die tiefe centrale Rinne des Rothen Meeres in unvermittelter Weise erfolgt. Nächst diesem topographischen Charakter des Meerbusen von Súes ist aber auch die Vertheilung seiner Korallenriffe eine überaus seltsame: abgesehen von dem schmalen Saumriff an den Küsten und von den isolirten kleinen Korallenansiedelungen bei Súes, finden sich Korallenriffe nur in seiner südlichen Hälfte. Diese Riffe sind in deutlich parallelen Zugen angeordnet und bei Djûbal brechen sie ebenso rasch und unvermittelt ab, wie der flachere Meeresboden in die grossen Tiefen übergeht.

Eine so seltsame Vertheilung der Korallenriffe in den drei Meeresarmen, welche die Sinaihalbinsel umspülen, kann nicht als zufällig betrachtet werden. Es müssen bestimmte Ursachen sein, welche ein so verschiedenes Verhalten bedingen.

Die Frage nach den Ursachen der Bildung von Korallenriffen gehört seit vielen Jahrzehnten zu den Lieblingsproblemen der Naturforscher. Von MONCONSY an, welcher im Jahre 1630 über die Korallen des Rothen Meeres berichtete, haben THOMAS SHAW, FORSKAL, SAVIGNY,



Barrow, Forster, Flinders, v. Chamisso, Quoy und Gaimard, Ehrenberg und Hemprich, Darwin, Dana, Semper, v. Pourtalès, Agassiz, Klunzinger, Fraas, Haeckel, v. Richthofen, Murray, Studer, v. Drasche, Rein, Keller, Krukenberg, Guppy und Andere lebende Korallen und Korallenriffe studirt und ihre Anschauung über die Bildung der letzteren in wichtigen und bedeutenden Werken niedergelegt. Ihre Untersuchungen haben eine Fülle des Interessanten gefördert und lebhafte Discussionen angeregt. Die biologischen Verhältnisse des Korallenlebens ebenso wie die Fauna der korallophilen Thiere sind gut untersucht, und es dürfte auf diesem Gebiet keine wesentliche Vermehrung unserer Erkenntniss zu erwarten sein. Auch über die Füllmasse zwischen den lebenden Korallenstöcken liegen Beobachtungen vor.

Aber die Fragen nach der Mächtigkeit der Korallenriffe und nach der physikalischen Beschaffenheit des Untergrundes, auf dem Korallenriffe gedeihen, sind trotz mancher Versuche noch nicht vollkommen gelöst worden, obgleich gerade diese Fragen ein ganz hervorragendes geologisches und biologisches Interesse besitzen. Wenn ältere Gelehrte die Atolle der Südsee als 2000 m mächtige Kalkstöcke betrachteten, oder Neuere dieselben für untermeerische Bergkuppen halten, die nur einen dünnen Überzug von Korallenkalk tragen, so sind beide Urtheile doch meistens hypothetisch gewesen, und dies umsomehr, wenn sie von theoretischen Anschauungen über die Bewegungen des Meeresgrundes bedingt und abgeleitet wurden[1]). Es könnte fast scheinen, als ob jene wichtigen Fragen auf dem mehrfach eingeschlagenen Wege, durch Studium des topographischen Reliefs, überhaupt nicht mit Sicherheit zu entscheiden wären.

Das Wesen und die Ursachen des Vulkanismus blieben räthselhaft, so lange man damit genug gethan zu haben glaubte, dass man möglichst viele Aschenkegel erstieg und ihre dampfenden Kratere

1) Für die Beurtheilung von Darwin's Rifftheorie ist ein Satz in seiner kürzlich erschienenen Selbstbiographie (Leben und Briefe von Charles Darwin von F. Darwin, übersetzt von V. Carus. 1887. Bd. I) lehrreich, wo es über die »Korallenriffe« auf Seite 63 heisst: »Kein anderes meiner Bücher ist in einem so planmässig deductiven Sinne angefangen worden; denn ich hatte mir die ganze Theorie schon an der Westküste von Südamerika ausgedacht, noch ehe ich ein echtes Korallenriff gesehen hatte. Ich hatte daher meine Ansichten nur durch eine sorgfältige Untersuchung lebender Riffe zu verificiren und auszudehnen.«

untersuchte. Erst von dem Zeitpunkt an, wo man den Vulkan im tektonischen Zusammenhang der umgebenden Gebirge betrachtete, sind wir etwas tiefer eingedrungen in die Erkenntniss von Ursache und Wirkung. Und nach meiner Überzeugung ist dieses auch der einzige Weg, um die Bildung der Korallenriffe zu ergründen. Die Untersuchung der Oberfläche des Riffes muss Hand in Hand gehen mit dem tektonischen Studium der Küstengebirge. Nur indem man ein Korallenriff als tektonisches Glied des benachbarten Küstengebirgssystems betrachtet, kann man ein Urtheil abgeben über die Ursachen seiner Entstehung.

Diesen Weg habe ich in der vorliegenden Arbeit einzuschlagen versucht, welche allerdings nur ein kleines Korallengebiet behandelt. Allein die genaue und sorgfältige Untersuchung eines kleinen Meerestheiles verspricht sicherere Resultate, als die cursorische Behandlung eines Archipels.

Fünf Fragen hatte ich mir als Probleme gestellt:

1. Welche Mächtigkeit besitzen die Riffe?

2. Wie ist der Untergrund beschaffen?

3. Welche Rolle spielt das detritogene Füllmaterial auf dem Riff?

4. Welche Veränderungen haben die Riffsedimente erlitten, wenn sie endgültig vom Wasser entblöst wurden?

5. Welche Veränderung hat Form und Verbreitung der Riffe im Laufe der geologischen Geschichte erlitten?

Meine daraufhin an den Küsten des nördlichen Rothen Meeres (von Februar bis Mai 1887) angestellten Untersuchungen enthält vorliegende Arbeit. Beobachtungen, welche in keinem inneren und wesentlichen Zusammenhang mit den Riffproblemen stehen, habe ich dieser Arbeit nicht eingefügt; so die Gliederung rein stratographischer Profile, die Listen der darin gefundenen Versteinerungen und sonstige Einzelheiten. Ich werde Gelegenheit finden, diese Thatsachen in einem anderen Zusammenhang später zu veröffentlichen.

Der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig aber, welche durch die Verleihung eines Theils des HÄRTEL-schen Legates einen länger vorbereiteten Reiseplan zum Entschlusse machte, und deren hohe Munificenz die reiche illustrative Ausstattung der vorliegenden Arbeit ermöglichte, statte ich auch an dieser Stelle meinen ehrfurchtsvollen Dank ab.

II. Der geologische Bau der westlichen Sinaihalbinsel.

Eine Reihe von Ausflügen in die nahe und weitere Umgebung von Kairo hatte mich gelehrt, dass tektonische Störungen in den ägyptischen Wüsten eine grössere Rolle spielen, als man nach den Berichten anderer Reisender anzunehmen geneigt war. Ich war daher nicht überrascht, in dem wechselnden Fallen und Streichen der Schichten, welche die Felsengebirge der Tyhwüste östlich von Súes aufbauen, die Spuren mannigfaltiger Störungen zu finden. Besonders Gébel Sidr, den ich am zweiten Tag meiner Kamelreise, durch die durchsichtige Wüstenluft in der Ferne sah, erinnerte mich lebhaft an die Aufbrüche westlich von Abû Róasch am Rand der libyschen Wüste[1]). Der Wunsch, jene Gebiete zu studiren, war um so grösser, als mein Reiseweg zwischen Meeresküste und Gebirge mir in den ersten Tagen keine Fossilien in dem anstehenden Gestein der kleinen Hügel zeigte. Die groben Gerölle aber, welche in den trockenen Rinnsalen des Uâdi Sidr, U. Werdân, U. el Amâra und U. Gharándel lagen, liessen auf einen sehr mannigfaltigen Bau des Tyhgebirges schliessen: Granit, Sandstein, Alabaster, Kalkblöcke mit Actaeonella, Nerinea, Hippurites organisans, Ostrea, Pecten, Exogyra, selbst Ammonitenfragmente, sodann Nummulitengesteine waren darin verstreut und manche Formen zeigten bei näherer Betrachtung eine grosse Ähnlichkeit mit der Kreidefauna von Abû Róasch.

Am Gébel Hammâm Pharaûn verlässt der Karavanenweg die Küste, um dieselbe erst bei Abû Senîme wieder zu erreichen. Hellgelbe versteinerungsarme Kalkschichten bilden die Gebirge. An den nördlichen und östlichen Abhängen des G. Hammâm Pharaûn sind alle Felsen mit einer gebräunten Rinde von thonreichem Gyps überzogen, welche als 1 m dicke Schale die Structur der Berge und die Lagerung der Schichten verhüllt. Da am Fuss des genannten Berges 55° R. warme Quellen entspringen, welche nach Russegger's Analyse Schwefelsäure enthalten, so ist jene Vergypsung der Felsen leichtverständlich, umsomehr als ähnliche Gypslager an den Schwefelquellen von el Uâdi bei Tór beobachtet wurden.

---

1) Vgl. J. Walther, L'apparition de la craie aux environs des Pyramides. Bull. Inst. Egypt. Le Caire 1887.

Durch Uâdi Táyibe erreicht der Weg wieder die Küste und zieht sich daselbst entlang bis Râs Abû Senîme. Blendendweisse Kalkwände mit jenen erkerartigen Erosionsformen, wie sie auf den Abbildungen der nordamerikanischen Cañons so charakteristisch erscheinen, bilden das Ufer und heben sich lebhaft von dem dunkelblauen Himmel und dem noch dunkleren Meere ab. Die Aquarell-Tafel II stellt die besprochene Gegend dar; aufgenommen nach einem Sturm am 21. April. Im Hintergrund die gegen 400 m hohe Steilwand des G. el Nochel, dessen fossilleere Schichten meerwärts eintauchen. (Sie treten so nahe an das Meer heran, dass die Kamele durch ½ m tiefes Wasser gehen müssen.) Rechts erscheint im Hinter-

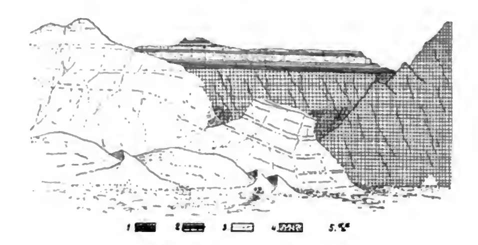


Fig. 1. Gébel Marchâ.
1. Granit mit Eruptivgängen. 2. Nubischer Sandstein. 3. Kalk u. Mergel. 4. Sand u. Gerölle. 5. Quelle Marchâ.

grunde die rothe Granitwand des G. Marchâ. Vorn in der Bucht von Abû Senîme ankert das Segelboot, auf dem ich fünf Tage lang kreuzte. Am Strand liegen ausgeworfene Tangmassen, in denen viele Echinodermen gefunden wurden.

Hat man den G. el Nochel passirt, dann öffnet sich eine Ebene von 10 km Breite und 25 km Längenerstreckung. Dunkle krystallinische Blöcke bedecken den Boden, und die schwarzrothen Granitwände des Gébel Marchâ stechen lebhaft ab von den weissen Kreidefelsen ihrer Umgebung. Röthliche Gänge schwärmen durch den Granit und die Gerölle in der Ebene lassen erkennen, wie mannigfaltig die Zusammensetzung der Ganggesteine sein muss. Nirgends lässt sich einer dieser Gänge in die an- und aufgelagerten Schichten verfolgen;

scharf und unvermittelt liegen horizontale (oder verticale) Sedimentschichten um die krystallinische Masse. Hier treten die krystallinischen Gesteine zum ersten Male auf, und zwar in so imponirender Mächtigkeit und Ausdehnung, dass das ganze landschaftliche Bild verändert wird. Wenn man nach einer geologisch begründeten Trennung von Tyhgebirge im Norden und Sinaigebirge im Süden suchen will, so muss die Theilungslinie in 29° n. Br. durch Râs Abû Senîme gelegt werden.

Die beiden Zeichnungen 1 und 2 bringen die nordöstliche Begrenzung der Ebene von Marchâ zur Darstellung. Links (Fig. 1) sind steile weisse Kalkwände der Kreideformation, im Hintergrund fast horizontal gelagert, am Fuss der Gebirge aber seltsam dislocirt.

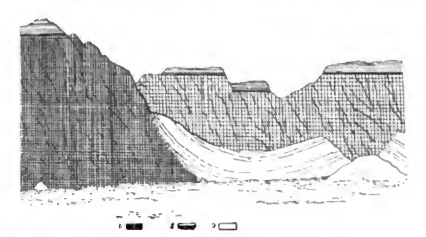


Fig. 2. Eingang in das Uâdi Schellâl.
1. Granit. 2. Nubischer Sandstein. 3. Kalk.

Halbkreisförmige Schichten liegen mantelförmig umeinander, theilweise mit seiger stehenden Bänken. Die brackische Wasserpfütze oder »Quelle« Ayîn Marchâ befindet sich am Fuss senkrecht stehender Mergelschichten, welche eine ziemlich reiche Kreidefauna enthalten. Die hangenden Schichten bergen viele gebräunte Gryphaea vesicularis. Am Fusse der unersteiglichen Granitwände finden sich zwei kleine Dislocationsreste von weissem Kalk. (Fig. 1 u. 2.) Dass die weissen Kalke nicht infolge von Sedimentationsvorgängen, sondern durch nachträgliche Dislocation an die Granitwände angelagert wurden, erhellt am besten aus Fig. 2, welche den Eingang ins Uâdi Schellâl darstellt. Hier schmiegen sich die weissen Kalke in steilen Faltungen an die Granitmasse an, um nach rechts neue, andere Dislocationen zu zeigen.

In auffallendem Gegensatz zu den schwarzrothen Granitwänden und den weissen dislocirten Kreideschichten wirken horizontale feuerrothe, gelbe und braune Schichten, welche in Denudationsresten auf den Granit hinübergreifen und die Granitwände krönen. Dass diese Schichten aus Sandsteinen bestehen, das lehren die Bruchstücke solchen Gesteins in den Rinnsalen der Ebene. Die scharfe Grenze zwischen Granit und Sandstein, welche alle Gänge im Granit abschneidet und ohne Unterbrechung sich geradlinig verfolgen lässt, darf als eine Denudationsfläche angesprochen werden.

Beim Eintritt ins Uâdi Schellâl lässt sich eine weitere Eigenthümlichkeit in der Lagerung dieser Sandsteine beobachten, welche im Hintergrunde der Fig. 2 zu erkennen ist. Die Sandsteinschichten treten nämlich, trotz ungestörter horizontaler Lagerung, in verschiedenem Niveau auf. Beobachtungen im Uâdi Schellâl lehrten, dass diese Niveauverschiedenheit eine durch Verwerfungen nachträglich verursachte sei.

Leider hatte ich vor Antritt meiner Reise das inhaltsreiche Werk von HULL[1]) über die Geologie von Palästina und Sinaihalbinsel nicht studiren können. Umsomehr freut es mich, dass ich jetzt bei der Ausarbeitung meiner Beobachtungen finde, wie sehr meine Auffassung der Schichtenfolge mit der des genannten Gelehrten übereinstimmt. Nach HULL's Karte zieht sich ein Streifen des carbonischen Kalksteines vom Uâdi Nasb bis gegen Gébel Marchâ quer durch die Sinaihalbinsel. Es scheint, dass diese Kalksteinablagerung, welche die Sandsteinmassen der Sinaihalbinsel in zwei Theile trennt, in einem Profil, das ich im Uâdi Schellâl aufnahm, noch auftritt. Ich beobachtete dort im Sandstein eine Kalksteinbank mit vielen Crinoidenstielgliedern und einigen Resten von Fistulipora (Chaetetes radians?) und Zaphrentis. (Nach Bestimmungen, die ich der Güte meines Freundes Dr. FRECH in Halle verdanke.)

Durch die beobachteten Thatsachen wurde mir das Problem nahe gelegt, ob nicht auch das eigentliche Sinaigebirge eine Decke von Sandstein, Kreide und Nummulitenkalk getragen habe, und ob die von FRAAS ausgesprochene Ansicht über die Geschichte der Sinaihalbinsel richtig sei. Auf Seite 7 seines bekannten Buches[2]) sagt

1) The Survey of Western Palestine. Dublin 1886.

2) Aus dem Orient. Stuttgart 1867.

der Autor: »Nichts ist augenscheinlicher auf dem Wege vom Meere (bei Tór) zum sinaitischen Gebirge, als dass alle und jede Zwischenformation zwischen den jüngsten Meeresgebilden am Ufer und dem ältesten krystallinischen Gebirge, das von der Meeresfläche bis zu den höchsten Gipfeln sich erhebt, absolut fehlt, und zu allen Zeiten auch gefehlt hat . . . . . . Nie seit den Zeiten ihrer Bildung haben diese krystallinischen Massen irgend eine geologische Periode mitgemacht; vom Uranfang der Dinge ragten ihre Gipfel aus dem Ocean, unberührt von Silur und Devon, von Dyas und Trias, von Jura und Kreide. Am Fusse nur der alten Bergfeste hat einestheils das Rothe Meer einen Kranz von Korallen um den Sinai gezogen und mit ihrer Hülfe in jüngster Zeit ein Küstenland geschaffen, anderntheils hat das Meer zur Kreidezeit im Norden das Kalkplateau der Wüste Tyh

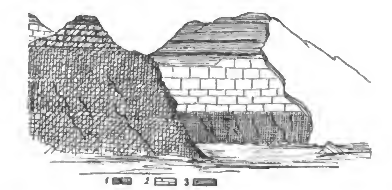


Fig. 3. Uâdi Budra.
1. Granit mit Eruptivgängen. 2. Nubischer Sandstein. 3. Mergel.

angelagert, das sich über ganz Syrien bis zum Libanon hinzieht.« Die Untersuchung der westlichen Sinaihalbinsel hat mir gezeigt, dass die angeführte Meinung mit den Thatsachen nicht in Einklang zu bringen ist. Die Verschiedenheit der beiden Reisewege, ein wesentlich längerer Aufenthalt und äussere Umstände, die meine Reise begünstigten, machen es verständlich, wie ich zu anderen Anschauungen geführt wurde. Das oben erwähnte Werk des hochverdienten Forschers begleitete mich auf meiner Reise, bot mir eine Fülle von Anregung und wird als erste wissenschaftliche geologische Behandlung der Sinaihalbinsel seinen Werth unverkürzt behalten.

Auf dem Weg zum Búdrapass beobachtet man östlich zerrissene Granitwände, während der Saumpfad selbst auf rothen, schwarzen und braunen stark dislocirten Sandsteinen entlang führt. Auf der

Passhöhe liegen Exogyra, Hemicidaris, Plicatula in Menge herum und ein Ammonitenfragment charakterisirt die mesozoischen Schichten[1]). Im U. Búdra liegen steilaufgerichtete Sandsteinschichten an einem Granitstock, und werden an dessen Fuss horizontal; längs eines Seitenthales verläuft ein Bruch, so dass die Grenze von Granit und Sandstein auf den beiden Seiten des Thales in verschiedenem Niveau sich befindet. Die dünnbankigen Schichten, welche den Sandstein überlagern, scheinen nach anderen Profilen Mergel zu sein. Umstehende Zeichnung giebt die Erscheinung wieder (Fig. 3).

Auch das berühmte U. Mokátteb läuft auf der Grenze zwischen Granit und dislocirten Sandsteinen, und die bekannten nabatäischen Inschriften sind in das letztere Gestein eingekratzt. Die Wand des

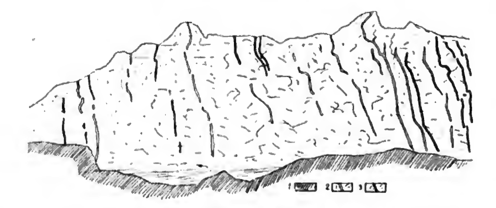


Fig. 4. Gébel Ginne im Uâdi Mokatteb.

1. Nubischer Sandstein. 2. Granit mit rothen Eruptivgängen. 3. Granit mit schwarzen Gängen.

Gébel Ginne, den Inschriften gegenüber, besteht aus Granit, durchschwärmt von einer grossen Zahl von Eruptivgängen. Wie obenstehende Zeichnung (Fig. 4) erkennen lässt, sind rothe und schwarze Gänge vorhanden, welche vielfach verworfen sind, aber doch ein gleichmässiges Streichen (ungefähr NO—SW) besitzen und unter 80° SSO fallen.

Indem ich mich von hier dem U. Firân näherte, wurde das Streichen des Gebirges NW—SO immer auffälliger und in parallelen Zügen richteten sich die Bergketten. Die von Fraas auf Seite 31 l. c. besprochene »verkehrte Erosionsform der Uâdi« findet darin ihre Erklärung. Der Oberlauf des Uâdi Firân liegt im Streichen des

1) Die von mir auf meiner Reise gesammelten Fossilien befinden sich in der Paläontologischen Sammlung der Königl. Akademie zu München.

Gebirges, der untere Theil dagegen ist ein Querthal, welches senkrecht zum Streichen läuft und eine Reihe von Kreidekämmen durchbrechend auf die Ebene von Burdéss mündet (s. untenstehende Zeichnung Fig. 5). Die Lagerung der Schichten an der Thalsohle und eine kleine Verwerfung über dem Eocän von Chadîdîdîd macht es wahrscheinlich, dass dieser Theil des Uàdi ebenfalls durch Dislocationen bedingt ist. Dass im Übrigen die erodirenden Kräfte im Oberlauf (also im Streichen des Gebirges) ein breiteres Thal schaffen konnten, als im Unterlauf, welcher die Gebirgsketten quer durchbricht, ist leicht verständlich.

Die häufig beobachtete Erscheinung, dass Längsthäler an der Grenze verschiedenartiger Gesteine auftreten, spielt auch am Sinai eine Rolle. Hier im Norden, wie späterhin im Süden der Halbinsel

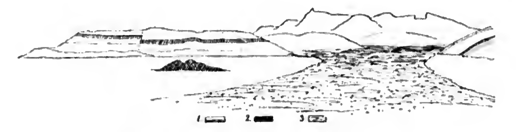


Fig. 5. Mündung des Uàdi Firân.
1. Kreide-Kalk und Mergel. 2. Nummulitenkalk. 3. Gerölle des Uàdi.

konnte ich feststellen, dass sich an den massigen rothen Granit des Centralstockes eine Randzone von geschichteten Urgesteinen anschliesst. Diese geschichteten krystallinischen Gesteine sind bald als grauer Lagergranit. bald als glimmerreicher Gneiss, bald als Glimmerschiefer entwickelt.

Die mir zugemessene Zeit und die Ziele meiner Arbeit gestatteten mir nicht, die Beschaffenheit der krystallinischen Gesteine näher zu studiren, deren Mannigfaltigkeit auf der Sinaihalbinsel so gross ist, dass schon Fraas neun Typen unterschied, eine Zahl, die nach meinen Beobachtungen vielleicht verdoppelt werden kann. Die Eruptivgänge in diesen Schiefern umschliessen öfters Brocken des Contactgesteines (s. umstehende Zeichnung Fig. 6 — ähnliche Verhältnisse wurden von mir auch im U. Sàchara beobachtet).

Wenn ich auch die Grenze der beiden krystallinischen Gesteinsgruppen des Sinai nicht überall im Einzelnen festlegen konnte, so



habe ich doch nicht geschwankt, diese wichtige geologische Thatsache auf meiner Karte zum Ausdruck zu bringen und den Lagergranit und Gneiss überall da auszuscheiden, wo ich ihn in mächtiger Entwicklung traf. Verschiedene Beobachtungen machen es mir sehr wahrscheinlich, dass die krystallinischen Schiefer und Lagergranite längs des ganzen Westabfalls gegen die Gaâwüste auftreten, und dass ein grosser Theil des auf meiner Karte als »Stockgranit« ausgeschiedenen Gebietes so zu kartiren sein wird. Doch konnte ich jene geschichteten Gesteine nur da eintragen, wo ich sie selbst anstehend beobachtet habe. Die Grenze von Stockgranit und Lagergranit fällt zusammen mit einer Anzahl der wichtigsten Längsthäler am Sinai (U. Firân, U. Hâscheb), und die Vermuthung liegt nahe, dass es die verschiedene Beschaffenheit beider Gesteine war, welche die Entstehung

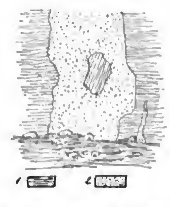


Fig. 6. Eruptivgang im Uâdi Firân.
1. Gneiss. 2. Granit.

Fig. 7. Gänge im Uâdi Firân.
1. Gneiss. 2. Rother Gang. 3. Schwarze Gänge.

jener Längsthäler veranlasste. Ich möchte auch auf den geradlinigen Thälerzug aufmerksam machen, welcher östlich von dem colorirten Theil meiner Karte als U. Suwig — U. Bark — U. Lebweh — U. Berrah und weiter südlich verfolgt werden kann.

Einer von FRAAS erwähnten Thatsache muss ich hier noch gedenken, da ich die Beobachtungen desselben durch meine eigenen erweitern kann. Wie der genannte Geologe richtig erkannt hat, verlaufen fast alle Gänge im Granit (von U. Búdra bis zum Râs Muhámmed und ebenso die der Arabakette) mit 80° S. Fallen senkrecht zum Streichen (wobei noch zu bemerken ist, dass die schwarzen Gänge jünger zu sein scheinen als die rothen, da sie diese verwerfen, s. o. Fig. 7). Ich habe allerdings nur ein einziges Mal durch Erklette-

rung der Granitwände einen solchen Gang genauer verfolgt; allein die tausende von dunklen Gängen (s. o. Fig. 4), welche anfangs erfreuen, nach längerem Ritt im Granitgebirge aber durch ihre Regelmässigkeit ermüden, scheinen alle ein gleiches oder annähernd paralleles Streichen zu haben. Das heutige Streichen des Gebirges ist NW—SO, und entstand, wie ich noch näher belegen werde, nach der Nummulitenformation. Die vom carbonischen Sandstein des U. Schellâl überlagerten Granitmassen sind von Gängen durchschwärmt, welche SW—NO streichen, und welche vor der Bildung jener paläozoischen Sandsteine entstanden sind, denn die Sandsteine liegen mit scharfer Trennungslinie auf dem mit Gängen durchsetzten Granit des G. Marchâ (s. o. Fig. 1, 2). Das constante Verhältniss zwischen

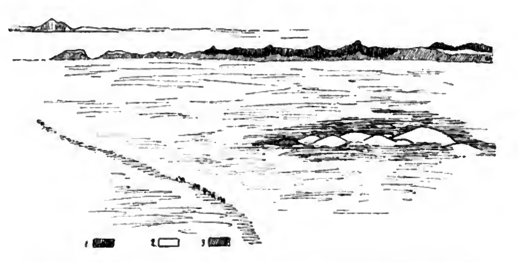


Fig. 8. Die Gaâwüste vom Ausgang des Uâdi Hebrân.
1. Granit. 2. Kreidekalk. 3. Nummulitenkalk.

dem heutigen Streichen der Bergketten und dem senkrecht darauf erfolgten Streichen der Porphyr- und Dioritgänge kann daher in keinem zeitlichen oder ursächlichen Zusammenhang stehen und deutet auf Dislocationen in längst vergangenen Epochen.

Bei dem constanten Streichen der Lagergranite ist ihr Fallen ein wechselndes. Auf der Passhöhe des Engâwe, welcher von U. Selâf nach U. Hebrân hinüberführt, fällt der Gneiss westlich. Das Gestein besteht vorwiegend aus weissem Feldspath mit dunklen Glimmerflecken, weiter oben aber aus schwarzfleckigem Hornblendeschiefer. Das ganze U. Hebrân verläuft abwärts in grauem Lagergranit.



Als ich den Ausgang dieses Thales erreichte und die weite Wüste Gaà vor mir liegen sah (s. die umstehende Fig. 8), im Westen begrenzt von der Àrabakette, hinter welcher das Meer glänzte, und der stolze Rharib von Afrika herüberschaute, war ich überrascht, dass die sedimentären Schichten über dem Granit hier zu fehlen schienen. Da fielen mir zwei Stellen in der Wüstenlandschaft auf: nördlich vom Ausgang der Uàdi, gegen den Fuss der Serbâl hin,

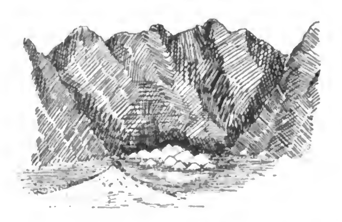


Fig. 9. Kreidescholle, südlich vom Ausgang des Uàdi Hebrân.

bemerkte ich in der Wüste eine Gruppe flacher Hügel, welche kein Granit waren, und die man in der beginnenden Dämmerung für Sanddünen hätte halten können; ich beschloss sie am folgenden Tag zu untersuchen. Südlich aber vom Uàdi Hebrân, etwa in drei Kilometer Entfernung, sah ich eine kleine gelbe Klippe, welche sich hineinschmiegte in die dunklen Granitwände. Ich liess sofort weiterreiten und erreichte bei einbrechender Nacht die Stelle. Meine Vermuthung wurde glänzend bestätigt, denn ich fand (s. die obenstehende Fig. 9) steil aufgerichtete Kalk- und Mergelreste erfüllt mit Ostrea, Nucula, Arca, Hemiaster, Pseudodiadema, Nerinea und grossen Exogyra.

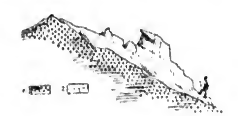


Fig. 10. Kreidescholle, südlich vom Ausgang des Uàdi Hebrân.

1. Granit. 2. Mergel.

Die nur wenige Meter mächtigen Mergelschichten liegen direct auf grauem und rothem Granit (s. die vorstehende Fig. 10) und bedecken eine Fläche von einem Quadratkilometer mit niedrigen Hügeln. Es scheinen verschiedene Horizonte der Kreideformation in diesen Resten



Râs Abu Senime.

vorzuliegen. Am folgenden Morgen machte ich einen neuen Contract mit meinen Beduinen und ritt nördlich nach der gelben Hügelgruppe, welche sie als Gébel Súffr bezeichneten. Dass ich dort ein stark dislocirtes Kreideprofil fand, war mir weniger überraschend, als der Anblick von Nummulitenkalk. Alle Schichten waren steil aufgerichtet und bildeten (s. die untenstehende Fig. 11) umeinanderliegende Schalenstücke. Der G. Súffr hat etwa 3 km Durchmesser. Ich nahm ein Profil vom Südrand bis zur Mitte, welches ziemlich genau übereinstimmte mit einem Profil, das mein Dolmetscher und Präparator Herr A. Kaiser aus Zürich am Nordrand des Berges aufnahm; nach diesen Profilen treten unter dem Nummulitenkalk untereocäne Mergel und Kalke, und endlich cretaceische Exogyraschichten auf. Die tiefsten Schichten sind gypsreiche Mergel, ähnlich denen, wie sie an der oberen Grenze des



Fig. 11. Gébel Súffr am Fusse des Serbal.

Nubischen Sandsteines beobachtet wurden. Auf den Karten der Sinaihalbinsel war die Hügelgruppe nicht eingetragen.

Aus dieser Beobachtung geht mit Sicherheit hervor, dass der Mangel von Sedimenten auf dem Sinaigranit auch hier nur ein secundärer ist, und durch nacheocäne Dislocationen hervorgerufen wurde.

Indem O. Fraas von der gegentheiligen Ansicht ausging, musste ihm die Bildung der gelben Schichtenreste an den Gehängen des Uâdi Firân eine so sonderbare Erscheinung sein, dass er zu ihrer Entstehung Eistransport zu Hülfe nahm. Aus dem Vorkommen von Kalkgeröllen in jenen Schichten hatte Russegger den richtigen Schluss gezogen, dass der Sinai eine Sedimentbedeckung gehabt habe, welche später durch atmosphärische Kräfte abgetragen und zum Theil in den Thälern abgelagert wurde. Gegen die Moränennatur spricht die Lagerung in einem vielgewundenen engen Thal und dessen Seitenthälern, sodann (s. u. Fig. 12) die häufig ausgezeichnete Schichtung

und endlich die Thatsache, dass die gröberen Blöcke im Norden häufig, im Süden seltener sein müssten, wenn ein vom nördlichen Tyhplateau herabreichender Gletscher den Transport vermittelt hätte. Nach meiner Ansicht hängt die Anwesenheit der gelben Mergelreste im U. Firân damit zusammen, dass das Längsthal ursprünglich keinen Abfluss hatte, indem der heute noch sichtbare Granitriegel el Mechárret, nordwestlich von der Oase, das Thal nach Westen abschloss, in welchem sich die denudirten, in das Uâdi herabgeschwemmten Kalksedimente ablagerten. Später wurde der Querriegel durch Erosion angeschnitten und dadurch ein Abfluss geschaffen, wobei die erodirenden Wassermassen ihre eigenen Sedimente wieder entführten und nur einzelne Reste an den Thalgehängen übrig liessen. Auf der

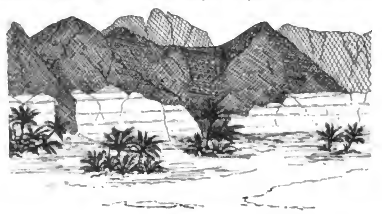


Fig. 12. Sedimentreste an den Granitwänden des Oasenthales von Firân.

Karte sind diese Sedimente in der Oase Firân als »lacustrische Sedimente« ausgeschieden.

Mehrere Wochen hielt ich mich in dem Beduinendörfchen Grûm bei Tôr[1]) auf und untersuchte die dortigen Riffe. Auf einer Excursion entdeckte ich östlich von Grûm einen Hügel mit Fragmenten von Amphiope truncata Fuchs und einer kleinen Molluskenfauna. Die genannte Scutellide beweist die Zugehörigkeit der Schichten zum Miocän; das ist die einzige Localität der Sinaihalbinsel, wo ich miocäne Ablagerungen entdeckte. Leider schaut der mergelige Kalk nur wenige Meter aus dem Wüstensand heraus und lässt die Lagerungsverhältnisse seiner Schichten im Unklaren.

Anfangs April miethete ich mir neue Dromedare, um die südliche Hälfte der Sinaihalbinsel zu untersuchen. Ich hoffte auch dort klei-

1) Die Ortschaft heisst Tôr, während die ganze Sinaihalbinsel von den Beduinen als Gébel Tûr bezeichnet wird.

nere Dislocationsschollen von Sedimentgesteinen am Granit aufzufinden; allein trotzdem ich die Wüste vom Meer bis zum Gebirge viermal kreuzte, war mein Suchen von geringem Erfolg begleitet. In mehreren Rinnsalen entdeckte ich Sandsteinblöcke von bedeutender Grösse, welche auf das einstige Vorhandensein von Nubischen Sandsteinschollen hier schliessen lassen, und dieselben Sandsteinbrocken fanden sich wieder am Râs Muhámmed. Dort konnte ich auch mehrere Berge von dunkelbraunem Sandstein nachweisen, welche zwischen Granitbergen eingeklemmt waren. Die Sandsteine waren theilweise überlagert von fossilen Korallenriffen[1]) (s. u. Fig. 20). Das Gebiet zwischen der Gaâwüste und dem U. Háscheb besteht aus O. fallenden grauem Lagergranit, überlagert von Porphyrtuffen und mannichfaltigen Eruptivgesteinen. Das Thal des Uâdi Háscheb ist eingeschnitten

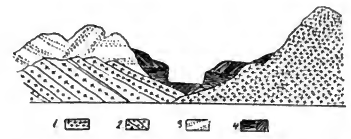


Fig. 13. Schematisches Profil durch das Uâdi Háscheb.
1. Stockgranit. 2. Lagergranit. 3. Porphyr und Tuffe. 4. Äolische Sandsteine.

in verfestigte Flugsandablagerungen, wie beifolgendes Profil zeigt (Fig. 13). Das Vorwiegen porphyrischer Gesteine in den Geröllen des Uâdi, unter denen besonders rothe sphärolithisch halbentglaste Blöcke auffallen, die Mannichfaltigkeit der buntgefärbten Gänge und die Lagerung machen es wahrscheinlich, dass es sich hier um einen Eruptivheerd handelt. Die Aquarelltafel III giebt diese Gegend wieder. Nach Norden blickend, sieht man links im Hintergrunde die Granitgebirge, während im Mittelbild die bunten Porphyrgesteine überwiegen. Gelber Sand liegt in allen Schluchten und Lücken, wie der Schnee in den Alpen. Im Vordergrund ist meine Carawane im Begriff gegen Ghasuláni weiterzuziehen. Der Himmel ist stark bewölkt; eine zu dieser Jahreszeit seltene Erscheinung (zwei Tage später fiel ein wolkenbruchartiger Gewitterregen).

1) Vgl. J. Milne, Geological notes on the Sinaitic Peninsula. Quart. Journ. of the Geol. Soc. 1875 Febr.



Den Rückweg nahm ich am Rande des Granites, allein von Râs Muhámmed bis Grên Utûd fand ich kein marines Sedimentgestein. Der Lagergranit mit constantem NW—SO Streichen und häufigem O-Fallen löst sich nach der Wüste zu in Hügelketten auf, welche entweder im Streichen des Gebirges angeordnet sind, oder senkrecht dazu. In dem letzteren Falle sind es breitere, senkrecht zum Gebirge streichende Gänge, welche von den wüstenbildenden Kräften herausgeschält werden und immer niedriger werdende Hügelketten bilden. So erklärt sich das anfangs räthselhafte SW—NO Streichen vieler dieser Hügel, welche wie Inseln aus dem gelben Sand hervorragen (s. Fig. 14).

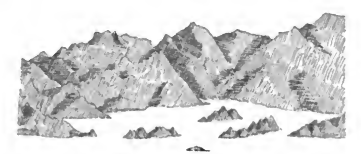


Fig. 14. Uâdi Sáchara.

O. FRAAS berichtet (l. c. S. 188) von einem Berge Hadjar el ma bei Tôr, dessen fossile Korallenriffe bis 300 m über dem Meeresspiegel emporsteigen. Der Name war meinen Emsênebeduinen unbekannt, aber ich glaube nicht zu irren, wenn ich annehme, dass der Gébel Hammâm Mûsa nördlich von Tôr gemeint ist. Eine Reihe von Excursionen nach diesem Berge lehrten mich, dass das stark metamorphosirte Riff einen dünnen Überzug auf 20° O. fallenden Schichten bildet. Über 100 m Sandsteinschichten folgen Exogyramergel, dann helle Kalke mit Feuersteinbroden und endlich der Nummulitenkalk. Über Alles hat ein früheres Meer einen jetzt durchlöcherten Mantel von Korallenkalk gebreitet. Das umstehende Profil Fig. 15 ist durch den Berg gelegt, während das Titelbild dieser Arbeit (Taf. I) eine Totalansicht der Gegend bietet. Im Vordergrunde links das Meer. Ein weisses Schaumband trennt das grüne Strandriffgebiet von der dunkleren korallenarmen Tiefe. Meine Taucher sind beschäftigt, die Ausbeute vom Riff nach den palmenbeschatteten Lehmhütten von Grûm zu tragen. In der Mitte sieht man die weissen

Häuser von Tôr, dahinter erhebt sich der G. Hammâm Mûsa. Der braune Riffmantel ist deutlich zu erkennen, an seinem Fuss zieht sich ein jungfossiles Riffband entlang. Dahinter erscheinen links die Sandstein-Schichten des G. Nakûs und die Granit-Berge des Árabagebirges, rechts im Hintergrund schaut der siebengipfelige Serbal herüber.

Ein Blick auf die geologische Karte lehrt, dass die gesammte Árabakette nichts weiter ist, als die normale Fortsetzung des G. Hammâm Mûsa. Nur mit dem Unterschied, dass von Abû Suêre nördlich auch der Granit herantritt und dass somit, von W. nach O. gezählt, fünf Ketten nebeneinander herziehen. Zuerst dunkelrother Granit mit unzähligen schwarzen Gängen. Sein Abhang ist so mit Sand bedeckt, dass ich anstehendes Gestein nicht schlagen und nur am Nordende des G. Abû Dúrbäh eine Excursion bis zum anstehenden Gestein unternehmen konnte. Leider war auch hier festes Gestein nur in den Porphyr-Gängen zu beobachten. Denn, wie ich in einer anderen Arbeit näher auszuführen habe, ist die Zerstörung der polychromen krystallinischen Gesteine in der Wüste eine überraschend intensive. Die chemische Verwitterung spielt hierbei keine Rolle, sondern die Einwirkung der Insolation auf die einzelnen, verschieden gefärbten Gemengtheile. Der rothe Feldspath erwärmt und dehnt sich stärker aus als der weisse Quarz und schwächer als der schwarze Glimmer oder Amphibol. Nachts ziehen sich die einzelnen Gemengtheile wieder verschieden stark zusammen. Auf solche Weise zerfällt der Granit etc. in seine Elemente, ohne dass diese zersetzt würden, und es hält in vielen krystallinischen Gebieten überaus schwer, anstehendes festes Gestein zu finden. Wie Schnee im Hochgebirge (s. u. Fig. 16) liegt der auf diese Weise gebildete gelbe Sand bis hoch hinauf an den Bergen und erschwert die geologische Untersuchung der krystallinischen Gesteine ungemein.

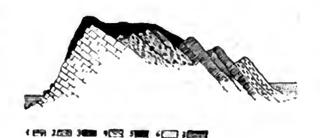


Fig. 15. Profil durch den G. Hammâm Mûsa.

1. Nubischer Sandstein. 2. Exogyramergel. 3. Weisse Flintkalke. 4. Nummulitenkalk. 5. Riffkalk. 6. Sand der Gaâwüste. 7. Meer.

Auf die krystallinische Aussenkette folgt rother und gelber Sand-

stein, welcher in verschiedenen Lappen weit an den Granitwänden hinanreicht (s. u. Fig. 17), darauf grüngelbe gypsreiche Mergel mit Exogyra, Radiolites, Ostrea, Nerinea, Actaeonella. Dann blendend weisse Kalkwände mit Feuersteinconcretionen, endlich eine Kette



Fig. 16. Nordende des Gébel Abû Hóswäh.

von Nummulitenkalken, welche die westliche Begrenzung der Gaâ-wüste bilden. (Nach der HULL'schen Karte soll die gesammte Áraba nur Eocän sein.) Ungestört und gleichmässig ziehen sich diese fünf Ketten nebeneinander hin bis zum Gébel Abu Hóswäh, dessen Nordende Fig. 16 wiedergiebt. Er besteht aus Granit, an seinem

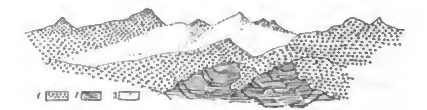


Fig. 17. Die Árabagranitkette von Osten.
1. Granit. 2. Nubischer Sandstein. 3. Flugsand.

Fuss sehen einige Bänke des nubischen Sandsteins aus dem Sandmeere heraus. Dort ist eine horizontale Verschiebung der Schichten in der Weise erfolgt, dass die Granitkette mit dem G. Abû Dúrbäh gegen Westen hinausrückt und dadurch der nubische Sandstein in die Verlängerung der ersten Granitkette gelangt; die weissen Kalke treten in doppelter Breite auf. An der Stelle dieser Verschiebung ist ein 10 m breiter Eruptivgang mit einigen Apophysen im Sandstein (s. u. Fig. 18) emporgedrungen und hat den sonst weichen Sandstein in 1 m Breite gefrittet und verhärtet. Das dunkle Eruptivgestein ist völlig zersetzt.

Beim Râs Djehán erreichte ich die Ebene von Burdéss, in welche

das Uâdi Firân mündet (s. o. Fig. 5). Meine Absicht war, soweit in dasselbe hineinzureiten, dass ich die Stelle erreichte, an der ich es von Osten her verlassen hatte. Allein der Wasservorrath in den Ziegenschläuchen ging auf die Neige, und ich hatte noch eine volle Tagereise bis zu Ayin Marchâ. So sah ich mich gezwungen, meinen Plan aufzugeben und konnte nur zu Fuss während der Mittagsrast in das Thal so weit hineindringen, bis ich die ersten Nummulitengerölle traf. Deshalb ist die mittlere Partie des U. Firân auf meiner Karte nur unvollkommen kartirt. Hull hat auch hier das ganze Gebiet als Eocän ausgeschieden, doch schien mir der weisse Flintkalk zu dominiren. Die kleine Kette von Chadîdidîd (Fig. 5) ist



Fig. 18. Eruptivgang am Fusse des G. Abû Durbäh im nubischen Sandstein.

Nummulitenkalk, die Wand dahinter Kreide. Wie die Farbenerklärung auf meiner geologischen Karte besagt, ist mit blau einerseits der weisse (Alveolinen?-)Kalk mit Feuersteinconcretionen bezeichnet, andererseits: »nicht näher untersuchte Schichten«. In diesem letzteren Fall handelt es sich um solche Sedimente, deren Zugehörigkeit zu den hangenden Nummulitenkalken oder zu den liegenden Kreidemergeln nicht näher festgestellt wurde. Ich habe sie mit blau bezeichnet, weil ich auch in dem weissen Kalk mit Feuerstein keine Fossilien gefunden habe und seine Zugehörigkeit zur Kreide oder zum Eocän nicht festzustellen im Stande war.

Von Ayin Marchâ dachte ich auf einem dahin vorausgeschickten Boote nach der afrikanischen Küste überzusetzen, wo mich Professor

SCHWEINFURTH erwartete. Allein starke Nordwinde schlugen mein Boot vier Tage lang immer wieder an die arabische Küste zurück, und ich konnte dabei nur an den Stellen geologische Excursionen machen, wo wir angetrieben wurden. Es gelang mir hierbei, südlich vom G. Hammâm Pharaûn ein fossiles Korallenriff zu entdecken und festzustellen, dass auch hier die Hauptstreichungslinien der Küstengebirge NW—SO verlaufen.

Fassen wir jetzt kurz zusammen, was ich an der Hand meines Reiseweges über den geologischen Bau der westlichen Sinaihalbinsel feststellen konnte: Das liegende Gestein ist dunkler Massengranit oder Stockgranit, darauf folgt nach Westen eine Serie grauer Lagergranite und geschichteter krystallinischer Schiefer, im Süden überlagert von Porphyrtuffen und bunten Eruptivgesteinen. Transgredirend lagert mit scharfer Trennungslinie der nubische Sandstein auf dem Granit, an anderen Orten ist er durch Dislocation oder Denudation entfernt. Die Conglomerate, welche nach HULL, zwischen Granit und Sandstein vermittelnd', im Osten der Sinaihalbinsel auftreten, habe ich auf meinem Reiseweg nicht beobachten können. Auf den Sandstein folgen gelbe und grüne Mergel mit Exogyra und anderen Kreidefossilien; in manchen Profilen tritt eine Radiolitenbank darin auf; dann kommen weisse fossilarme Kalke mit schwarzen Feuersteinconcretionen, endlich tritt das Eocän mit Nummulitenkalken hinzu. Bei Grûm stehen Mergel mit Amphiope an, welche dem Miocän angehören. Daraus erhellt, dass nach Ablagerung der Nummulitenformation (vielleicht vor Ablagerung des Miocän, entsprechend gleichzeitigen Dislocationsvorgängen an den afrikanischen und europäischen Mittelmeerküsten) das Sinaigebirge dislocirt worden ist. Die Hauptbruchlinien erfolgten NW—SO, und diese Streichungsrichtung beherrscht den gesammten Bau der westlichen Sinaihalbinsel, sogar einige Rutschflächen (wie am G. Nakûs) halten dieselbe Richtung ein. Im Zusammenhang mit diesen Dislocationen erfolgte am G. Dúrbâh eine Gangeruption in den nubischen Sandstein. Der centrale Sinaigranit wurde durch diese tectonischen Bewegungen von seiner Sedimentbedeckung entblöst. Die Sedimentgesteine bilden im Süden der Sinaihalbinsel eine langgestreckte synklinale Mulde, welche sich dem archäischen Centralstock im Westen anlagert und die sandbedeckte Gaâwüste unterteuft. Die unerschöpflichen Wassergruben,

welche man neuerdings an verschiedenen Stellen östlich von Tôr angelegt hat und aus denen zur Quarantänezeit 4000 und mehr Mekkapilger täglich getränkt werden, ohne dass sich der Wasserstand veränderte, sprechen selbst in dem Gebiet, wo keine Schichten mehr aus der Ebene hervortauchen für den ungestörten synklinalen Bau. In der Árabakette treten die Schichtenköpfe der synklinalen Mulde westlich, und im Süden des Uâdi Hebrân an einer localen Stelle auch östlich zu Tage. Der G. Súffr ist ein localer Aufbruch in der Ebene oder der letzte Rest einer durch äolische Denudation abgetragenen grösseren Gebirgskette. Am Râs Muhámmed treten endlich noch einige isolirte Sandsteinschollen auf. Die Áraba beginnt steilansteigend im Norden an der Ebene von Burdéss, nach Süden verflacht sie sich allmählich und ihre einzelnen Ketten versinken nach einander unter dem Meeresspiegel und unter dem Sande der Gaâwüste. (Vergl. zu der vorstehenden Übersicht die Profiltafel Taf. VII.)

Es erübrigt noch zum Schluss eine kurze Besprechung der geologischen Verhältnisse in dem Theil der Galâlawüste, welcher auf meiner geologischen Karte mit dargestellt ist.

Das Uâdi Arabah, ein 30 km breites und 80 km langes Thal, wird nach Norden und Süden begrenzt von den 1000 m hohen Steilwänden der nördlichen und südlichen Galâla. Dem Nordrand etwas genähert, läuft von W nach O das flache eigentliche Uâdi mit seinen Nebenthälern und durchschneidet jene Schichten des nubischen Sandsteins, in denen G. Schweinfurth im Jahre 1885 paläozoische Brachiopoden entdeckte, welche durch E. Beyrich als Spirigera concentrica bestimmt wurden. Eine fünftägige Untersuchung der betreffenden Localität und mehrtägige Excursionen nach den Abstürzen des Galâlaplateaus ergab folgende Resultate: Die tiefsten Schichten, welche südlich des eigentlichen Uâdi hervortreten, bestehen aus etwa 50 m Sandsteinen mit einzelnen Mergelschichten, darauf folgen 20 m fossilreiche Mergel mit Kalkbänken. Die darin gefundenen Fossilien (Spirigera, Terebratula, Bellerophon, Edmondia, Fenestella etc.) sind carbonische Formen, welche manche Anklänge an die Fauna des Saltrange erkennen lassen. Eine Reihe von Staffelbrüchen und anderen Dislocationen lassen die leitende Crinoidenbank in mehrfacher Wiederholung hervortreten und sieben kleine basaltische Kuppen stehen auf diesen Brüchen. 300 m Sandsteine, in denen nur einige versteinerte Hölzer gefunden

wurden, mit ausgezeichneter discordanter Parallelstructur folgen in völlig concordanter Lage und werden ebenso concordant überlagert von den Exogyrareichen Schichten der cenomanen Kreide. Der darauf folgende Steilabfall ist an der nördlichen Galâla unersteiglich, an der südlichen Galâla aber, 3 km östlich vom Kloster St. Anton, konnte ich ein fortlaufendes Profil bis zu den Nummulitenkalken aufnehmen, welche das Plateau bedecken. Ein langer Staffelbruch verdoppelt die Schichtenserie, wie aus der Karte leicht ersichtlich ist, und die Verwerfungskluft desselben scheint den Sammelapparat für die starke Quelle im Klostergarten zu bilden.

Ich habe auf der geologischen Karte meinen Reiseweg durch eine rothe Linie eingetragen, um den Beschauer in den Stand zu setzen, an jedem einzelnen Punkt selbst zu beurtheilen, ob die betreffende Gegend näher untersucht wurde oder aus einiger Entfernung studirt worden ist; aber ich muss hinzufügen, dass die Klarheit und Reinheit der Wüstenluft auf 40 und mehr Kilometer den dunklen Granit von hellen Sedimentgesteinen zu unterscheiden erlaubt, so dass in einzelnen Fällen (»nicht näher untersuchte Schichten«) wohl die Zugehörigkeit einer Felsmasse zu Kreide oder Eocän, nicht aber ihr sedimentärer Charakter, zweifelhaft bleiben konnte. Nur am Westfuss des Serbal sah ich eine dunkle Felsmasse, die ich als Granit (mit einem »?«) ausgeschieden habe, ohne bestimmte Anhaltspunkte dafür zu haben. Kleinere Abstecher und Excursionen sind nicht mit eingetragen worden.

III. Die Vertheilung der Korallenriffe an der Sinaihalbinsel.

Drei hypsometrisch, petrographisch und zeitlich verschiedene Riffgruppen finden sich an den Küsten der Sinaihalbinsel. Der Gegenwart gehört das lebende Riff an. Die lebenden Riffkorallen bilden einerseits einen schmalen, oft unterbrochenen Saum längs der felsigen Küste. Dieses Saumriff ist häufig nur wenige Meter breit und folgt genau der Küstencontur. Eine andere Riffart ist unabhängig vom Verlauf der Küstenlinie; sie bildet jene gefährlichen Klippen mitten im Meer und ich bezeichne sie als Pelagisches Riff. Beide gehen ineinander über.

Eine andere Riffgruppe befindet sich gegenwärtig 10 m hoch

ausserhalb des Meeres; ich bezeichne sie als jüngeres fossiles Riff. Dasselbe findet sich südlich vom G. Hammâm Pharaûn, dann längs des G. Nakûs und des G. Hammâm Mûsa, endlich an der südlichen Küste des Râs Muhámmed überall von gleicher petrographischer Beschaffenheit und in dem gleichen Niveau über dem Meeresspiegel. Subfossile Riffgesteine bilden mehrfach einen Übergang zum lebenden Riff.

Am Râs Muhámmed findet sich bis zu 90 m Meereshöhe ein fester klingender Kalk, welcher durch die Fülle der darin enthaltenen Korallenspuren als Riffgestein leicht erkannt wird. Ein ähnlicher Kalk von dolomitischer Beschaffenheit bildet den obengenannten Mantel um den G. Hammâm Mûsa und reicht dort vom Meeresspiegel bis zu 230 m Höhe empor. Beide Ablagerungen sind durch ihre discordante Lagerung und die Fülle der enthaltenen Korallen als Riffgesteine charakterisirt, aber die Fossilien sind gewöhnlich, besonders am G. H. Mûsa, als Abdrücke und Hohlräume erhalten. Am G. H. Mûsa fand ich in dem Riffkalk eine stark metamorphosirte, aber als solche wohlerkennbare Tridacna. Hier ist das Gestein ein typischer Dolomit mit 40% $MgCO_3$. Ich bezeichne diese Riffgesteine als älteres fossiles Riff.

Indem ich mich jetzt zur Schilderung der speciellen Eigenthümlichkeiten der Lage und Beschaffenheit dieser drei Riffgruppen wende, will ich vorausschicken, dass ich trotz grösster Aufmerksamkeit nur an den genannten Stellen fossile Riffe beobachten konnte, dass ausserhalb jener Stellen keine fossilen Riffe vorzukommen scheinen und dass nach meinen Beobachtungen kein Grund vorhanden ist, der auf eine einstmalige grössere Verbreitung der fossilen Riffe schliessen lässt. Denn das fossile Riffgestein ist den wüstenbildenden Kräften gegenüber viel widerstandsfähiger, als die krystallinischen Gesteine des Sinai.

IV. Das lebende Riff und seine Sedimente.

1. Die Saumriffe.

In der nördlichen Hälfte des Meerbusen von Súes finden sich Saumriffe weit verbreitet, allein bei der grossen Entfernung zwischen Küstengebirgen nnd Meeresstrand ist es unmöglich, über die Beziehungen solcher Korallenansiedelungen zu anstehendem Fels ein

Urtheil abzugeben. Ich muss nur hervorheben, dass es wesentlich die Vorsprünge der Küste sind, welche Korallenbesatz zeigen. Über die Oolithsedimente, welche ich in der Nähe solcher Saumriffe am Ausgang des Uâdi Dehêse beobachtete, werde ich unten Näheres mitzutheilen haben.

Das Saumriff des G. Hammâm Pharaûn wuchs wohl auf den Schichtenköpfen, welche den Fuss des Berges bilden, und die sich als parallele Klippenreihen auch unter Wasser verfolgen lassen. Südlich davon fehlt das Saumriff und tritt erst wieder an dem Felsencap von Abû Senîme auf. Längs der Ebene von Marchâ ist das Saumriff wohl ausgebildet und verknüpft die bei Abû Senîme meerwärts geneigten Schichten mit den südlich der Ebene an das Meer

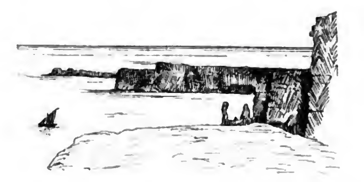


Fig. 19. Südspitze der Sinaihalbinsel (Râs Muhámmed).

herantretenden Bergen von Burdéss. Überaus auffällig ist der Mangel von Saumriffen (und ebenso von fossilen Riffen) an der krystallinischen Aussenkette der Âraba, aber ich wies schon oben darauf hin, dass diese krystallinischen Gesteine sehr bröckelig sind und durch die wüstenbildenden Kräfte stark angegriffen werden. Thatsache ist jedenfalls, dass hier wie auf anderen Granit- und Porphyrwänden des Sinaigebirges keine Spuren gegenwärtiger oder einstiger Riffe beobachtet werden konnten.

Von Tôr ab südlich ist längs der ganzen Küste das Saumriff zu verfolgen; nur dass bei dem Überhandnehmen der pelagischen Riffe viele Küstenstrecken nicht mehr vom frischen Meerwasser erreicht werden. Es bilden sich Lagunen und Salztümpel und das Thierleben wird gehindert. Um so schöner und reicher sind die Saumriffe am Râs Muhámmed, weniger durch die Menge als durch die Formenpracht der Korallen und die korallophile Fauna. Die 100 m hohe

Felsklippe (s. Fig. 19) hat rings steil abstürzende Ränder. In dem schwarzblauen Wasser werden Tiefen von 280, 480, 485, 592 Fd. gelothet, direct neben der Küste. An diesen senkrechten Felswänden zieht sich als horizontaler Schirm ein 5—8 m breites Korallenriff. Von geeigneten Stellen kann man beobachten, dass es überhängt und 2—3 m Dicke besitzt. Das Wasser darauf ist 1—2 m tief, so dass man bequem darin arbeiten kann. Nirgends beobachtete ich eine solche Farbenpracht in der Ausbildung der Korallen; das Leben der korallophilen Thiere zeigte eine ungesehene Formenfülle, und die

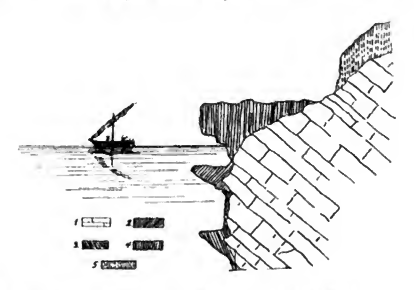


Fig. 20. Profil durch die Ostküste des Râs Muhâmmed.
1. Nubischer Sandstein. 2. Lebendes Riff. 3. Abgestorbenes Saumriff. 4. Jüngeres fossiles Riff. 5. Älteres fossiles Riff.

Stunden, welche ich auf diesem Riff studirend und sammelnd verlebte, haben mir den tiefsten Eindruck hinterlassen. Von einer vorspringenden Klippe entdeckte ich, dass unter dem Schirm des Saumriffes sich ein zweiter Schirm in etwa 6 m Abstand dahinzog (siehe o. Fig. 20). Dieses untere Saumriff schien mir aber abgestorben zu sein, denn es hob sich durch seine weisse Farbe lebhaft ab von der bunten Farbenpracht des lebenden oberen Schirmes. Und da ich niemals beobachtet habe, dass die Farben lebender Korallen in grösserer Wassertiefe weiss erscheinen, da auf dem lebenden Riff aber alle abgestorbenen Partien weiss sind, so glaube ich mich zu der Annahme berechtigt, dass der untere Schirm abgestorben sei, und vermuthe, dass die Gesammterscheinung durch eine 6 m betragende locale Senkung der Râs Muhâmmed-Klippe bedingt wurde.

In der Bucht Ghasuláni, östlich vom Râs Muhámmed, waren ebenfalls Korallenansiedelungen, doch trugen sie einen jugendlichen Charakter. Es fehlten die grossen Madreporen, und die meisten Korallenstöcke waren unausgewachsen. Diese Thatsache harmonirt sehr glücklich mit jener in der Einleitung erwähnten, dass gegen Osten zu, im Golf von Akabâh, das Korallenleben überhaupt zurücktritt und fehlt.

2. Die pelagischen Riffe.

Nahe bei Súes, am Fuss der 1500 m hohen Steilwand des G. Atakáh, finden sich einige kleine Korallenansiedelungen, welche als Etulebank, Atakáhriff und Mensiyeriff bekannt sind. Ich vermuthe, dass sie auf Blöcken aufsitzen, welche vom Atakáh einmal abgestürzt sind, denn das Meer ist sehr seicht und die Riffe von sehr geringer Ausdehnung, so dass sie im richtigen Grössenverhältniss auf meiner Karte nicht darzustellen gewesen wären.

Das erste wirklich pelagische Riff ist Schâb el Chássah[1]) am Râs Djehän, dem Nordende der Áraba. Es ist eine 3 km lange Klippe, welche ziemlich genau S—N streicht und dadurch vereinzelt dasteht gegenüber allen anderen pelagischen Riffen des Meerbusen von Súes, die in parallelen Zügen durchgängig SO—NW steichen.

Das ziemlich breite Saumriff, welches am G. Hammâm Mûsa beginnt, löst sich bei Tôr von der Küste ab und bildet durch den Vorsprung Râs el mîne und dessen Fortsetzung Erg Tôr den Hafen von Tôr. Erg Tôr ist ein langgestrecktes Riff (auf den englischen Seekarten fälschlich Erg Ryah genannt), das auf der kleinen Karte in der linken unteren Ecke der geologischen Karte nach englischen und eigenen Lothungen dargestellt wurde. Das Saumriff läuft bei Grûm und Gebêle vorbei bis Schêch Reîah, wo es sich wiederum von der Küste ablöst, um NW—SO streichend bis Schâb oder Erg Reîah zu ziehen. Auch hier wird durch den pelagisch werdenden Ast des Saumriffes ein guter Ankerplatz umschlossen, der durch die

1) Schâb bedeutet »Koralle«, »Korallenriff«. Die Abkürzung crl (= Koralle) als Charakter der bei einer Lothung gewonnenen Grundprobe, wird von den Seeleuten für Muschelreste ebenso gebraucht, wie für Korallenfragmente, ist daher kein Massstab für die Verbreitung der Riffe.

Cisterne an dem Heiligengrab den Perlfischern sehr werthvoll ist. Abermals beginnt an der Küste ein Saumriff, welches sich bei Râs Sibýlle ablöst und NW—SO streichend Schâb Sibýlle und Schâb Jarrah (besser Gâr) bildet. Auch Schâb Âli bildet die directe Fortsetzung dieses Riffzuges und besteht aus mehreren, verschieden breiten Riffen, welche den 31 Fd. tiefen »inneren« von dem »äusseren« Schiffahrtskanal trennen.

Schâb Itiguig, im Schutze dieses Riffzuges gewachsen, zeigt den linearen Bau nicht so deutlich, als die bisher genannten Riffe.

Ein letztes Mal zweigt sich bei Râs Sérabêh das Saumriff von der Küste ab, wird pelagisch und lässt sich NW—SO als langgestreckte Rifflinie im Schâb Mahmúd bis zu jenem Punkte verfolgen, wo der Meeresboden rasch zu 320 Fd. abstürzt.

Werfen wir noch einen Blick auf die Vertheilung der Korallenriffe an der afrikanischen Küste des Meerbusen von Súes. Dieselbe zeigt im Norden ziemlich ähnliche Verhältnisse wie die Sinaiküste. Das Saumriff am Râs Safarâna ist nicht unbedeutend und bot südarabischen Perlfischern reiche Beute. Nach Süden folgt eine lange ziemlich rifffreie Strecke bis zum Südende der Setîe, dem petroleumreichen Bergrücken des Gébel Sêt. Wo dieser Rücken unter die Meereswogen taucht, beginnen sofort wieder die pelagischen Riffzüge. Der grössere ist: Schâb Ranîm — Lebeit — Mulheimed — Towilah — Abu Rakow — Abu Melene — Gumarch und die kleinen Klippen des Schâb Seriäh und Carlessriff. Parallel mit diesem Riffzug läuft in der Verlängerung einer westlich des Gébel Sêt gelegenen Bergkette ein zweiter Riffzug. Derselbe beginnt mit Schâb Áschrafi und setzt sich durch Schâb Djûbal — Umm Usch — Abu Nähâs nach Scheduân fort. Die letztgenannte Insel besteht in ihrer Mittelzone aus Granit, an den sich zwei seitliche Kalkschollen beiderseits anlegen. Südlich von Scheduân erreicht das Korallenriff mit dem Beginn grosser Meerestiefe sein Ende.

Bei Djîmseh beginnt ein letzter Riffzug, der gegen Süden sich von der Küste ablöst und bei grosser Mannichfaltigkeit der einzelnen Riffe doch das einheitliche NW—SO Streichen erkennen lässt.

Nachdem wir somit festgestellt haben, dass die pelagischen Riffe des Meerbusen von Súes durchgehends in der Verlängerung untertauchender Bergrücken auftreten und ein diesen paralleles Streichen

besitzen, erübrigt es noch, einer interessanten Eigenthümlichkeit der beschriebenen Riffe zu gedenken.

Wenn jenes Streichen NW—SO bei oberflächlicher Betrachtung so auffällig ist, so zeigen sich im Einzelnen doch eine Reihe von Abweichungen. Bald verbreitert sich der schmale Riffzug, bald giebt er Äste ab, bald löst er sich in einzelne isolirte Riffe auf. Und eine Anzahl solcher kleinerer vereinzelter Riffe zeigt deutlich die Form von ringförmigen Atollen. Beistehend gebe ich die Copien einiger solcher Atolle (nach der grossen Karte Strait of Jubal, Fig. 21). Betrachten wir das Südende der Insel Djiftîn ([3]), von deren Saumriff sich zwei Arme losgelöst haben und halbkreisförmig gegeneinanderwachsend ein rundes Wasserbecken umschlossen. Dann Schâb Umm Usch ([4]), welches ein ebensolches halbgeschlossenes Atoll ist, endlich Schâb Serûr ([1]) und die völlig geschlossenen Abu Serîe ([5]) und Abu Jensîh ([2]). Alle diese Figuren zeigen uns, wie im linearen Bau langgestreckter Riffe durch seitliche Abzweigung ringförmige Riffatolle entstehen können. Es ist interessant, dass in diesem Fall Atolle entstehen bei einer (s. u.) negativen Strandverschiebung, während nach Darwin positive Strandverschiebung eine wesentliche Vorbedingung der Atollbildung sein soll. Zugleich lässt sich hier kein ursächlicher Zusammenhang zwischen der runden Form des Atolls und dem Relief des Untergrundes nachweisen. Es scheint daher, dass die Atollbildung hier weder durch kreisförmige Unterlage, noch durch »Senkung« beeinflusst wird, und vielmehr von anderen, biologischen Factoren abhängig ist.

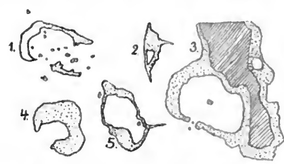


Fig. 21. Atollbildungen in der Strasse von Djûbal.

3. Die Sedimente des Riffes.

An einer flachen, Stürmen ausgesetzten Meeresküste kann man längs des Ufers zwei Anhäufungen von ausgeworfenen Conchilien, Tang und Fremdkörpern beobachten. Zuerst im Durchschnittsniveau des Meeresspiegel den Strandwall.



Wüste am Râs Muhámmed.

Das stete Spiel der Wellen bewegt die ausgespülten Muschelschalen, Tang, Sand, Steinchen rhythmisch auf und ab, rollt und schleift an Allem und zerstört leicht die Verzierungen der Conchilien. Daher findet man im Niveau des Meeres in dem genannten Strandwall nur selten gut erhaltene Thierreste; was man findet, ist abgerollt und rund geschliffen. Die Anschauung, dass durch das rollende Spiel der Wellen die Muschelreste zerbrochen und zerkleinert würden, ist unrichtig; denn die Entstehung jener geologisch so sehr wichtigen Ablagerungen, welche als Lumachelle, als Muschelsand, als Kalkdetritus bezeichnet werden, hat, wie ich weiter unten ausführen will, gänzlich andere Ursachen.

Längs des Strandes zieht sich aber häufig noch ein zweiter Streifen ausgeworfener Meeresreste entlang, welcher dem sogenannten »Winterstrand« an unseren norddeutschen Küsten entspricht und den ich als Fluthwall bezeichne. Dieser Fluthwall entsteht durch die gesteigerte Thätigkeit der sturmbewegten Wogen. Bei Sturm werden viel mehr Thiere, selbst in grösserer Tiefe erfasst und von den Wellen an den Strand geworfen. Das erregte Meer wirft sie in ein viel höheres Niveau und wenn sich der Sturm gelegt hat, berührt die Durchschnittswelle nie den Fluthwall der ausgeworfenen Reste wieder. So kommt es, dass dort die besterhaltenen und mannichfaltigsten Thierreste gefunden werden. Sie sind nicht zerbrochen und wenig abgerollt.

Während mich an der rifffreien Küste bei Súes und längs der Tyhwüste der Fluthwall mit seiner reichen Fauna oft erfreute, war ich enttäuscht, als ich zum erstenmale bei dem Beduinendorfe Grûm den Strand hinter dem Korallenriff besuchte. Eine kärgliche Auswahl abgerollter Muschelreste, etwas Tang und Seegras und ein foraminiferenreicher Sand waren meine einzige Ausbeute. An manchen Stellen waren Tridacnaschalen aufgehäuft, aber sie waren von Fischern dorthin gebracht und des Fleisches wegen zerschlagen worden. Ich glaubte, diese Armuth des Strandes hinter dem Riff sei eine locale Erscheinung, ritt drei Tage lang bis zum Râs Muhámmed so nahe an der Küste, als es der weiche Lehmboden erlaubte, und ging täglich einige Stunden am Strande entlang; aber überall war ich enttäuscht von der geringen Ausbeute. Nur am Râs Muhámmed, wo das Riff sein Ende erreicht, wurde die Strandfauna reicher, ein Fluth-

wall mit vielen Mactraschalen, einige kostbare Aspergillumröhren, seltene schöne Echinodermen und zwischen ihnen unzählige Einsiedlerkrebse (Coenobita rugosa), welche mit ihrer Scheere das Gastropodenhaus verschliessen, als ob ein Operculum darauf wäre, Alles das trat erst auf, als das Riff sein Ende erreicht hatte.

Doch diese Thatsache ist nicht so wunderbar, als es mir anfangs erschien. Ein Blick auf das Meer lehrt, dass die Brandungswelle sich bricht an der pelagischen Kante des Riffes. Ein weisses Schaumband zieht sich längs der Küste und bezeichnet die Stelle, wo das Riff beginnt. Im Schutze dieses Wellenbrechers kann man noch bei ziemlich bewegter See ruhiges Wasser finden und bis zum Hals im Wasser herumwandeln. Der Mangel eines Fluthwalles, die Thierarmuth des Strandes hinter dem Riff sind eine einfache Folge jenes Wellenbrechers in der See.

In einem Wüstenlande tritt aber noch ein zweiter Factor hinzu, der die Entwicklung einer Strandfauna verhindert: es ist der Flugsand und der Feldspathstaub. Die durch den natürlichen Wellenbrecher geschwächte Woge kann den ins Meer getriebenen Sand nicht wieder auswerfen, das Wasser wird seicht, es bilden sich Tümpel, an deren Boden das Kochsalz sich in weissen Krusten ausscheidet; in ihnen können nur noch Cerithien ihr Leben fristen. Rechnen wir zu allen diesen Umständen noch jene Thatsache, dass sich an den Küsten des Meerbusen von Súes eine negative Verschiebung der Elementengrenze vollzieht, so ist damit zur Genüge erklärt, warum der Strand hinter dem Riff eine so auffällige Thierarmuth zeigt.

Das Saumriff konnte leicht zu Fuss untersucht werden, da das Wasser 1—2 m tief ist und nur an der Riffkante tiefere Lücken und Brunnen auftreten; aber auch dort kann man sich mit einiger Vorsicht immer im mannstiefen Wasser bewegen, und die Gefahr, in eine jener Lücken zu stürzen, ist bei ruhigem Wasser nicht so gross, wenn man einen Begleiter hat, und mit einem Stock die Festigkeit der Korallenschirme prüft. Die Gefahr der Haifische auf dem Riff scheint mir von den Eingeborenen übertrieben zu werden, denn ich habe nur 1—2 m lange Individuen beobachtet; auch die grossen Rochen entfliehen so wie man sich ihnen nähert. Die Füsse muss man bis zum Knie dicht mit Binden umwickeln und durch Bastschuhe

schützen, da die Korallen die Haut verletzen. Will man Korallen mit den Händen abbrechen, so empfehlen sich Handschuhe, da man sonst leicht blutende Hände bekommt. Besser ist ein kleiner massiver gutgestählter Spaten zum Ablösen der Korallen. Zeichnungen und Notizen wurden auf einem leichten Reissbrett direct auf dem Riffe gemacht.

Die Riffsedimente sammelte ich in (deutlich nummerirte) Leinwandsäckchen. Die Nummer wird notirt, und die Säckchen in der Sonne getrocknet, sodann ihr Inhalt in dicke Papiersäckchen verschlossen und diese genau etikettirt.

Als Grundlage für meine Aufnahmen bei Grûm diente mir die englische Hafenkarte von Tôr (Tór Harbour 7[a]), welche ich in viermal vergrössertem Maassstabe hatte autographiren lassen, so dass ich täglich ein neues Blatt für meine Eintragungen benutzen konnte. Das Strandriff bei Grûm habe ich auf diese Weise acht Tage lang je 4—5 Stunden begangen, und der Aufenthalt im mannstiefen Wasser war oft angenehmer, als der in der kühlen Luft am Strande.

Etwas schwieriger war die Untersuchung des pelagischen Riffes Erg Tôr. Der neuernannte deutsche Consularagent Hannén in Tôr, der die Empfehlungsschreiben von E. Haeckel, v. Ransonnet und anderen Gelehrten mit besonderem Stolze vorzeigt, half mir in der zuvorkommendsten Weise. Er selbst oder einer seiner Söhne begleitete mich mit seinem Segelboot auf das Riff, und Básili Hannén tauchte mit den gemietheten Negern um die Wette. Mein Interesse für abgestorbene Korallenstöcke, oder gar für Sand und Seepflanzen fand freilich nur wenig Verständniss, und mit mitleidigem Bedauern sah man mich an, wenn mir die abgestorbenen Korallenäste mehr Freude machten, als die farbenprächtigsten Schirme. Doch allmählich gewöhnten sich die Leute daran und lernten auch mit Loth und Dredge umgehen. Ich hatte eine Eimerdredge von starkem Zinkblech mitgenommen, deren Rand durch aufgenietete scharfe Eisenbänder verstärkt war. Der Henkel konnte herausgenommen werden, wenn er sich verbogen hatte und ebenso beim Verpacken.

Da die englische Seekarte nach Faden durchlothet ist, so hatte ich auch meine Lothleine und Reserveleine durch Fadenknoten abgetheilt. Das Loth war 2 Kilo schwer, durch einen Mennigeanstrich vor dem Rosten geschützt, und an seiner Basisfläche war die Grube

zur Aufnahme des Talges. Mit Rücksicht auf das heissere Klima hatte ich ein Talggemenge mitgenommen, das bei 30° noch zähe blieb.

War durch das Loth die Tiefe des Wassers und die Beschaffenheit des Sedimentes festgestellt, und bot letzteres besonderes Interesse, so wurde die Dredge hinuntergelassen, die Taucher sprangen nach und füllten sie am Meeresgrund. Nur am letzten Tage wagte ich es, die Dredge in solchen Tiefen ziehen zu lassen, wo die Taucher nicht mehr arbeiten konnten. Dreimal schien sie verloren, und es erforderte lange Arbeit, sie aus den Klippen freizumachen.

In anschaulicher Weise schildert KLUNZINGER[1]) und im Anschluss an ihn O. FRAAS das Leben auf dem Riff in Kossêr, und unterscheiden fünf verschiedene Zonen. Ich habe dieselben nicht in gleicher Schärfe beobachten können und will daher nicht den Versuch machen, das Schema von Kossêr auf Grûm zu übertragen, sondern ich werde versuchen, die verschiedenen Gebiete auf und an dem Riff als verschiedene Stadien eines einheitlichen Processes darzustellen und mit meiner Schilderung dort beginnen, wo das Riff in seiner Blüthe steht.

Tausende kleiner Korallenthiere sprossen auseinander hervor und bilden den Korallenstock; ein festes Cönenchym verbindet die einzelnen Kelche und das Individuum vermag seinen Standort nicht zu wechseln. Wohl kann es mit Hülfe seiner zarten Tentakeln ein kleines Nachbargebiet tastend durchgreifen, aber der Nahrungserwerb kann durch solche active Bewegungen nicht auf verschiedenem Gebiete ausgeübt werden. So sind jene unzähligen Thierchen darauf angewiesen, dass die Welle ihre Nahrung herbeiträgt. Ein bewegtes, stets mit frischer Nahrung erfülltes reines Wasser ist daher die nothwendige Voraussetzung des Korallenlebens. Indem sich die Individuen zum Stocke vereinen, gewähren sie sich gegenseitig einen mechanischen Schutz, und je stärker die Welle daherbrandet, desto enger und gedrängter müssen sie sich zum Stocke verbinden; dem horizontalen Stoss des Wassers muss der Stock einen möglichst geringen Widerstand bieten und zugleich so gebaut sein, dass allen ihn zusammensetzenden Einzelthieren gleichmässig viel Nahrung zugeschwemmt wird.

1) Bilder aus Oberägypten, S. 326—373.

Mögen in den Tiefen des Oceans Einzelkorallen leben und gedeihen können, das Lebenselement des Korallenstockes ist die bewegte Flachsee. Und eine einfache Anpassung an die Lebensbedingungen der Brandungszone ist die schirmförmige Gestalt der Korallenstöcke; eine Gestalt, welche viel Oberfläche und wenig seitlichen Widerstand bietet.

Allein noch eine weitere Bedingung muss erfüllt sein, wenn ein Korallenstock wachsen und gedeihen soll. Die bis 3 m breiten, mehrere Centner schweren Korallenschirme erheben sich auf einem relativ schmalen Stiel. In ihm ist das Cönenchym am mächtigsten entwickelt und nur vereinzelte Kelche ernähren ihn; noch weniger Korallenthiere aber enthält die lappige Cönenchymbasis, mit welcher der Stock aufgewachsen ist. Auf sandigem oder leicht zerbröckelndem Untergrund kann aus rein physikalischen Gründen ein 2 m breiter Madreporenschirm nicht festwachsen — die erste hohe Welle würde ihn abbrechen. Wie fest manche Korallen aufgewachsen sind, das merkt man, wenn die Taucher mit einem kleinen Brecheisen oder mit Hammer und Meisel unter Wasser arbeiten. Manchen schönen seltenen Stock habe ich dem Meere lassen müssen, bloss weil ich ihn, selbst mit Hammer und Meisel, nicht abzulösen im Stande war. Ein fester, nicht verschiebbarer Untergrund ist daher eine wesentliche Vorbedingung für das Gedeihen von Riffkorallen. Mag er von anstehenden Felsen oder von Korallenästen gebildet sein, welche durch Kalkalgen verkittet wurden, nur auf ihm wird sich ein Korallenriff ansiedeln.

Bei der so überaus intensiven Vermehrung durch Theilung und Sprossung spielt die geschlechtliche Fortpflanzung der Korallen nur eine untergeordnete Rolle, obwohl naturgemäss nur auf diesem Wege die Bildung neuer Stöcke erfolgen kann, sofern nicht der von Klunzinger beobachtete Vorgang einer Knospenablösung bei Balanophyllia gemmifera auch bei anderen Korallen vorkommt. Die befruchteten Embryonen und Larven schwimmen frei im Wasser umher und mögen vielleicht einen Theil der Nahrung benachbarter Korallen bilden. Das ist wohl auch einer der Gründe, weshalb so selten eine Korallencolonie auf einer anderen lebt. Sobald sich eine Larve dem lebenden Stock nähert, wird sie von den Millionen kleiner Tentakeln gewiss ebenso ergriffen, durch die Nesselorgane betäubt und endlich

verzehrt, wie jedes andere im Seewasser flottirende Infusor. Ein anderer Grund ist der, dass das Cönenchym in gleicher Weise wie der Kelch mit einer Sarkodehaut überzogen ist. Nur da, wo die Sarkode durch eine Verletzung entfernt wurde, kann sich eine kleine Korallengastrula festsetzen und, durch Knospung sich vermehrend, einen Stock bilden, der unter Umständen den darunter befindlichen Stock überwachsen und aushungern kann. Der von Ehrenberg[1]) aufgestellte Satz, dass keine Koralle auf einer anderen wachse, erleidet viele Ausnahmen. Im Allgemeinen wird allerdings die Regel sein, dass der Tod des einen Stockes vorausgehen muss, ehe sich ein zweiter darauf ansiedeln kann.

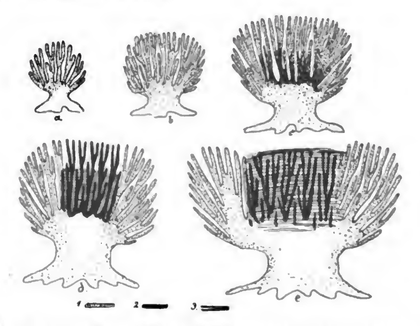


Fig. 22. Wachsthum und Absterben eines Stylophorastockes.
1. Lebende Äste. 2. Abgestorbene Äste. 3. Kalksand.

Die centralen Äste eines Stockes sind zuerst entstanden, sie sterben auch zuerst wieder ab. Semper[2]) erklärt die centrale abgestorbene vertiefte Partie von Poritesstöcken dadurch, dass sie bei Ebbe vom Wasser entblöst und endlich durch Regenwasser ausgewaschen würde. Diese Voraussetzung trifft für den Meerbusen von Sües nicht zu, in dem ich niemals einen vom Wasser ganz oder theilweise entblösten lebenden Korallenstock beobachtete, trotzdem ich

1) Ehrenberg, Über die Natur und Bildung der Korallenbänke des rothen Meeres. Abh. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1834. S. 50.

2) Semper, Die natürlichen Existenzbedingungen der Thiere. II. S. 32.

zu allen Zeiten, bei Ebbe wie bei Fluth, stundenlang auf dem Riffe war. Der Semper'sche Erklärungsversuch lässt sich daher auf die von mir untersuchten Gebiete nicht übertragen. Da aber hier die halbabgestorbenen Korallenstöcke häufig sind, und da es die mittleren ältesten Äste des Stockes sind, welche zuerst absterben, so scheint mir die Anschauung naturgemäss, dass es sich hier um einen Tod aus Altersschwäche handelt und dass die Lebensdauer eines Korallenstockes begrenzt sei. Am schönsten lässt sich dieser Absterbeprocess an Stylophora verfolgen und die obenstehenden Bilder veranschaulichen, wie ein solcher Stock wächst und stirbt (Fig. 22). Aber auch andere Gattungen zeigen ähnliche Bilder und lassen erkennen, wie die mittleren (schwarz bezeichneten) ältesten Theile absterben, während der Rand des Stockes noch kräftig weiter wächst und gedeiht (Fig. 23, 24).

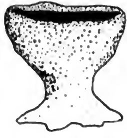


Fig. 23. Halbabgestorbener Poritesstock.

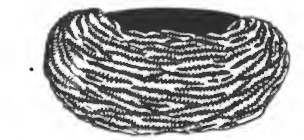


Fig. 24. Halbabgestorbener Coeloriastock.

In dem Maasse als die centralen Theile eines Stockes sterben, siedeln sich Algen, Florideen, Bryozoen, Sertularien und andere Polypen, Gorgoniden und viele kleine Organismen auf ihnen an. Die Krebschen, welche in grosser Zahl und aus allen Familien zwischen den Ästen der Koralle leben, finden darauf eine willkommene Nahrung, grosse Krebse oder Fische mit kräftigen Schneidezähnen weiden daran und unterstützen den Zerstörungsprocess. Wohl sendet der Stock immer aufs Neue seitliche Äste aus, aber sein Mark wird zerstört. Lithodomus, welche schon in lebenden Ästen häufig eingesenkt ist und nur durch ein kleines Loch mit der Aussenwelt communicirt, bohren sich in ganzen Schaaren in die abgestorbenen Äste, so dass man beim Durchschlagen derselben alles von 2 cm langen Löchern durchwühlt findet; Anneliden, oft 60 cm lang, nagen lange vielgewundene Gänge durch das Cönenchym und grössere Krebse und

Fische stellen wieder diesen weichhäutigen Würmern nach. Was sich lockert oder von den grösseren Thieren abgebrochen wird, das zerkleinert das Heer kleinerer Raubthiere, und allmählich wird aus dem farbenprächtigen Korallenstock ein unscheinbares algenbewachsenes tropfsteinartiges Gebilde, das nur noch auf dem Querbruch die Korallenstructur erkennen lässt, denn die Kelche wurden zuerst zerstört.

Auf den todten Ästen siedeln sich rothe und grüne Algen, Actinien, Synascidien an, kleinere Asteriden, Ophiuriden, Gasteropoden etc. leben darauf, häufig angepasst an die dunkelrothe Farbe der Kalkalgen. Zwischen den Algenrasen kriechen kleine Foraminiferen umher



Fig. 25. Treppenförmiger Aufbau eines Madreporenriffes.

und bilden wohl die Nahrung vieler Thiere. Der Algenthallus corrodirt die Oberfläche der Koralle immer mehr und gerade die zarten Kelchsepten gehen am raschesten zu Grunde. Wo zwei Äste übereinander liegen, da werden sie verkittet durch Bryozoenrinden oder noch häufiger durch dunkelrothe Kalkalgen (Lithophyllum). Wie Lebermoose an feuchten Mauern, so kriechen die lappigen Blättchen überall herum und verkitten und überrinden alle Korallenäste am Boden. Dadurch aber wird ein fester Rost geschaffen, auf dem neue Korallencolonien sich anzusiedeln vermögen.

Wichtig für den Gesammtbau der Riffe ist es, dass die zahlreicheren und charakteristischen Formen in ihrer verticalen Höhe eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Besonders Madrepora corymbosa

und ähnliche Arten, welche durch ihre Zahl dominiren, werden selten höher als ein Drittel des Schirmdurchmessers. Auch Stylophora überschreitet nicht eine gewisse entsprechende Höhe. Dadurch wird die Oberfläche des Riffes treppenförmig gestaltet. Eine Schirmplatte setzt sich auf die andere auf und das Riff ersteigt man auf einzelnen Stufen. Andere Formen, wie Coeloria, Pocillopora u. s. w. bringen eine gefällige Abwechslung in den Bau des Riffes, doch geben ihm die schirmförmigen Stöcke seinen typischen Charakter (s. obenstehende Fig. 25 und Taf. IV). Aber ich will schon an dieser Stelle darauf hinweisen, dass dadurch keine horizontal gefügte Masse entsteht, denn die fossilen Riffe sind vertical zerklüftet.

Die allgemeine Anordnung der Korallen auf dem Riff möchte ich am liebsten mit einem Parke vergleichen. Zwischen blühenden Buschgruppen und buntfarbigen Blumenbeeten verschlingen sich sandbedeckte Wege; bald verschmälern sie sich zwischen hohen Büschen, münden wohl auch in eine schattige Grotte, bald verbreitern sie sich zu kiesbedeckten Plätzen. Genau so verhalten sich die bunten Korallencolonien zu den weissen Detritusgebieten. In den inneren Rifftheilen wandelt man zwischen flachen Korallenbeeten auf den sandbedeckten Wegen umher. Nach der Riffkante zu werden die Korallenbeete zu 2—3 m hohen Gruppen und der Detritussand nimmt geringere Räume ein.

Wie ich schon einleitend erwähnte, das Riff wächst und gedeiht am besten an der Riffkante, und der gegen das Ufer zunehmende Detritussand zwischen den Korallen lehrt uns ein wichtiges Capitel aus der Lebens- oder besser Sterbensgeschichte des Riffes.

Von Zweischalern ist Chama häufig, aber so mit Algen bewachsen, dass sie schwer zu erkennen ist; nächst ihr aber ist Tridacna das auffälligste Weichthier auf dem Riff. Bei Grûm freilich ist sie selten, aber hier wird sie als Nahrungsmittel viel abgesucht. Am Râs Muhâmmed jedoch waren manche Stellen mit Tridacna übersäet, ein Thier lag ½ Meter vom anderen. Der grünblaue Mantelsaum derselben trug nicht unwesentlich bei zur Farbenpracht der dortigen Riffe. (Die Korallen sind meist grün, olivenbraun und violett, nur Stylophora ist gewöhnlich hellroth.)

Meine Bemühungen, grössere Kalkalgenlager auf dem Riffe zu finden, waren vergeblich. Am Landungsplatze der Fischerboote bei

Grûm lagen eine ganze Anzahl 20 cm grosser, linsenförmiger Lithothamniumknollen; einige derselben hatten Korallen mit einer 5 cm dicken Kruste überwachsen, aber die Fischer konnten mir nicht angeben, wo die Stücke herstammten, und es war mir nicht möglich, das Algenlager aufzufinden. An einer Bucht von Ghasuláni, östlich vom Râs Muhámmed, fand ich den Strand ganz übersäet mit grünen Lithothamnien und mit Corallinaknollen. Ich hoffte, auf dem Rückweg die Stelle näher untersuchen zu können, allein Wassermangel zwang mich, einen kürzeren Weg einzuschlagen.

Somit bin ich ausser Stand festzustellen, unter welchen Bedingungen die gefundenen Algen lebten, und welchen Antheil sie nehmen an dem Bau gewisser Riffstrecken. Nur die schon erwähnten Lithophyllumrinden findet man überall auf allen abgestorbenen Korallenästen als dünnen Überzug. Leider brechen diese dünnen Rinden beim Dünnschleifen gewöhnlich ab und trotz aller Sorgfalt konnte ich keine zusammenhängenden Bilder gewinnen. Um also nicht ein Combinationsbild geben zu müssen, habe ich auf Taf. VI, Fig. 1 einen Schliff dargestellt durch eine Limaschale, welche von Kalkalgen überrindet wurde, aus dem Golf von Neapel.

Die scheerentragenden grösseren Krebse, (Macruren und Bradryuren), entwickeln eine staunenswerthe Geschicklichkeit im Zerbrechen und Zerkleinern von Muschelschalen, Echinodermenskeletten und Fischleichen. Indem sie zwischen den Korallenstöcken jagen, brechen sie die todten Äste ab, welche ihnen das leckere Wild verbirgt und der Hunger eines 50 cm langen Krebses, wie ich ihn auf dem Riff des Râs Muhámmed fing, ist gewiss nicht rasch gestillt. Schon vor mehreren Jahren habe ich in der zoologischen Station zu Neapel Beobachtungsreihen begonnen über die Lebensweise der Krebse, und ihre geologische Bedeutung. Keine Thierleiche sinkt am Meeresgrunde nieder, die nicht sofort von allen Seiten Krebse anlockt. Mit bewunderungswürdiger Schnelligkeit zerzupfen sie das Fleisch, zerreissen und zerbrechen die Skelette und holen aus dem kleinsten Stückchen noch Fleischreste mit ihren Kaufüssen heraus. Mögen bohrende Naticazungen, oder Vioa den Process eingeleitet haben, die scheerentragenden Krebse vollenden ihn, und jene mächtigen Ablagerungen von Detrituskalken, welche sowohl in der Gegenwart, wie in vergangenen Erdepochen eine so grosse Rolle bei der Sedi-

mentation gespielt haben, sind in erster Linie ein Werk der Krebse. Die Zahl der Krebse auf der Secca di Benda Palummo im Golfe von Neapel ist erstaunlich, und ebenso unzählbar sind die Schaaren der kleinen und grossen Krebse, welche die Riffe des Rothen Meeres bevölkern. Sie sind die Strassenpolizei des Meeres und sorgen dafür, dass nirgends faulende verwesende Massen am Meeresgrunde sich ansammeln (ebenso wie die Einsiedlerkrebse den Strand des Rothen Meeres von allem Verwesenden reinigen). Hierbei zerkleinern und zerbrechen sie alle Skeletttheile.

Die Brandung vermag nur zu rollen und zu schleifen, die Krebse aber erzeugen scharfkantige Lumachellen, Muschelbreccien und Detrituskalke, und spielen somit eine wichtige, geologische Rolle am Meeresgrund.

Es ist von einiger Bedeutung, darauf hinzuweisen, dass auf dem lebenden Riff terrigene Sedimente so selten sind und so isolirt auftreten, dass man anzunehmen geneigt ist, sie seien durch Zerstörung submariner Klippen entstanden, nicht aber durch das Meer transportirt worden. Ich glaube, dass häufig die Transportkraft des Meeres für terrigene Sedimente überschätzt wird. Die Thatsache, dass im Seewasser jede Flusstrübe 15 mal so rasch niedersinkt als im Süsswasser, die Betrachtung des submarinen Küstenabfalls an Deltagebieten, die geringe Verbreitung der Deltasedimente in das Meer hinaus, dürfen bei Beurtheilung jener Frage nicht übersehen werden. Die Chloride des Seewassers zersetzen die Felsen am Meeresgrunde ebenso, wie es P. SCHIRLITZ[1]) für die Küstengesteine nachgewiesen hat, und die Sanidinsande finden sich auf der Secca di Benda Palummo im Golf von Neapel ebenso, wie an den Küsten von Sorrent und Ischia — obwohl diese drei Stellen durch weite schlammbedeckte Gründe vollständig geschieden sind.

Auf dem Korallenriff werden fast alle Lücken durch daselbst gebildeten authigenen Kalksand ausgefüllt. C. KELLER[2]) hat sehr klar ausgeführt, wie das Lichtbedürfniss der Korallenarten verschieden ist, und leitet davon die Höhlenbildung auf dem Riffe ab. Wenn es sich nachweisen liesse, dass die Riffkorallen mit Algenzellen in der gleichen

1) J. WALTHER und P. SCHIRLITZ, Studien zur Geologie des Golfes von Neapel. Zeitschrift d. d. geol. Ges. 1886.

2) C. KELLER, Madagascar. 1887.

Symbiose lebten, wie viele Aktinien[1]), so wäre jene Anschauung leicht verständlich und es würde auch erklärlich sein, wovon die Korallenthiere leben, wenn das pelagische Thierleben ihnen einmal wenig Nahrung bietet.

Ob alle Lücken auf dem Riff wirklich ausgefüllt werden, oder ob ein Theil der vielverschlungenen Höhlen, welche das Riff durchziehen, nicht Höhle bleibt, darüber habe ich keine abschliessenden Beobachtungen machen können; ich halte es nach meinen Erfahrungen auf dem Riff nicht für ausgeschlossen, und will auf die theoretische Bedeutung dieser Erscheinung für die Entstehung von Höhlen im Kalkgebirge nur beiläufig hinweisen.

In dem Maasse als man sich von der Riffkante aus dem Ufer nähert, nehmen die Korallen ab und die Detritussande zu, bis endlich am Strande auch terrigene Elemente sich am Sediment betheiligen. Während an der bewegten Brandungszone der Riffkante die Madreporen herrschen, werden sie nach der Küste zu immer seltener und Stylophora bildet die charakteristische Form dieser inneren Zone. Die von Klunzinger vorgeschlagenen Namen Madreporenzone und Stylophorazone sind glücklich gewählt und bestimmen den Typus. Die Madreporen wachsen meist als flache Schirme; Stylophora hat keine brandenden Wogen zu brechen, sie strebt mehr vertical in die Höhe (s. Fig. 22). Gegen die Küste zu werden auch sie immer kümmerlicher; halbabgestorbene Stöcke sind häufig, schwarze Echinometra lucunter liegen zu Tausenden im Sande, und ihre zerbrochenen Stacheln färben ihn häufig grau.

So stirbt das Riff schrittweise nach der Küste zu ab. Algen und Phanerogamen bilden im seichteren Wasser wenig erhöhte Rasen, Thalassia Hemprichii, Cymodocea serrulata, C. ciliata, Halophile stipulata machen sich breit. Dazwischen ist der Grund gepflastert mit kleinen schwarzen Mytilus, so dass der Fuss knirschend darüber hinweg schreitet. Direct am Strande scheint das Korallenleben aufs Neue zu beginnen, flache Korallenfelsen bilden ihn; jedoch es ist nur ein subfossiles Riff, das die Wellen vom bedeckenden Sande entblöst haben. Eine Grenze zu ziehen zwischen dem lebenden Riff und diesen subfossilen Felsen ist schlechterdings unmöglich und so

1) Brandt, Über Symbiose von Algen und Thieren. Arch. f. Anat. und Physiol. 1882.

mischen sich auch am Strande die Reste lebender Thiere mit den gebleichten, oder durch Thonschlamm gelb gefärbten Fossilien einer jüngstvergangenen geologischen Periode.

Das Aquarell der Tafel IV giebt in seiner oberen Hälfte ein Bild von der Oberfläche eines Riffes in jener Smaragdfarbe, wie ich sie bei Grûm öfters beobachtete. Links, dem Ufer nahe, sind grüne Pflanzenrasen, polsterartig erhöht, dazwischen die schwarzen Mytiluspflaster. Nach rechts schliesst sich die Zone der rothgelben Stylophora, zwischen deren Stöcken die schwarzen Echinometren liegen. Darauf folgt die Zone der olivgrünen Madreporen mit ihrem treppenartigen Gefüge und tiefen Lücken, weiter rechts wird das Wasser rasch mehrere Meter tief und das Riff erreicht sein Ende. Die untere Hälfte des Bildes ist als Durchschnitt durch dasselbe Riff gedacht, und wurde aus einer Anzahl natürlicher Durchschnitte componirt, um das allgemeine verticale Gefüge des abgestorbenen Riffes und das Verhältniss der (dunkel schraffirten) Korallenstöcke zu dem (hellen) Füllsand zur Darstellung zu bringen.

Nach Fraas l. c. S. 192 ist das Vorkommen von Schwefel am G. Djimseh und von Petroleum am G. Sèt eine Erscheinung, welche im Zusammenhang steht mit dem Absterben des Riffes. Nach dem Bericht des Herrn Ingenieur Michel aber, welcher die Bohrungen am G. Sèt leitet, und nach den Gesteinsproben von dort im Museum von Cairo nimmt das Petroleum nach der Tiefe an Menge zu und es befindet sich das eigentliche Petroleumlager in der Kreide, vielleicht sogar im nubischen Sandstein.

Über das Schwefellager an den Korallenriffen von Djimseh berichtet Herr Michel, dass es in Verbindung stehe mit einer Schwefelquelle. Dieselbe Verknüpfung von Schwefelquellen am G. Hammâm Pharaûn und G. Hammâm Mûsa der Sinaihalbinsel mit vergypsten Kalkschichten und Gypslagern wurde von mir schon oben erwähnt.

4. Marine Oolithe.

In der Nähe von unbedeutenden Korallencolonien treten bei Sûes und in höherem Maasse am Rand der Tyhwüste recente Oolithsande auf, welche ein gewisses Interesse beanspruchen dürften. Es ist aber mehr die räumliche, als die genetische Beziehung, welche mich veranlasst, im Anschluss an die Korallensedimente auch die Oolithsande zu schildern.

Schon auf dem ebbeentblösten Strande bei Súes waren mir kleine weisse Körnchen von porzellanartigem Glanz und 0,3 mm Durchmesser aufgefallen, welche Oolithe zu sein schienen. Allein sie waren so vereinzelt, dass diese Erscheinung auch anders hätte erklärt werden können. Am zweiten Tag meiner Reise durch die Tyhwüste lagerte ich Mittags im Uâdi Dehêse, einem geröllreichen Rinnsal mit vereinzelten Salsolasträuchern. Zwischen den vom Flugsand polirten und abgeschliffenen Kalkgeröllen fielen mir abermals die kleinen porzellanartigen Körnchen auf, welche Milioliden ähnlich sahen, aber doch keine Foraminiferenstructur zeigten. Ich vermuthete, dass sie aus dem Gebirge herausgeführt worden seien, allein beim Graben kam ich bald auf einen marinen Lehm, welcher dem Salzthon glich, der auf dem ebbeentblösten Strand das Sediment bildet, und in ihm war die Zahl der Körnchen bedeutend grösser. Ich verfolgte daher die schwach geneigte Ebene nach dem Meeresstrande und sah, wie die weissen Körnchen immer zahlreicher wurden. Hinter dem aus vielen schönen Conchilien bestehenden Fluthwall war eine dünenartige Anhäufung von Oolithkörnchen und der flache Meeresboden war mit einem gelben Schlamm bedeckt, welcher ausschliesslich aus feinem Oolith bestand. Der Schlamm zeigte parallele Rippelmarken und viele verwesende Thierreste lagen im 10 cm tiefen Wasser zwischen subfossilem Riffkalk. Unter dem weichen Schlamm der Bodenoberfläche waren die Körnchen schon etwas verkittet und zu Klümpchen von 10—30 vereint, endlich bei 5 cm Tiefe war das Sediment so fest, dass man es schneiden konnte. Meine erste Vermuthung war auch hier, dass diese Oolithkörnchen durch den Zerfall eines Oolithgesteins gebildet wurden, aber nirgends sah ich am Strande ein solches anstehen oder auch nur Bruchstücke davon. Ich achtete nun während meiner ganzen folgenden Reise durch die Sinaihalbinsel und die arabische Wüste bis zum Nil sorgfältigst, ob ich nicht irgendwo ein Oolithgestein finden möchte, suchte alle aufgenommenen Profile besonders auf diesen Gesichtspunkt hin durch, und ich kann mit Sicherheit aussprechen, dass in den Gesteinen der Sinaihalbinsel und der von mir durchreisten Gebiete der arabischen Wüste nirgends Oolithbänke oder auch nur Oolithkörner auftreten und bin daher überzeugt, dass das Oolithlager am Ausgang des Uâdi Dehêse eine recente Bildung in statu nascendi ist.

Zur mikroskopischen Untersuchung wurden die mit Terpentin befeuchteten Körnchen in Canadabalsam eingeschmolzen und so geschliffen. Wie Taf. VI, Fig. 2 erkennen lässt, sind die einzelnen Oolithkörnchen rundlich, aber von etwas verzogenen Umrissen. Die äusseren Umrisse entsprechen durchgängig den Ecken und Kanten der eingeschlossenen Quarzkörner. Nur ein kleinerer Theil zeigte sich aus mehreren Schalen aufgebaut; in solchem Fall befand sich eine schwärzliche Zone zwischen der inneren dunkelgelben und des äusseren hellen Kalkrinde. Während die Gesammtgrösse der Oolithe ziemlich gleiche Dimensionen zeigt, ist der Kern doch von ganz verschiedener Grösse, und diese Thatsache scheint mir beachtenswerth für die Entstehung der Oolithe. Denn nur so lange können dieselben mit neuen Kalkrinden umgeben werden, als sie die Bewegung des Wassers flottirend erhält. Je stärker der Wellenschlag ist, desto grösser können die Körnchen werden, aber sobald sie eine bestimmte Schwere erreicht haben, sinken sie zu Boden.

Die durch Salzsäure isolirten Kerne bestehen hauptsächlich aus Quarz, aber auch aus Feldspath, Granat, Magneteisen, Kieselnadeln und Foraminiferenfragmenten.

Herr Oberbergdirector von Gümbel verpflichtet mich zu grossem Dank, indem er mir in seinem Institute die Oolithe durch Herrn A. Schwager analysiren liess. Die Analyse ergab:

Spec. Gew. 2,800—2,850 (halb Aragonit?).

SiO_2	3,26
TiO_2	Spuren
Al_2O_3	0,34
Fe_2O_3	0,18
CaO	52,96
MgO	0,08
K_2O	0,32
Na_2O	0,46
CO_2	41,70
P_2O_5	0,01
SO_3	0,06
Cl	0,18
Org. Subst.	0,34
	99,89

Die organische Substanz (nach zwei Methoden bestimmt) war hellockerfarbig, fein vertheilt, stickstoffhaltig und besass das spec. Gew. 1,494.

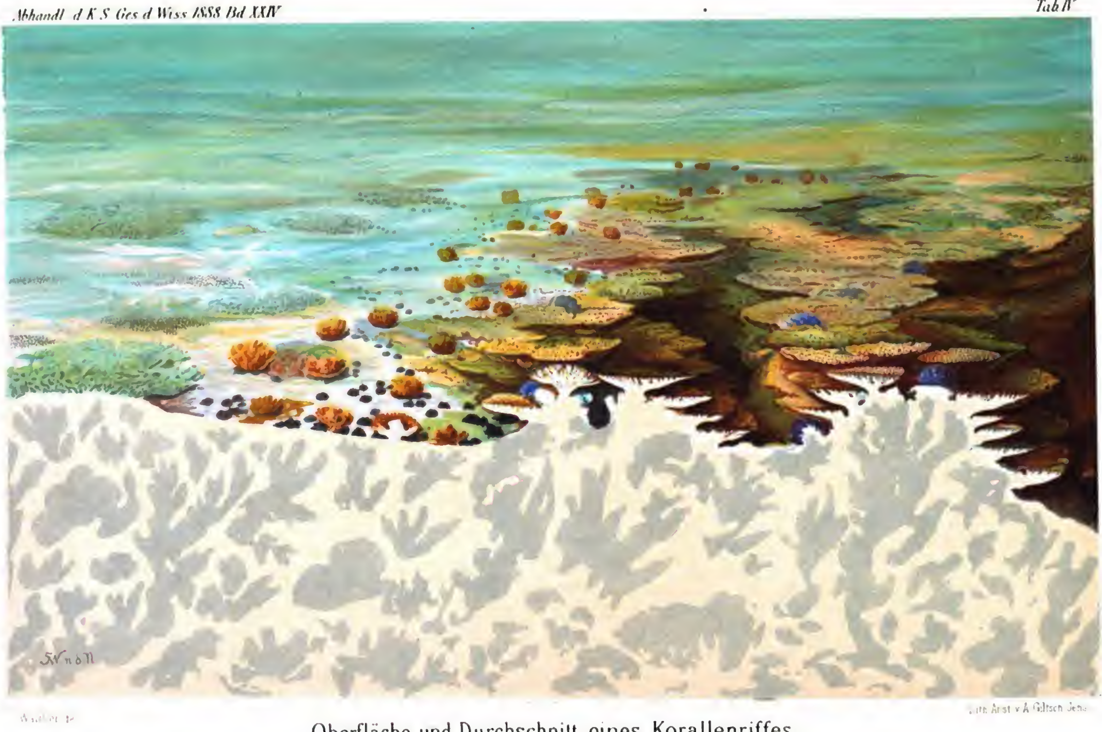
Die mineralischen Kerne stammen allem Anschein nach aus der nahen Wüste und werden vom Landwind in das flache Meer getragen. Bei der Bildung der Kalkrinden spielen gewiss die vielen verwesenden Thiere, welche in dem Wasser und am Ufer lagen, und welche, wie es schien, hier von keinem Krebs weggeräumt werden, eine Rolle. In directer Nachbarschaft des Oolithlagers fand ich eine auffallende Menge Thierreste; Scutella, Clypeaster; Vulsella, Avicula und viele andere Lamellibranchiaten; Murex; Spongien etc. lagen in dem seichten Wasser in grosser Anzahl herum.

V. Das jüngere fossile Riff.

An der 300 Kilometer langen Westküste der Sinaihalbinsel sind 130 km mit lebenden Saumriffen besetzt. Die jüngeren fossilen Riffe aber sind nur in der Länge von 30 km zu beobachten.

Auf drei räumlich weit getrennte Strecken ist das jüngere fossile Riff beschränkt und es ist unter solchen Umständen um so auffälliger, dass die fossile Riffterrasse überall ein gleichmässiges Niveau von 10 m über dem Meeresspiegel beibehält. Durch Überrollung an den Berggehängen oder durch locale Denudation erleidet jene Höhe kleine Abweichungen, allein das normale Niveau bleibt dasselbe. Ich erwähne, dass die Schichten des Kreidekalkes südlich vom G. Hammâm Pharaûn, auf denen das Riff aufsitzt, S fallen; dass die O fallenden Sandsteinschichten des G. Nakûs und G. Hammâm Mûsa, welche das zweite Riff tragen, einem gänzlich verschiedenen, tectonisch mit jenem nicht zusammenhängenden Gebirgsgliede angehören; dass endlich die W fallenden Sandsteinschichten unter dem fossilen Riff am Râs Muhâmmed ohne jede tectonische Beziehung sind zu den oben genannten Gebirgen.

In allen drei Fällen sitzt das Riff als wohlabgegrenzte Terrasse auf fester Felsenunterlage, und benachbarte Küstenberge von geringerer Festigkeit, besonders die krystallinischen Gebirge, haben keinen Riffbesatz. Am eingehendsten studirte ich den 7 km langen Riffzug



Lith. Anst. v. A. Giltsch, Jena.

Oberfläche und Durchschnitt eines Korallenriffes

am G. Hammâm Mûsa nördlich von Tôr, zwei Tage lagerte ich am Râs Muhâmmed und einen Tag am G. Hammâm Pharaûn. Der petrographische Habitus der drei Riffstrecken zeigt keine Unterschiede. Überall hat die Brandung des nahen Meeres steile Ränder an den Riffen geschaffen und den Untergrund wie das innere Gefüge prachtvoll aufgeschlossen (s. Fig. 26).

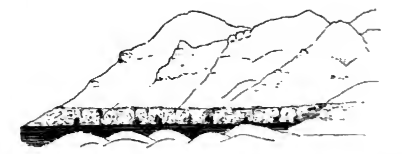


Fig. 26. Das jüngere fossile Riff am Westfusse des G. H. Mûsa.

Beistehend bringe ich das Profil durch das jüngere fossile Riff am G. Hammâm Mûsa (Fig. 27). Dort findet man in 1 m Wassertiefe am Strand die letzten lebenden Korallen. Dann folgt eine sandige Fläche, welche, etwa 40 Schritte breit, vom Meeresspiegel 3,20 m bis zum Fusse des Riffes ansteigt. Grosse Blöcke sind vom Riff herabgestürzt; verticale Sprünge durchziehen den Riffkalk und lösen neue Pfeiler ab, welche bald herabstürzen mögen. An der Basis tritt der nubische Sandstein in 20° östlich fallenden Bänken unter dem Kalk mehrfach hervor.

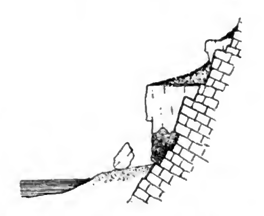


Fig. 27. Profil durch das jüngere fossile Riff am G. H. Mûsa.

Zu unterst bemerkt man 1 m grobe scharfkantige Blöcke, zu einer lockeren Breccie verkittet. Gelbe Kalkblöcke, von Pholadenlöchern zerfressen, gehören dem weiter oben am Berge anstehenden älteren Riffkalk an, mit ihnen vereint finden sich Blöcke eines aus Granitgrus bestehenden Sandsteins, welcher auch an anderer Stelle als Zwischenbildung zwischen jüngeren und älteren fossilen Riffen erkannt wurde, der aber, infolge seines localen Auftretens, auf meiner Karte nicht ausgeschieden werden konnte. Die grobe Breccie wird

überlagert von $1^1/_2$ m einer feineren Breccie. Die einzelnen Bruchstücke sind höchstens faustgross, viele mit Balanus besetzt; Porphyr- und Granitstücke sind darin eingestreut. Dazwischen findet man schon Seeigelstacheln, Austern, Korallenfragmente und man sieht, dass die am überhängenden Sandsteinfelsen wachsenden Riffkorallen durch ihre abfallenden Äste, vermischt mit Meeressand, allmälich den Boden so weit erhöhten, dass endlich auch das Riff vom Felsen auf nichtfelsigen Boden hinüberwachsen konnte. Nach oben schalten sich immer mehr Korallen und andere Thierreste ein, Kalkalgen sind häufig, und bald ist der Übergang in das reine Riffgestein vollendet. Dasselbe besitzt eine Mächtigkeit von 3,50 m und wird nach oben

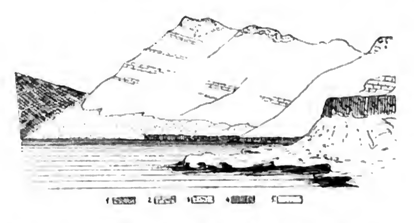


Fig. 28. Westabhang des G. Nakûs bei Abû Suère.
1. Granit. 2. Nubischer Sandstein. 3. Älteres fossiles Riff. 4. Jüngeres fossiles Riff.
5. Klingender Sand des G. Nakûs.

fast geradlinig abgeschnitten durch eine 10 cm dicke Sandschicht. Aber auch hier ist ein allmählicher Übergang zu verfolgen, der durch dickschalige Lucina eingeleitet wird.

Dreissig Schritte breit und 2 m hoch steigt jetzt abermals eine schuttbedeckte Terrasse an, dann folgt ein kleines 1 m mächtiges Riffband, aber von sehr localer Verbreitung. Der darauf folgende Abhang des G. H. Mûsa ist stark überrollt mit Blöcken des vorhin genannten Grussandstein. In einem Block desselben fand ich eingekittete Bruchstücke des weiter oben anstehenden Riffdolomites.

Bei Abû Suêre am Fuss des G. Nakûs endet das Riff allmählich (Fig. 28). Gleich neben den Palmen von Abû Suêre sind manche Stellen des Riffkalkes oberflächlich vergypst.

Sehr ausgedehnt sind die jüngeren fossilen Riffkalke am Süd-

ende des G. Hammâm Pharaûn und hier ist abermals die Auflagerung auf Schichtenköpfen fester Felsbänke eine überaus deutlich erkennbare, da das Meer vortreffliche Aufschlüsse geschaffen hat (s. u. Fig. 29). Auf Grund einer Anzahl von Einzelaufnahmen solcher Riffprofile wurde auch der Durchschnitt durch das Riff auf Tafel IV componirt, welche bestimmt ist, das Verhältniss der Korallen zu der detritogenen Füllmasse zur Anschauung zu bringen. Im Allgemeinen muss hervorgehoben werden, dass die Korallenstöcke kaum die Hälfte (etwa $^2/_5$) des Riffkalkes betragen. Die Madreporen, welche auf dem lebenden Riff dominiren, treten in dem fossilen zurück. Es darf daraus wohl kaum der Schluss gezogen werden, dass diese Gattung

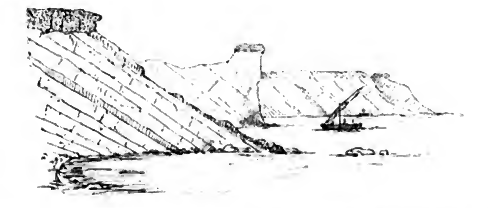


Fig. 29. Jüngeres fossiles Riff auf dislocirten Kalkbänken am Südfusse des G. H. Pharaûn discordant aufgewachsen.

früher seltener war, denn Fragmente sind überall zu erkennen. Es scheint vielmehr, dass sie als die brüchigste aller Korallen hauptsächlich den Kalksand liefert, welcher mehr als die Hälfte der Riffmasse bildet.

In diesem Kalksand ist die Fülle der Gastropoden geradezu erstaunlich. Grosse Tridacna liegen eingeklemmt zwischen Korallenstöcken und das Heer der kleineren Zweischaler ist nesterweise darin verbreitet. Häufig sind auch im jüngeren fossilen Riffe kleinere Nester wohlerhaltener Kalkalgen (Lithothamnium), welche ihre Structur vortrefflich erhalten haben (s. den Schliff auf Taf. VI, Fig. 4).

VI. Das ältere fossile Riff.

Der Gébel Hammâm Mûsa bei Tôr, von dem schon mehrfach die Rede war, ist, wie das Titelbild dieser Arbeit Taf. I zur Anschauung bringt, ein langer nach Süden sich verflachender Rücken. Sein höchster Gipfel wurde von mir durch das Aneroid zu 230 m bestimmt. Beifolgende Kartenskizze Fig. 30 mag die Lage erläutern.

Abgesehen von dem schmalen jüngeren fossilen Korallensaum seines westlichen Fusses und von gypsreichen Mergeln an seinem Ostfuss nahe dem Dörfchen el Uâdi, scheint er bei flüchtiger Betrachtung eine homogene ungeschichtete Masse von hartem körnigen gebräunten Kalk zu sein, der sehr an gewisse Dolomite der Zechsteinformation erinnert.

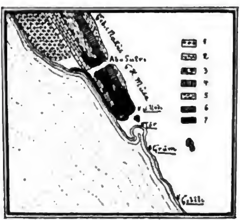


Fig. 30. Umgebung von Tôr.
1. Granit. 2. Nub. Sandstein. 3. Exogyramergel. 4. Flintkalke. 5. Nummulitenkalk. 6. Miocän. 7. Riffkalke.

Eine Analyse des Gesteins, welche ich ebenfalls der grossen Liberalität des Herrn Oberbergdirector v. GUMBEL und der Freundlichkeit des Herrn A. SCHWAGER in München verdanke, ergab folgende Zusammensetzung:

SiO_2	6,88
Al_2O_3	6,43
Fe_2O_3	1,45
CaO	26,83
MgO	15,35
K_2O	0,32
Na_2O	0,48
CO_2	37,89
H_2O	4,33
	99,96

Spec. Gew. 2,773. Das Riffgestein enthält 80,07 Theile Carbonat mit 60% $CaCO_3$ und 40% $MgCO_3$, darf also Dolomit genannt werden.

An den Südfuss des Berges lagert sich ein niedriger Vorberg (s. Fig. 31), welcher die abgeschnittene Spitze des Hauptrückens ist. Im Thal entspringen die Schwefelquellen und überall sind Gypsgesteine anstehend. Der Kalk, welcher über dem Gyps lagert, ist rothgelb gefleckt, sehr hart, und enthält eine grosse Menge Steinkerne bez. Hohlräume von Korallen und Conchilien. Am Fuss des Hauptrückens nahe bei el Uâdi tritt ein horizontal geschichteter gelber Kalk auf, erfüllt mit den Hohlräumen kleiner Conchilien; er hat ganz den petrographischen Charakter, wie gewisse Schaumkalkbänke des mitteldeutschen Muschelkalkes. Nach oben zu wird die Schichtung undeutlich und beim Erklettern der braunen Dolomitfelsen kann man keinerlei stratographische Structur erkennen. An manchen Stellen hat der Wüstensand tiefe Furchen in den Kalk geschliffen, und mit



Fig. 31. Südlicher Vorberg des G. H. Mûsa (jenseits des Meeres ist der G. Sêt sichtbar.

Mühe erkennt man einzelne Fossilienumrisse. Dagegen tragen die ursprünglichen Flächen der meisten Blöcke Abdrücke von Korallenkelchen. Diese Negative sind oft mit scharfen deutlichen Rippen versehen, dann ist die Korallenstructur leicht zu erkennen, bisweilen aber fehlen diese Rippen und dann ist der Felsen mit kleinen rundlichen Zapfen bedeckt. Alle möglichen Übergänge lehren, dass sie die letzten Spuren der Kelchabgüsse darstellen.

Die genannten Korallennegative sind so überaus zahlreich, dass man sie beinahe auf jeder Gesteinsfläche erkennt, sobald man erst einmal das Auge daraufhin geschult hat.

Auf der Tafel V sind eine Anzahl der häufigeren Korallennegative vom G. Hammâm Mûsa und Râs Muhámmed in natürlicher Grösse durch Lichtdruck dargestellt. Leider ist der Erhaltungszustand ein so stark veränderter, dass ich von einer genauen Bestimmung der Gattungen absehen musste. Ich darf nur behaupten, dass die Korallen zu keiner der bei Tôr jetzt häufigeren Formen gehören.

Fig. 9 ist eine Astraeide, wahrscheinlich der Gattung Symphyllia angehörig. Fig. 3 und 4 scheint zu Heliastraea zu gehören. Fig. 5 ist mit einiger Sicherheit auf Fungia tenuifolia zu beziehen. Die häufigste Art der Erhaltung zeigt Fig. 2. Indem durch den Sandwind allmählich die Septen abgeschliffen werden, entstehen erbsengrosse Zapfen, welche die meisten Felsstücke bedecken und nach den vorhandenen Übergängen als die letzten Spuren der Korallenkelche leicht erkannt werden. Fig. 6 ist der Ausguss eines Seeigels, wahrscheinlich zu einem Clypeaster gehörig, von der Unterseite dargestellt. Auf der Oberseite sind drei Ambulacralia deutlich erhalten, die anderen corrodirt. Fig. 10 ist der Steinkern einer Bivalve; von dem Schloss desselben ist ein kleiner Zapfen erhalten, welcher für Zugehörigkeit zu Spondylus spricht. Fig. 8 ist der Steinkern einer Lithodomus (dactylus?). Fig. 1 ist eine Gruppe von solchen, zu einer anderen Art gehörig, wie sie im Inneren von Korallenästen sehr häufig angetroffen werden. Das gruppenartige Auftreten macht es mir wahrscheinlich, dass es sich um den Ausguss eines Korallenstockes handelt, dessen Äste mehrfach von Lithodomus angebohrt waren. Fig. 7 ist das Fragment eines Steinkerns von der Wohnung einer Pholas (welches um 10 cm nach unten ergänzt werden müsste). Nach dem Absterben der Pholas war eine Astraeide in die Höhle hineingewachsen und bildete eine rindenartige Verkleidung derselben. In Anpassung an den stark gebogenen Untergrund ist ein Theil der Septen verlängert worden. Bei der nun folgenden Bildung eines Abgusses erschienen die Septen der Korallenkelche als sternförmig gerippte Warzen auf dem wurstförmigen Steinkern. (Ganz ähnliche Stücke fand G. SCHWEINFURTH im Miocän des G. Geneffe.)

Neben jenen zahlreichen negativen Korallenresten sind andere Thierreste weniger häufig, und infolge des seltsamen Erhaltungszustandes schwer zu deuten. Steinkerne von Lucina, Mactra und Ostrea sind noch am leichtesten zu verstehen.

Von hohem Interesse war mir der Fund einer grossen Tridacna mitten in diesem metamorphosirten Dolomit des Vorberges vom G. Hammâm Mûsa. Allerdings war auch sie stark verändert. Die beiden 50 cm grossen, 8 cm dicken Schalen waren fest in das Gestein eingeschmolzen, die äussere Form auf dem Durchschnitt deutlich zu erkennen und die einzelnen Lamellen der Porzellanschicht wohl

erhalten. Aber der Querschliff Taf. VI, Fig. 3 zeigt, wie stark das Gefüge der Schale verändert worden ist.

Da diese Schale gleich dem übrigen Kalk einen dolomitischen Charakter zeigt, schien mir eine Analyse ihrer Substanz besonders lehrreich. Herr A. Schwager fand folgende Zusammensetzung:

Spec. Gewicht 2,775.

SiO_2	0,56
Al_2O_3	1,50
Fe_2O_3	0,33
CaO	30,44
MgO	19,92
K_2O	0,18
Na_2O	0,32
CO_2	45,84
H_2O	1,35
	100,44

Diese Schale enthält also 96,18 % Carbonat mit 56,6 % $CaCO_3$ und 43,4 % $MgCO_3$, nähert sich somit noch mehr als der umschliessende Kalk dem normalen Dolomit.

Da recente Muschelschalen nur seltene Spuren von Mg enthalten, so ist der Magnesiareichthum dieser Tridacna, welche einer letztvergangenen geologischen Periode angehört, eine für das Verständniss der Dolomitisation wichtige Thatsache.

Diese seltsame Kalkmasse überkleidet den G. H. Mûsa nach allen Seiten und ich war am ersten Tag meines Besuches der sicheren Meinung, einen 230 m dicken, compacten Korallenberg vor mir zu haben, von vielleicht mesozoischem Alter. Da entdeckte ich bei einem zweiten Besuche westlich unter dem höchsten Gipfel einen prachtvollen Aufschluss, an den ich heranklettern konnte. S. u. Fig. 32. Auf östlich 15° einfallenden gelben Sandsteinbänken, welche sich bis zum Fuss des Berges verfolgen liessen, folgen 4 m gelbe und 2 m graue Sandsteine. Dann 3 m Mergel mit Kalkconcretionen in discordanter Lagerung. Nach oben wird der Kalk immer reicher, es bildet sich eine weisse Kalkbank, und darüber erhebt sich eine 15 m mächtige Steilwand des vertical zerklüfteten Dolomites. Nahe bei diesem Profil nahm ich eine etwas veränderte Schichtenfolge wahr,

doch sprang auch hier die discordante Überlagerung scharf und deutlich in die Augen.

Bei dem unbestimmbaren Alter der mächtigen fossilleeren Sandsteinablagerung im Liegenden war aber mit diesem Profil das Alter des Korallendolomites noch keineswegs festgestellt, und der Habitus des Gesteines sprach ein gewichtiges Wort zu Gunsten eines mesozoischen Alters. Ich beschloss daher den Ostrand des Bergrückens gegen die Gaâwüste hin genauer zu untersuchen. War die Entstehung des G. Hammâm Mûsa gleichzeitig mit den übrigen Dislocationen am Sinai erfolgt, so musste ich am Ostfuss des Berges nach Norden

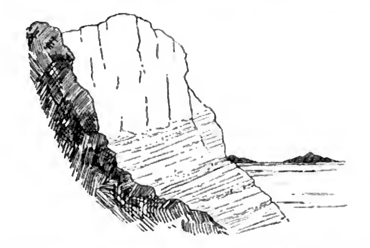


Fig. 32. Discordante Auflagerung des älteren Riffdolomites auf nubischem Sandstein des G. Hammâm Mûsa.

gehend unter dem Korallendolomit immer jüngere Schichten antreffen, welche concordant auf dem vorher beobachteten Sandstein auflagerten (vergl. Fig. 30). Ich fand überall kleinere und grössere Lücken in dem hangenden Riffmantel, und beobachtete darin bei constantem Streichen und Fallen übereinander gelben Sandstein, Mergel mit Exogyra, weisse Kalke mit Feuersteinlinsen und endlich die erwarteten Nummulitenkalke. Das nacheocäne Alter des Riffmantel am G. H. Mûsa war dadurch zweifellos festgestellt.

Die genauere Einreihung in die Schichten der Tertiärperiode ist bei dem Mangel bestimmbarer Fossilien ein direct nicht zu lösendes Problem. Ich habe schon oben erwähnt, dass die miocänen Scutellaschichten östlich von Grûm weder räumlich, noch hypsometrisch, noch petrographisch irgend welchen Zusammenhang mit dem Dolomit haben,

so dass ein miocänes Alter desselben auf diesem Wege nicht bewiesen werden kann.

Über das zeitliche Verhältniss zu den jüngeren fossilen Riffen am Strande giebt aber wenigstens der schon genannte Grussandstein Aufschluss.

Die feinkörnige graue Breccie, welche ich als Grussandstein bezeichnete, lagert an den Abhängen des G. Hammâm Mûsa, und ich fand sie wieder am Râs Muhámmed, beide Male eingeschaltet zwischen die jungfossilen Riffe am Strand und den dichten Riffkalk auf der Höhe. Am G. Hammâm Mûsa enthielt der Grussandstein Bruchstücke der letzteren mit wohlerkennbaren Korallenabgüssen; er muss also gebildet sein, nachdem der Riffdolomit entstanden und metamorphosirt war. Andererseits erwähnte ich schon oben, dass Blöcke des Grussandstein als Liegendes in der Breccie unter dem jungfossilen Riffband gefunden wurden; es muss also vor der Bildung des letzteren schon bestanden haben, und macht es wahrscheinlich, dass ein ziemlich langer Zeitraum zwischen der Bildung beider Riffgesteine verstrich.

So beweist die tectonische Lagerung das, was aus dem petrographischen Habitus beider Riffe schon hervorging, dass beide Ablagerungen zeitlich getrennt sind und verschiedenen geologischen Zeiträumen angehören. Und wenn ich den jungen Riffkalk am Fuss des Berges als pleistocän bezeichnen wollte, so müsste der eben geschilderte Dolomit pliocän genannt werden, nachdem seine Beziehung zum Miocän zweifelhafter Natur ist.

Ich wüsste nur eine einzige Thatsache anzugeben, welche das miocäne Alter des oberen Theiles vom Dolomitriff des G. Hammâm Mûsa wahrscheinlich machte. Herr Professor Schweinfurth hat nämlich in dem Miocän des G. Genéffe bei Súes Ausfüllungen von Pholadenlöchern gesammelt und in der Sammlung der École de Médécine in Kairo niedergelegt, welche genau wie die Stücke Taf. V, Fig. 7 vom G. Hammâm Mûsa eine sternförmige Oberflächensculptur zeigen, wie sie entsteht, wenn eine Astraeidencolonie das Bohrloch ausgekleidet hatte und wie ich sie auf dem Rücken des Berges häufig fand. Sollten Geologen wieder den G. H. Mûsa besuchen, so wäre es wünschenswerth, wenn sie auf diese Beziehung achteten.

Auf dem G. Nakûs, welcher durch das romantische Thal von Abû Suêre vom G. H. Mûsa getrennt wird, sah ich eine ähnliche

Decke dunkelbraunen Kalkes über die Sandsteinschichten hinübergreifend, aber ich fand keine Zeit, nähere Beobachtungen anzustellen.

Am Râs Muhámmed tritt in 60—90 m Höhe ein dem genannten Riffgestein nach mehreren Seiten ähnlicher Korallenkalk dort auf, wo der Carawanenpfad von der westlichen Wüstenebene gegen Schêrm hinüberführt. Dunkelbraune Sandsteinschollen liegen über dem Granit und sind verkleidet von einem hellvioletten, sehr festen Kalk mit muscheligem Bruch, welcher gänzlich aus Korallen zu bestehen scheint (s. Fig. 33). Dieser Kalk unterscheidet sich durch seinen glattmuscheligen Bruch und seine hellrothe Farbe von dem Dolomit des G. Hammâm Mûsa. In dem gleichen barometrisch gemessenen Niveau tritt jenseits der 300 Faden tiefen Bucht Ghasulâni auf dem eigentlichen Felsencap Râs Muhámmed dasselbe korallenreiche Gestein mit einem, dem Dolomit des G. Hammâm Mûsa sehr ähnlichen Habitus und vielen Negativen wieder auf. An zwei Stellen beobachtete ich in tiefen Schluchten liegende Sandsteinbänke, so dass ich glaube, das Profil Fig. 20 vertreten zu können, welches die beiden oben genannten schirmförmigen Saumriffe, die jüngere fossile Riffterrasse, und auf der Höhe die ältere fossile Riffkappe zeigt. In Verbindung mit den Riffkalken tritt der Grussandstein wie am G. Hammâm Mûsa auf und veranlasst mich, jene Riffgesteine mit diesen chronologisch zu vereinigen. Eine noch genauere Altersbestimmung lassen auch hier die Fossilreste vorläufig nicht zu.



Fig. 33. Riffkalk in discordanter Lagerung auf Sandsteinbänken an der Mündung des Uâdi Hâscheb.

VII. Bau und Bildung der Sinaitischen Korallenriffe.

Nachdem ich in den vorhergehenden Abschnitten in systematischer Folge meine Beobachtungen mitgetheilt habe, soweit sie mir wichtig erschienen für die Lösung der in der Einleitung aufgestellten Fragen über die Natur der Korallenriffe an der Sinaihalbinsel, ist es die Aufgabe dieses Abschnittes, die dort gestellten Fragen zu beantworten. Einige bei meinen Untersuchungen gewonnene allgemeinere

Anschauungen über die Korallenriffe der Sinaihalbinsel möchten hierbei noch ausgesprochen werden.

1. Welche Mächtigkeit besitzen die Riffe?

Die steile Böschung des G. Hammâm Mûsa bringt es mit sich, dass lange Schutthalden seine Abhänge überrollen und den Contact der discordanten Auflagerung des Dolomites mehrfach verbergen. Das schöne Profil unter dem Nordgipfel zeigt eine verticale Riffwand von 15 m. Allein, wie das Gesammtprofil auf Fig. 15 erkennen lässt, steht die verticale Profillinie nicht senkrecht zur Bergfläche, daher beträgt die wahre Dicke des Riffmantels weniger als 15 m. Am Ostabhang des Berges schwankt die Dicke des Riffmantels zwischen 2 und 6 m (s. u. Fig. 34).

Die Mächtigkeit der älteren Riffkalke und Dolomite am Râs Muhámmed beträgt in dem Profil Fig. 33 gegen 7 m; auf der Klippe des Râs (Fig. 20) ist sie nicht sicher festzustellen, scheint aber die genannten Zahlen nicht zu übersteigen.

Um so besser ist die Mächtigkeit der jüngeren Riffkalke zu messen. Der Riffkalk südlich des G. Hammâm Pharaûn ist 3—5 m dick. Der Korallenkalk von Abû Suère, G. Nakûs und G. H. Mûsa zeigt 3,5 m in der unteren, 1 m in der oberen Terrasse. Mächtiger sind die jüngeren Riffkalke am Râs Muhámmed, doch sind die Aufschlüsse nicht tief genug, um die ganze Mächtigkeit zu übersehen; ich schätze sie auf 9 m.

Die Frage nach der Mächtigkeit der lebenden Riffe ist direct nur an den Schirmriffen am Râs Muhámmed zu beantworten; sie sind gegen 3 m dick. Für alle übrigen lebenden Riffe kann das Problem nur indirect gelöst werden, und indem ich die besondere Behandlung desselben mit dem folgenden Abschnitt vereinige, will ich hier nur vorausgreifend mein Urtheil dahin abgeben, dass ich sage: die lebenden Korallenriffe des Meerbusen von Sués sind dünne Krusten auf submarinen Felsenzügen und dürften kaum die Mächtigkeit der fossilen Riffe überschreiten, da eine negative Strandverschiebung wohl die seitliche Verbreiterung, aber nicht das Dickenwachsthum der Riffe begünstigt.

2. Wie ist der Untergrund beschaffen?

In einer kürzlich erschienenen Studie, in welcher ich die Frage nach dem Bau der Continentalgrenzen auf speculativem Wege zu lösen und nachzuweisen versuchte, dass die sogenannten Barrierriffe keine erhebliche Mächtigkeit besitzen[1]), wies ich darauf hin, dass Korallenriffe zu ihrem Gedeihen eines felsigen Untergrundes bedürfen. Freilich hatte ich meine Erfahrungen nur an den Colonien von Corallium rubrum im Golfe von Neapel gesammelt; über die eigentlichen Riffkorallen standen mir nur Literaturangaben zur Verfügung. Ich untersuchte daher diese Verhältnisse mit besonderer Sorgfalt an den fossilen Riffen der Sinaihalbinsel.

Das ältere dolomitische Riffgestein des G. Hammâm Mûsa liegt (s. Fig. 32 u. 34) an mehreren Profilen auf weichen Mergeln, welche sich einschalten zwischen die Bänke des nubischen Sandsteins und den Dolomit. In anderen Profilen liegt es eng auf jenem auf. Unter dem Dolomitriff des Râs Muhámmed tritt an zwei Stellen der Sandstein ohne thonige Zwischenschicht auf, und die schönen Aufschlüsse an der Mündung des Uâdi Háscheb (Fig. 33) zeigen den Contact des älteren Korallenkalkes mit dem Sandstein in auffallender Weise. In beiden genannten Fällen hört das Riff dort auf, wo der Sandstein an Porphyrtuff und anderen krystallinischen Gesteinen von geringerer Festigkeit endet.



Fig. 34. Riffdolomit am Ostabhang des G. H. Mûsa, discordant auf Kalkbänken, mit mergeliger Zwischenschicht.

Nördlich von Tôr endet das Dolomitriff des G. Hammâm Mûsa und G. Nakûs dort, wo die krystallinische Kette der Âraba erscheint. Während alle übrigen Küstenberge zu tief oder zu weit vom Meere abgelegen sind, um ein älteres fossiles Riff zu tragen, ist der Mangel eines solchen am G. Hammâm Pharaûn durch die heissen Schwefelquellen genügend erklärt.

---

1) Über den Bau der Flexuren an den Grenzen der Continente. Jen. Zeitschr. f. Naturw. Bd. XX. 1887.

Das jüngere fossile Riff beginnt südlich dieses Berges, und ist vorzüglich aufgeschlossen. Überall wuchs es auf Schichtenköpfen eines weissen Kalkes. Am G. Nakûs und G. Hammâm Mûsa sitzt es auf Schichtenköpfen des nubischen Sandsteins. Am Râs Muhámmed ist das Liegende nicht sichtbar.

Aber wie ist der Untergrund der lebenden Riffe beschaffen? Ein Blick auf die geologische Karte lehrt, dass sich vom Centralgebirge der Sinaihalbinsel beim Râs Djehän eine Gebirgskette ablöst, welche bis Tôr reicht und die Gaâwüste einschliesst. Diese (auf englischen Karten Gébel Gebeliyeh genannte) Árabakette besteht aus fünf Bergrücken, welche parallel nebeneinander herziehen und deren einfache Lagerung am besten auf Tafel VII, Profil 6, zu erkennen ist. Diese Tafel giebt von Norden nach Süden elf Profile wieder, welche zwar in wechselnden Abständen, doch unter sich parallel so gelegt wurden, dass sie die wichtigeren tectonischen Verhältnisse zum Ausdruck bringen. Die Schichten entsprechen denen auf der geologischen Karte.

Profil 1 ist durch den Ausgang des Uâdi Firân gelegt; die westliche krystallinische Kette der Áraba wird vertreten durch die sandbedeckte Ebene von Burdéss. Die Schichten des Nubischen Sandsteins, Exogyramergel, Flintkalke, Nummulitenkalke liegen muldenförmig übereinander und werden östlich unterlagert vom granitischen Centralstock des Serbal.

In dem folgenden Profil 2 ist die synklinale Mulde in ihrer Mitte und östlichen Hälfte in die Tiefe gesunken, am Granit treten keine Sedimente hervor, und die Mulde wird bedeckt vom Sand der Gaâwüste. Dagegen tritt westlich der G. Durbäh steil heraus. Die Schichtenserie der Sedimente ist an seinem Fusse durch eine Verwerfung verdoppelt, in welcher ein Eruptivgang hervorgedrungen ist. Indem der Bruch nach Süden endet, rückt im Profil 3 die Áraba seitlich zusammen und der Granit des G. Abu Hóswäh kommt östlicher zu liegen. Dieses und das folgende Profil 4 bieten auf der Westseite wenig Bemerkenswerthes, dagegen ist die östliche Begrenzung der Gaâwüste von besonderem Interesse. Im Profil 3 erscheint am Fusse des Serbâl der kleine tectonische Aufbruch des G. Súffr, welcher Nummulitenkalk und Exogyramergel aus der Gaâwüste hervortauchen lässt, am Profil 4 dagegen ist die kleine Kreidescholle

bemerkenswerth, welche südlich vom Ausgang des Uâdi Hebrân in stark dislocirten Schichten beobachtet wurde.

Aber schon hat die gesammte Árabakette an Höhe verloren und beginnt sich allmählich zu verflachen. Zuerst verschwindet am G. Nakûs die krystallinische Aussenkette, welche bis dahin die Küste bildete und der nubische Sandstein tritt als hoher Steilabfall zwischen Profil 6 und 7 an das Meer heran. Sofort erscheint ein fossiler Riffsaum am Fuss und ein älterer fossiler Riffmantel auf der Höhe des G. Nakûs und G. Hammâm Mûsa. Salzthon und Gypse treten am Ostfuss des Gebirges bei el Uâdi auf. Jetzt verschwindet die östliche Kette des Nummulitenkalkes unter dem Sand der Gaâwüste, darauf die Flintkalke, und in Profil 8 erscheint nur noch Sandstein und Exogyramergel als Kern des Riffmantels. Die westlich untertauchenden tieferen Sandsteinbänke aber bilden den Untergrund für das lebende Riff bei Tôr.

In dem Maasse, als die Kette der Áraba unter das Meer taucht, verbreitert sich zusehends das lebende Riff und immer neue Riffzüge treten seitlich hinzu. Östlich von Grûm stehen in Profil 9 die Scutellaschichten an. Während die Gaâwüste südwärts sich verschmälert, treten die östlicheren Árabaketten an das Meer heran, zweigen sich von der Küste ab und tragen langgestreckte Riffzüge (Profil 10). Indem diese Riffbänder nacheinander auch ihrerseits enden, deuten sie an, wie die liegenden Felsenklippen allmählich immer tiefer unter den Meeresspiegel tauchen und dadurch die korallenreiche Brandungszone verlassen.

Am Râs Muhámmed endet in Schâb Máhmud der letzte lineare Riffzug. Die Klippe des Râs trägt verschiedenalterige fossile Korallenriffe, dann erreicht die Flachsee und mit ihr das Korallenleben ein Ende.

Auf Grund der eben geschilderten Verhältnisse kann ich die Eingangs gestellte Frage folgendermaassen beantworten: Die fossilen und wahrscheinlich auch die lebenden Korallenriffe der Sinaihalbinsel sitzen auf Schichtenköpfen fester Sedimentgesteine, sie fehlen auf den weicheren und bröckeligen Küstengesteinen der Sinaihalbinsel.

3. Welche Rolle spielt das detritogene Füllmaterial auf dem lebenden Riff?

Diejenige Korallengruppe, welche auf dem lebenden Riff am häufigsten ist, deren weitausgebreiteten olivengrünen oder braunen Schirme zuerst und am meisten in die Augen fallen, die Gattung Madrepora, ist in den fossilen Riffen am schlechtesten erhalten. Der treppenförmige Aufbau des lebenden Riffes sollte doch auch dem fossilen ein gewisses horizontal geschichtetes Gefüge geben — statt dessen ist dieses vertical zerklüftet und verticale Pfeiler lösen sich durch die Verwitterung aus ihm ab.

Ich glaube nicht, dass man hieraus schliessen darf, früher habe es dort weniger Madreporen gegeben, denn die Übergänge von lebenden zum fossilen Riff sind so stetige, dass an eine solche Verschiedenheit nicht gedacht werden kann. Aber Madrepora ist trotz ihrer Häufigkeit schon auf dem lebenden Riff die vergänglichste aller Korallen. Die Schirme von M. corymbosa sind immer morsch und unversehens bricht der Fuss beim Betreten derselben hindurch. Diese auffallende Brüchigkeit der spröden Äste scheint mir die wesentliche Ursache, weshalb sie in den fossilen Riffen nur fragmentarisch auftreten; sie liefern einen grossen Theil jener Kalksande, welche als Füllmasse zwischen den Korallen überhand nehmen.

Nächst den leichtzerstörbaren Madreporen sind es Kalkalgen, welche eine wichtige Rolle als Füllmaterial spielen und deren Thätigkeit die auseinanderbrechenden absterbenden Korallenäste immer aufs Neue zu einem Roste verkittet. Selbst wenn ich die Lithothamnienlager, welche ich nicht näher untersuchen konnte, gänzlich ausser Acht lasse, so ist doch Lithophyllum ein sehr wichtiger Factor im Aufbau des Riffes. Ihre dünnen, Alles überziehenden Krusten ermöglichen es, dass auf sandigem verschiebbarem Boden eine Unterlage geschaffen wird, auf der ein Korallenriff zu gedeihen vermag.

Die Lücken aber zwischen einem so maschigen Balkenwerk füllen die Krebse aus. Jeder sterbende Seeigel, jede Muschel, jede Gastropodenschale wird von ihnen zerbrochen und zerkleinert, ja sie schonen ihre eigenen Verwandten nicht, zerbrechen den Panzer ihrer abgestorbenen Genossen, um die letzten Spuren organischer Substanz herauszusuchen. So schaffen sie jenen scharfkantigen Kalksand, welcher

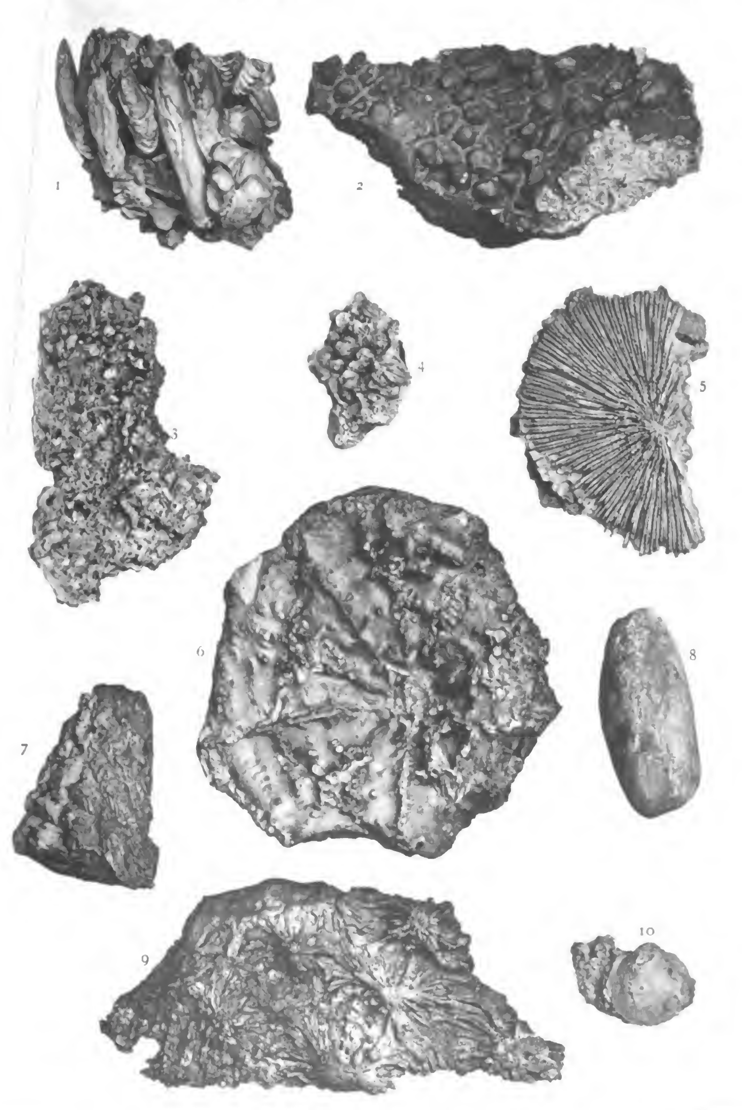
die Lucken zwischen den Korallenästen und die Lucken zwischen den Korallenstöcken ausebnet. Das ist die geologische Thätigkeit der scheerentragenden Krebse.

Der Kalksand nimmt auf dem lebenden Riff, besonders in der südlichen Hälfte von Erg Tôr, ziemlich bedeutende Gebiete ein. Allein die Oberfläche des lebenden Riffes ist nicht recht geeignet, um mit Sicherheit zu beurtheilen, wieviel von der Riffmasse aus Korallenstöcken, wieviel aus Kalksand besteht. Nach einer Anzahl Einzelskizzen von fossilen Riffen ist der Durchschnitt auf Tafel IV entworfen; man erkennt daraus, dass $^2/_5$ der Riffmasse aus erhaltenen Korallen, $^3/_5$ aus Kalkdetritus bestehen.

4. Welche Veränderungen erleiden die Riffsedimente, wenn sie endgültig vom Wasser entblöst wurden?

Wenn ein Zoologe sich anschickt zum Studium eines Korallenriffes, so beginnt er am Ufer, dringt immer weiter meerwärts ein in die Fülle des Korallenlebens, und auf der äussersten Riffkante, wo es am üppigsten entwickelt ist, dort wartet seiner das Endziel der Arbeit. Der Weg des Geologen führt von der Gegenwart zur Vergangenheit. Indem wir von dem bunten Korallengarten der Riffkante allmählich landeinwärts beobachten, verfolgen wir das Absterben des Riffes. Das formenreiche Thierleben tritt immer mehr zurück. Die weissen Detritusflecke werden immer grösser, die Korallenbänke immer kleiner. Mehr und mehr treten abgestorbene Stöcke auf, und endlich überziehen Pflanzenrasen und Mytiluscolonien den Boden des seichteren Wassers.

Nur im Niveau der Brandung treten abermals Korallen auf, aber es sind die Reste eines subfossilen Riffes, das die Wellenabrasion zerfrisst und zerstört. An manchen Uferstrecken bei Grûm und südlich davon bildet das subfossile Riffgestein eine 2 m breite horizontal abrasirte Stufe am Ufer. Das Seewasser löst die detritogene Füllmasse zwischen den Korallenstöcken leicht auf und enthüllt das Gefüge des Riffes. Dieses subfossile Riff hing wahrscheinlich einmal zusammen mit der jüngeren fossilen Riffmasse und nur die Brandung hat beide durch eine Art Strandlinie getrennt und räumlich geschieden. Dafür spricht der überaus gleichmässige Erhaltungszustand beider und die Beschaffenheit der Sedimente. Die Korallen sind farblos, ihr speci-



Steinkerne aus dem fossilen Riffkalk.
(G. Hammam Musa 2. 6. 7. 8. 9. 10 und Ras Muhammed 1. 3. 4. 5.)

fisches Gewicht ist etwas grösser, die Füllmasse ist nicht verkittet. Die eingestreuten Thierreste tragen bisweilen noch die ursprüngliche Farbe. Die Lithothamniumknollen sind compacter, aber ihre mikroskopische Structur zeigt keine Veränderung (Taf. VI, Fig. 4).

Vor Ablagerung der jüngeren fossilen Riffkalke muss die Bildung von Korallenriffen am Sinai einige Zeit unterbrochen oder wenigstens schwächer gewesen sein, denn die oft genannten Grussandsteine sind eine bezeichnende Zwischenbildung.

Indem wir wenige Meter an den steilen, schuttbedeckten Bergabhängen aufwärts steigen, tritt uns ein Riffgestein entgegen, das einen grundverschiedenen Habitus besitzt. Selbst wenn wir die violetten Korallenkalke vom Ausgang des Uâdi Häscheb als eine jüngere Bildung betrachten, als die Dolomite des Râs Muhámmed und des Hammâm Mûsa, so ist die Kluft doch keineswegs überbrückt. Trotzdem jeder Felsblock die Spuren von Korallenkelchen erkennen lässt, ist auch nicht die geringste Ähnlichkeit zwischen diesen und den jüngeren fossilen Riffsedimenten zu erkennen, und wir werden veranlasst, nach specifischen Ursachen dieser Metamorphose zu suchen. Die Thatsache lehrt uns, dass die Anschauung einer gleichmässigen und allmählichen Umwandlung der Kalkgesteine nicht überall als Erklärungsversuch eingeführt werden darf, und dass neben den Prozessen der chronischen Metamorphose auch acute Umwandlungsvorgänge im Laufe der geologischen Vergangenheit vorgekommen sind.

5. Welche Veränderung hat Form und Verbreitung der Riffe im Laufe der geologischen Geschichte erlitten?

Eine negative Strandverschiebung hat die Gebirge und mit ihnen die Korallenriffe der Sinaihalbinsel vom Wasser theilweise entblöst, und es liegt nahe zu fragen: ob diese Veränderung der Elementengrenze durch eine Hebung des Festlandes, oder durch den activen Rückzug des Meeres bedingt worden sei?

Die Sinaihalbinsel ist in der Tertiärzeit dislocirt worden; ob diese festländischen Bewegungen zu Ende des Eocän oder im Miocän erfolgten, habe ich mit Sicherheit nicht entscheiden können. Jedenfalls haben diese Bewegungen eine Anzahl Gebirgsglieder geschaffen und dieselben topographisch wie tectonisch isolirt. Die Áraba hängt

mit dem centralen Gebirgsstock nur durch eine schmale Brücke am Uâdi Firân zusammen. Der Höhenzug des G. Pharaûn bis G. el Nochel und Marchâ ist durch die Wüstenebene von Marchâ und Burdéss von der Áraba völlig getrennt. Endlich ist die felsige Südspitze der Halbinsel, das Râs Muhámmed, nur durch eine flache Sandbrücke mit dem übrigen Festland verbunden.

Die Verwerfungen, welche das Küstenland derartig zerstückelt haben, müssen theilweise eine Sprunghöhe von mehr als 800 m besitzen, denn so hoch steigen die sedimententblösten Granitwände des G. Marchâ und des G. Abû Dúrbäh aus der Sandebene empor.

Wenn ein so zerstücktes und in selbständige Glieder aufgelöstes Gebirgsland durch »Hebung« centrifugal bewegt wurde, so werden sich meiner Ansicht nach die einzelnen Theile in verschiedenem Maasse bewegen, und längs der grossen und kleinen Verwerfungen wird sich eine individualisirte Bewegung der Schollen geltend machen. Das Ausmaass solcher Bewegungen wird in der gleichen Zeit an verschiedenen Punkten der Küste ein verschiedenes sein; die durch gleichmässigen Habitus und identen Erhaltungszustand als gleichalterig erkannten jüngeren fossilen Riffterrassen halten aber längs der gesammten Küsten das gleiche Niveau ein. Mögen Verwerfungen, ein Wechsel des Küstengesteins oder Wüstenebenen das Riffband unterbrechen, immer tritt es wieder in demselben Niveau auf und zieht sich als markante Strandlinie an Berg und Thal entlang. Die älteren fossilen Riffkalke und Dolomite am G. Nakûs, G. Hammâm Mûsa und Râs Muhámmed sind nicht als Terrassen ausgebildet, sondern sind mantelförmige Hauben, welche die Bergrücken bedecken; sie können daher weder für, noch gegen eine Hebung angeführt werden und haben für die Entscheidung des besprochenen Problems keine Beweiskraft.

Aber die Lagerung der jüngeren fossilen Riffe und einige noch zu erwähnende weitverbreitete Erscheinungen an der Sinaihalbinsel können dafür angeführt werden, dass die negative Strandverschiebung nicht durch eine festländische Hebung, sondern durch eine regredirende Bewegung des Meeres bedingt sei.

Will man festländische Bewegungen an der Sinaihalbinsel annehmen, so wäre von meinen Beobachtungen nur das untere abgestorbene Saumriff bei Ghasulâni östlich von Râs Muhámmed zu nennen,

welches zwar für keine Hebung, aber für eine jüngere locale Senkung spricht, die jene Felsen um 6 m centripetal bewegte, da kein anderer Grund für das Vorhandensein zweier Schirmriffe aufgefunden werden konnte.

Die Fig. 1 der Tafel VIII zeigt mit Zugrundelegung des heutigen Festlandreliefs in allgemeinen Umrissen die Vertheilung von Wasser und Land zur Zeit des älteren fossilen Riffs. Am Nordfuss des G. Atakáh dringt westlich eine weite Bucht gegen Genéffe, östlich reicht das Meer bis an den Fuss des Tyhgebirges. Die Áraba bildet submarine Klippenzüge, nur die Aussenketten des G. Abû Dúrbäh und G. Abû Hóswäh ragen als langgestrecke Inseln über das Meer. Erst dort, wo dieser gewaltige Wellenbrecher endet und die Meereswogen frei an die Klippen des nubischen Sandsteins anschlagen, haben sich auf ihnen die Riffe des Nakûs und Hammâm Mûsa angesiedelt. Das Thal von Abû Suêre trennte wahrscheinlich schon damals die beiden Berge. Bis zum Râs Muhámmed ist der Granit rifffrei geblieben. Dort aber auf den Dislocationsschollen des Sandsteins findet sich wiederum ein fossiles Riff.

Die Figur 2 links von dem eben beschriebenen Bild stellt dasselbe Gebiet zur Zeit der jüngeren fossilen Riffe dar. Der Strand hat sich vertical um 230 m verschoben und grosse Küstenstrecken sind vom Wasser entblöst. Eine Anzahl Felsenklippen, welche sich vorher in grosser Wassertiefe befanden, sind jetzt der Meeresoberfläche nahe gekommen und bieten den Korallen einen günstigen Untergrund. Das Riff südlich des Hammâm Pharaûn siedelte sich auf Kalkbänken an, das Riff des Hammâm Mûsa ist bei der negativen Strandverschiebung an den Berggehängen herabgewachsen, dann bildete sich der Grussandstein und jetzt finden sich die jüngsten Korallensedimente an seinem Fuss. Auch das Riff am Râs Muhámmed ist von oben nach unten an dem Felsen herabgewachsen und hat sich dabei seitlich ausgebreitet.

Aber immer weiter schreitet die negative Verschiebung der Elementengrenze, und immer mehr submarine Klippenzüge rücken so weit an den Meeresspiegel herauf, dass sich Korallen auf ihnen ansiedeln können. Die Figur 3 der Tafel VIII spricht deutlicher als Worte, wieviel neue Riffzüge seitdem entstanden sind. An mehreren Stellen haben sich kleinere Riffstrecken zu ringförmigen Atollen ge-

schlossen und gross ist die Mannichfaltigkeit der Riffformen; aber die allgemeine NW—SO-Richtung ist überall deutlich zu erkennen.

Das subfossile Riff am Strand lehrt uns, wie jene negative Bewegung des Strandes bis in die jüngste Vergangenheit hinein fortdauert. Aber selbst wenn diese Riffe nicht wären, so sprechen doch viele andere Thatsachen unwiderleglich dafür, dass die negative Strandverschiebung an den Küsten der Sinaihalbinsel bis in die Gegenwart hineinreicht.

Alle jene Gebiete, welche ich auf der geologischen Karte als »Salzthon« ausgeschieden habe, sind nichts weiter als eingedampfte Lagunen und meerentblöster Strand. Ihr Sediment stimmt völlig überein mit jenem salzigen Schlamm, den die tiefe Ebbe auf dem Strande von Súes entblöst. Der seichte 10 qkm grosse Tümpel am Râs Djehän, die Lagune vom Râs Sibýlle, die Lagunen nordwestlich vom Râs Muhámmed zeigen diesen Eindampfungsprozess noch heute. Das Chlornatrium bedeckt in halbzölligen weissen Krusten den Boden, die Abraumsalze entführt die Fluth. Eine arme Fauna fristet darin ihr Leben, nur Cerithium scheint sich darin wohl zu fühlen und kleine und grosse Arten leben in ganzen Schaaren am Boden des seichten Wassers. Der salzgetränkte lehmige Schlamm bildet breite Zonen längs des Meeresstrandes; die Dromedare gleiten aus und müssen 3 km landeinwärts gehen, wo sich Wüstensand über den Boden ausgebreitet hat, während man am Strand sich nur mühsam vorwärts bewegen kann.

Aber weit landeinwärts reichen die Spuren ehemaliger Lagunen, in den zahllosen Cerithien, welche an manchen Stellen, besonders am Râs Sibýlle, den Boden bedecken. Und selbst wenn Kies und Wüstensand den Salzthon verhüllen, macht doch das Salz sich immer noch bemerkbar, es efflorescirt bis zur Oberfläche und durchtränkt den Sand. Man wird nicht sehr irren, wenn man alle diejenigen Lagerplätze als Stellen jüngster Meeresbedeckung kartirt, an denen die Beduinen während der Nacht die Wasserschläuche auf Holz und Stricke legen, damit sie während der Nacht kein Salz aus dem Boden aufnehmen.

Klunzinger hat bei Kossêr beobachtet, dass sich die Korallenriffe durch »Hebung des Landes« vergrössern, besser ausgedrückt: bei negativer Strandverschiebung. Meine eigenen Erfahrungen haben

mich dasselbe gelehrt. Aber das Wachsthum der Riffe im Rothen Meer ist kein Dickenwachsthum, wie es nach Darwin bei positiver Strandverschiebung im pacifischen Archipel stattfindet, sondern es ist ein seitliches Flächenwachsthum. Die Riffe des Rothen Meeres können gar nicht in die Dicke wachsen, weil sie bald genug vom Seewasser entblöst werden. — Deshalb sind die lebenden und fossilen Korallenriffe der Sinaihalbinsel nur dünne Krusten auf felsigem Kern.

Bei negativer Strandverschiebung — mag dieselbe durch Hebung des Landes, oder durch den Rückzug des Meeres bedingt sein — wird ein Riff mehr in die Fläche als in die Dicke wachsen; bei positiver Strandverschiebung allein können sich Riffe bilden, deren Kalkmasse eine erhebliche Mächtigkeit erreicht.

Jena, im Juli 1888.

Die Zinkographien im Text wurden nach Federzeichnungen des Verfassers durch E. Meisenbach in München photographirt. Die Tafeln I, II, III, IV, VI, VII, VIII sind nach Aquarellen und Zeichnungen des Verfassers durch A. Giltsch in Jena lithographirt. Die Lichtdrucktafel V fertigte J. Klinkhardt in Leipzig. Die geologische Karte wurde in dem kartographischen Institut von Giesecke & Devrient in Leipzig in Kupfer gestochen und lithographirt.

Inhalt.

		Seite
I.	Topographische Einleitung	439
II.	Der geologische Bau der westlichen Sinaihalbinsel	443
III.	Die Vertheilung der Korallenriffe	462
IV.	Das lebende Riff und seine Sedimente	463
	1. Die Saumriffe	463
	2. Die pelagischen Riffe	466
	3. Die Sedimente des Riffes	468
	4. Marine Oolithe	481
V.	Die jüngeren fossilen Riffe	484
VI.	Die älteren fossilen Riffe	488
VII.	Bau und Bildung der Sinaitischen Korallenriffe	494
	1. Welche Mächtigkeit besitzen die Riffe?	495
	2. Wie ist der Untergrund beschaffen?	496
	3. Welche Rolle spielt das detritogene Füllmaterial auf dem lebenden Riff?	499
	4. Welche Veränderungen haben die Riffsedimente erlitten, nachdem sie endgültig vom Wasser entblöst wurden?	500
	5. Welche Veränderung hat Form und Verbreitung der Riffe im Laufe der geologischen Geschichte erlitten?	501

1



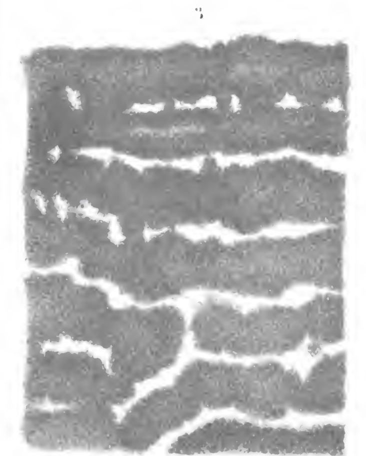
Limaschale (a-Prismen, b-Perlmutter) umwachsen von Lithothamnium (c) vergr. 35×
(Golf von Neapel)

2



Querschliffe durch Oolithkörner (Uadi Dehêse) vergr. 35×

3



Querschliff durch eine dolomitisirte Tridacna (G. Hammâm Mûsa) vergr. 20×

4

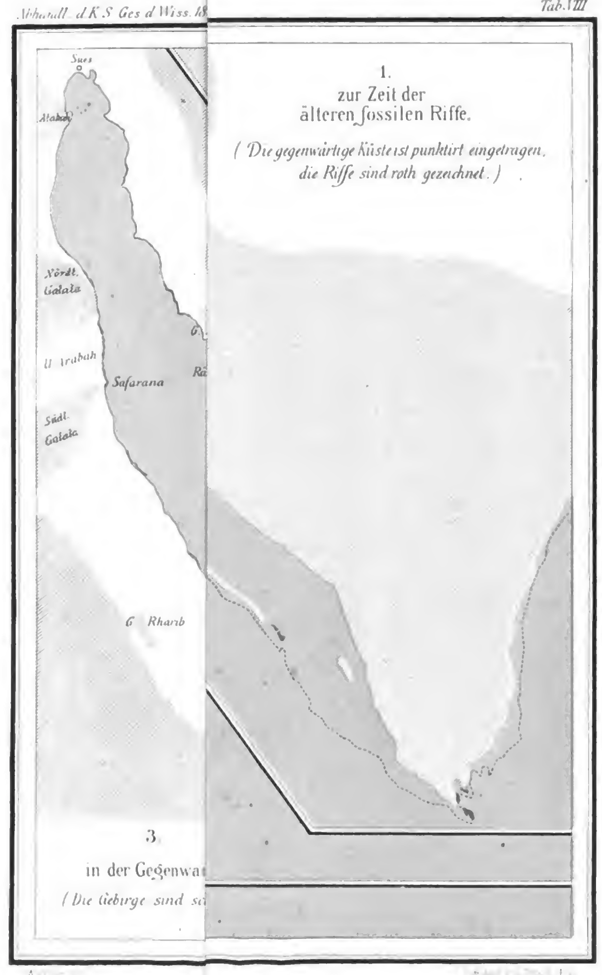


Querschliff durch eine jungfossile Kalkalge vergr. 20×
(G. Hammâm Mûsa)

Aufeinanderfolgende (SW.-NO. gelegte) Profile durch die Küstengebirge der westlichen Sinaihalbinsel.

[ALLENRIFFE.

Abhandl. d.K.S. Ges. d. Wiss. 18 Tab. VIII





DIE
VERTHEILUNG DER BLUTGEFÄSSE
IM MUSKEL

VON

W. SPALTEHOLZ.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº XI.

MIT DREI TAFELN.

(Aus dem physiologischen Institute zu Leipzig.)

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.

Von d. w. Mitgliede C. Ludwig vorgelegt in der Sitzung v. 6. August 1888.
Das Manuscript übergeben am 7. August 1888.
Der Abdruck vollendet den 22. September 1888.

DIE VERTHEILUNG

DER BLUTGEFÄSSE

IM MUSKEL

VON

WERNER SPALTEHOLZ.



Mit der Erweiterung unserer anatomischen Kenntnisse geht stets eine Vertiefung unseres Verständnisses der Vorgänge in den betreffenden Geweben einher. So hat auch jedes eingehendere Studium der Gefässe, sei es in ihrem Bau, sei es in ihrem Verhältniss zu einander und zu dem umgebenden Gewebe, neue Aufschlüsse über die Leistungen des Blutstromes gebracht und über die Hilfsmittel, welche dem Körper für diese Zwecke zu Gebote stehen. Da sich daher erwarten liess, dass ein genaueres Eingehen auf die Gefässvertheilung im Muskel einigen Aufschluss über bestimmte physiologische Fragen geben würde, und da zugleich diese Arbeit für eine verwickeltere ähnlichen Inhalts nothwendige Vorbedingung war, wurde dieselbe auf Anregung des Herrn Prof. Ludwig von mir in Angriff genommen.

Bin ich mir auch bewusst, dass die erhaltenen Resultate die gestellten Fragen noch lange nicht erschöpfend beantworten, so geben sie doch schon über einiges Wesentliche interessante Aufschlüsse.

Meine Untersuchungen erstreckten sich auf Hunde, Kaninchen und theilweise auch menschliche Neugeborene.

Es galt erstens, festzustellen, wie sich die makroskopisch sichtbaren Gefässe im Muskel vertheilen. Für diese Darstellung der Arterien wählte ich nach zahlreichen Versuchen, der Frage auf anderem Wege nahe zu kommen, schliesslich eine Leimmasse, welche durch reichlichen Zusatz feinsten Ultramarins intensiv blau gefärbt war, und welche so die Capillaren nicht passirt. Die Venen erhielt ich dadurch gesondert, dass ich von der Arterie aus erst eine mit Carmin oder Berliner Blau gefärbte Masse bei ca. 80 mm *Hg*-Druck injicirte und dann, wenn das Gefässsystem ziemlich gefüllt erschien, eine farblose Masse unter 180—200 mm *Hg* folgen liess, bis nichts mehr in die

Gefässe hineinging. Für die Arterien erhält man mit der angewandten Methode sicher schöne Präparate, bei den Venen je nach dem Gelingen wenigstens an grösseren oder kleineren Theilen der Muskel. Nachdem die Leimmasse erstarrt war, wurden einzelne Muskeln, welche wegen ihrer Plattheit besonders geeignet erschienen, sorgfältig vom umgebenden Gewebe losgelöst, auf Korkplatten ausgebreitet und unter beständigem Anspannen mit Igelstacheln befestigt, dann in Alkohol entwässert, in Nelkenöl aufgehellt und auf entsprechend grossen Glasplatten in Xylol-Canadabalsam eingeschlossen.

So gelingt es unschwer, die Gefässvertheilung eines ganzen Sartorius, der Bauchmuskeln, des Zwerchfelles, ja selbst dickerer Muskeln eines mittelgrossen Hundes und menschlicher Neugeborener bis zu den feinsten Ästchen hin klarzulegen und auch für die Betrachtung unter der Loupe geeignet vorzubereiten. Die Entstehung von Luftblasen in den Präparaten verhindert man am besten dadurch, dass man auf dem Wasserbad erwärmten und nur eben bis zur Leichtflüssigkeit mit Xylol versetzten Canadabalsam benutzt, eventuell die eingeschlossenen Präparate unter geringer Belastung des Deckglases längere Zeit gelinde erwärmt.

Für die zweite Aufgabe, die in der Untersuchung der Capillaren bestand, wählte ich zwei verschieden gefärbte Leimmassen, und zwar färbte ich gewöhnlich die eine mit Carmin, die andere mit flüssiger chinesischer Tusche, resp. besonders präparirtem Lampenruss[1]). Ich injicirte zuerst unter ca. 80 mm *Hg*-Druck die Carminmasse, bis alle Capillaren gefüllt erschienen, und schickte dann die zweite Masse unter ca. 180 mm *Hg* nach, bis ich an der schwärzlichen Färbung einzelner zu Tage liegender Muskelstücke sah, dass die Masse bis in die Capillaren vorgedrungen sei. Dann wurde das Präparat sofort in Alkohol gelegt und nach möglichst kurzer Zeit, d. h. sobald die Masse in den Hautgefässen erstarrt war, seines Hautüberzuges entkleidet.

Um die Anordnung der Gefässe im contrahirten Muskel zu studiren, injicirte ich das Thier, gewöhnlich die untere Hälfte von der

1) Die Anfertigung und den Vertrieb dieser vorzüglichen Massen nach den im physiologischen Institut festgestellten Recepten hat Herr Dr. Georg Grübler, Leipzig, Dufourstr. 17, übernommen.

Aorta abdominalis aus, so kurze Zeit, als nur irgend möglich, nach dem Tode mit einer concentrirten wässrigen Berliner-Blau-Lösung, bis alle Gefässe prall angefüllt erschienen, schnitt dann vorsichtig die Insertionen einiger besonders geeigneter Muskeln (Mm. gastrocnemius und quadriceps femoris) durch und machte sie wärmestarr, indem ich sie ungefähr zwei Stunden lang in Wasser von 50° C. brachte. Die Reduction des Berliner Blaues kann man durch Zusatz von etwas Salpetersäure verhindern, oder, wenn einmal eingetreten, dadurch wieder beseitigen, dass man die betreffenden Muskel in Salpetersäure härtet. Diese Behandlung erleichtert auch die nachfolgende Präparation.

Zu dieser zweiten Untersuchungsreihe benutzte ich mit Vorliebe Kaninchen, da sich bei ihnen mit Pincette und Präparirnadel leicht von den Muskeln sehr dünne Lamellen ablösen lassen, die ich nach Aufspannung und halber Antrocknung auf dem Objectträger vollständig entwässerte, aufhellte und in Balsam einschloss. Schnittpräparate geben keinen genügenden Überblick, während er bei obigen Präparaten, wenn sie nur dünn genug sind, an den meisten Stellen ein vollständiger ist.

Die Thiere wurden stets möglichst kurze Zeit nach dem Tode injicirt. Man erhält so wesentlich gleichmässigere Injectionen als sonst und umgeht das lästige Vorwärmen. Dem Umstand, dass bei dem menschlichen Material ein Zeitraum von mehreren Stunden zwischen Tod und Injection lag, gebe ich auch hauptsächlich die Schuld, dass die Präparate, die ich vom Menschen besitze, nicht so schön sind als die übrigen.

I. Arterien.

Die folgende Beschreibung bezieht sich, wo nicht besonders etwas Anderes gesagt ist, auf den Hund.

Die Zahl der Arterien, welche einen und denselben Muskel bei verschiedenen Individuen versorgen, ist nur geringen Schwankungen unterworfen; namentlich gleichen sich aber bei demselben Thiere die rechte und linke Seite immer auffällig.

Die Hauptmenge des Blutes wird dem einzelnen Muskel gewöhnlich durch mindestens zwei je nach der Masse des Muskels mehr

oder weniger grosse Gefässe zugeführt. Der Verlauf derselben ist, soweit sie parallel der Faserrichtung eindringen, ein ziemlich geradliniger; soweit sie unter einem spitzen oder rechten Winkel auftreffen, nähern sie sich im Bogen der Faserrichtung. Nicht selten trifft man aber auch Stämmchen, welche senkrecht zu ihr den Muskel durchziehen und erst in ihren Endästen umbiegen.

Diese Stämmchen schicken nun, aber nur zum Theil unter entsprechender Ablenkung derselben, kleinere und grössere Zweige ab, welche unter einander und mit denen anderer Arterien Verbindungen eingehen, so dass schon durch diese Ästchen stärkeren Kalibers ein gröberes Netzwerk gebildet wird, welches allseitig den Muskel durchzieht. Bei grösseren Muskeln ist jede Masche noch von einem oder mehreren Zweigen ähnlichen Durchmessers durchzogen, welche die Zahl der gröberen Anastomosen vermehren helfen. Von den Seiten dieses Netzes, und zwar in gleicher Weise von den Hauptstämmchen wie von den kleineren Ästen gehen in ungefähr gleichen Abständen von einander meist senkrecht kleine Zweige ab, deren Durchmesser nur wenig unter einander differiren. Jedes derselben ist durch bogenförmige Anastomosen mit seinen benachbarten verbunden. So entsteht in dem ersten gröberen ein zweites feineres Netzwerk, dessen einzelne Maschen Räume ungefähr gleichen Inhalts einschliessen. Von den Fäden dieses Netzes nun entspringen meist rechtwinklig zur Faserrichtung (Taf. II, Fig. 3) feinste Arterien, welche, theilweise unter erneuter Anastomosenbildung, den letzten vorcapillären Reiserchen resp. den Capillaren selbst zum Ursprung dienen.

Diese Vertheilung der Arterien findet sich in allen Muskeln, ebenso denen des Stammes wie denen der Extremitäten, des Hundes und Kaninchens; vom Menschen kann ich dasselbe vorläufig nur von den gröberen Verzweigungen und Anastomosen behaupten. Besonders schöne Präparate liefert das Zwerchfell des Hundes. Es bezieht bekanntlich sein Blut 1. aus den schwachen Aa. pericardiaco-phrenicae, 2. den Aa. phrenicae inferiores, 3. den sechs unteren Aa. intercostales und 4. Ästchen der Aa. mammariae internae (Rr. musculophrenici). Während nun beim Kaninchen Nr. 3 und 4 so überwiegend entwickelt sind, dass man die anderen, namentlich Nr. 1, leicht übersieht, und dass nur jene für den Rippentheil in Betracht kommen, sind beim Hund und Menschen die Aa. pericardiaco-phrenicae

zwar schwach, die Aa. phrenicae inferiores aber ebenso stark wie die Aa. intercostales. Durch die zahlreichen Verbindungen, welche die Äste der letzteren sowohl unter einander als auch mit denen der Aa. phrenicae eingehen, entsteht ein Netzwerk, dessen Zierlichkeit namentlich beim Hund überraschend ist. Taf. I, Fig. 1, welche den linken hinteren Abschnitt desselben darstellt, soll davon ein getreues Bild geben. Wie man sieht, sind im Zwerchfell die Maschen besonders sorgfältig in der Faserrichtung angeordnet. Fast genau so ist das Bild beim menschlichen Zwerchfell. Als Beweis dafür, dass die Gefässvertheilung in allen Muskeln demselben Gesetze folgt, habe ich noch ein Stück aus einem rechten M. transversus abdominis des Hundes (Taf. I, Fig. 2) zeichnen lassen.

II. Capillaren.

Der folgende Abschnitt schildert die Verhältnisse im weissen Kaninchenmuskel.

A. Im erschlafften Muskel. Die feinsten arteriellen Ästchen entspringen, wie schon erwähnt, meist senkrecht von ihrem Stamm (Taf. II, Fig. 3). Ihre Zweige, verschieden an Zahl und Stärke, gehen meist unter spitzem Winkel ab und biegen theils in sanftem Bogen, theils brüsk in die Faserrichtung ein, um dann direct in die Capillaren zu zerfallen. Einzelne Capillaren nehmen ihren Ursprung auch direct aus dem Stämmchen (Taf. II, Figg. 3 u. 4, Taf. III, Fig. 5). Die Capillaren verlaufen gestreckt in der Faserrichtung, biegen aber häufig, indem sie sich um eine Muskelfaser herumwinden, in eine andere Ebene ein, sodass sie meistens Theile mehrerer Fasern mit Blut versorgen. Jede Capillare ist gewöhnlich mit den benachbarten durch ein oder zwei rechtwinklig zur Faserrichtung verlaufende Ästchen verbunden; man findet jedoch unschwer auch lange Capillaren, welche nichts von einer solchen Verbindung erkennen lassen. Überhaupt habe ich an meinen Präparaten die Überzeugung gewonnen, dass Querverbindungen nicht so häufig sind, als man nach Längsschnitten anzunehmen geneigt ist, wo namentlich auch die Zwischenstücke zwischen zwei in verschiedenen Ebenen verlaufenden Abschnitten derselben Capillare leicht für Anastomosen gehalten werden können.

An ihrem Ende fliessen die Capillaren zu zweien oder mehreren, in letzterem Falle unter eigenthümlicher Büschelbildung, zu weiten Venenzweigen zusammen, die sich unter spitzem Winkel zu einem kleinsten Venenstämmchen verbinden. Letztere verlaufen meist senkrecht oder nur wenig zur Faserrichtung geneigt und ergiessen ihr Blut in einen dieser parallel laufenden Stamm. Mit der grössten Regelmässigkeit ist nun ein solches kleinstes Venenstämmchen zwischen zwei kleinsten Arterien angeordnet, sodass man diese Gefässe stets in der Reihenfolge: Arterie, Vene, Arterie, Vene, Arterie u. s. w. antrifft. Die Abstände zwischen ihnen sind geringen Schwankungen unterworfen (Taf. II, Figg. 3 u. 4). Es ist eigenthümlich zu sehen, wie bisweilen, wenn durch spitzwinkligen Abgang grösserer Äste dieses Gesetz gestört zu werden droht, kleinere Stämmchen unterkriegen, um auch in der sonst in dem Winkel entstehenden Lücke das Gesetz aufrecht zu erhalten.

Das Gebiet, welches jeder arterielle Endast versorgt, entspricht einem länglichen Scheibchen, dessen Dicke nur durch wenige Lagen von Muskelfasern gebildet wird.

Jede kleinste Arterie entsendet ihr Blut in gleicher Weise nach beiden Seiten hin, und zwar sicher wenigstens zum Theil in die nächstgelegenen Venenstämmchen. Bei einem Theil der Capillaren lässt sich jedoch eine directe Verbindung mit diesen nicht nachweisen; sie gehen über denselben oder darunter weg, um sich jenseits mit einer Capillare der nächsten Arterie zu einem venösen Ästchen zu vereinigen und von jener Seite in die Vene einzumünden. Ein anderer Theil der Capillaren stellt wohl auch nur Verbindungsglieder dar zwischen den Capillargebieten verschiedener Arterien.

In der Länge der Capillaren begegnet man ziemlichen Schwankungen. Nicht nur, dass man an verschiedenen Stellen des Muskels verschieden lange Capillaren trifft, sondern kürzere und längere liegen auch dicht neben einander; ja man findet sogar, dass zwei von demselben arteriellen Endästchen nach entgegengesetzten Seiten abgehende Capillaren merkliche Längenunterschiede zeigen. Beträgt beim Kaninchenmuskel (ohne Berücksichtigung der Minima und Maxima) die mittlere Länge einer Capillare 0,69 mm und schwankt sie dabei ziemlich gleichmässig zwischen 0,50 mm und 1,00 mm, so konnte ich dabei auch bestimmt solche von 0,43 mm und von 1 mm

bis 1,35 mm Länge messen. Die von derselben Arterie nach entgegengesetzten Seiten abgehenden Capillaren sind zum Theil gleich lang oder nur wenig verschieden; ich traf jedoch Arterien, von denen aus nach der einen Seite Capillaren von 1,08 mm und 1,11 mm und nach der anderen von 0,53 mm und 0,56 mm Länge abgingen. Über den Durchmesser und die Zahl der Capillaren, die von einer Arterie abgegeben wird, bin ich noch nicht in der Lage, genügende Angaben machen zu können.

B. Im contrahirten Muskel. An dem durch die oben erwähnte Methode bis auf das Äusserste verkürzten Muskel sind die letzten arteriellen und venösen Ästchen noch schärfer als am erschlafften senkrecht zur Faserrichtung gestellt, ihre Zweige sind nahe an den Stamm herangedrängt und laufen parallel mit ihm. Ist das Gefässsystem nur mit einer Masse injicirt, so sind die Arterien von den Venen nur durch ihre Schlankheit zu unterscheiden und dadurch, dass ihre Ästchen sehr lang und schmal sind, während die venösen durch den Zusammenfluss mehrerer Capillaren plötzlich als relativ weite und kurze Gefässe entstehen. Die Capillaren laufen alle in Schlangenlinien, die sich theilweise über die ganze Breite einer Muskelfaser hinziehen.

III. Venen.

Mit Ausnahme der oben erwähnten venösen Wurzelästchen verlaufen die Muskelvenen stets dicht neben den Arterien, sind einfach angelegt und bis in die feinsten Ästchen mit Klappen versehen, die namentlich an den Einmündungsstellen der kleineren Zweige in einen grösseren sich vorfinden, und die das Blut nur in der Richtung nach dem Herzen zu strömen lassen.

Die Venen bilden also genau so, wie die Arterien, ein dichtes Netz im Muskel, das sich von dem arteriellen höchstens dadurch unterscheidet, dass an einer Stelle, wo nur eine schwache arterielle Anastomose vorhanden ist, sich eine stärkere venöse findet, und umgekehrt. Bisweilen erweckt es den Anschein, als ob sich die Venen etwas strenger an die Faserrichtung, resp. eine darauf senkrechte hielten, als es die Arterien thun. Nur an einzelnen bestimmten Muskeln, an denen offenbar besondere hydraulische Verhältnisse vor-

liegen, sind die grössten Venenstämme etwas anders angeordnet, als die entsprechenden Arterien. So findet man namentlich am Zwerchfell Hauptabzugswege für das Blut im Centrum tendineum. Am meisten ist dies beim Kaninchen ausgesprochen, wo geradezu das arterielle Blut von den Rippen herkommt und in seiner Hauptmasse nach dem Centrum tendineum in die dessen Peripherie begrenzenden venösen Stämme abfliesst. Die grösseren Arterien und Venen greifen dabei in einander wie die Zinken zweier gegen einander gekehrter Rechen. Beim Hund und Menschen laufen allerdings in der pars muscularis sämmtliche Venen streng neben den entsprechenden Arterien, doch fallen auch bei ihnen in der pars tendinea grosse venöse Abzugscanäle auf, die das Blut, das ja hauptsächlich aus den Aa. intercostales und phrenicae inferiores, also von den seitlichen Theilen her, kommt, nach der Mitte fortführen. Ein ähnliches eigenthümliches Verhalten ist mir noch am M. mylohyoideus des Hundes aufgefallen. Diesem wird sein Blut fast ausschliesslich von den am seitlichen Rand verlaufenden Aa. submentales geliefert, findet seinen Abfluss aber nur zum geringsten Theile in die entsprechenden Vv. submentales, zum grössten dagegen in eine in der Medianlinie an der unteren Fläche des Muskels verlaufende starke V. mediana. Die Zweige dieser Vene und ihre Äste entsprechen dagegen vollständig denen der Arterien und bilden vorwiegend in der Faserrichtung angeordnete Längsmaschen. Welche mechanischen Verhältnisse diese eigenthümlichen Abweichungen sowie namentlich auch die Verschiedenheiten bei einzelnen Säugethieren verursachen, ist vorläufig noch unklar.

Doppelt angelegte Venen habe ich im Muskel selbst nie gefunden; namentlich sind auch die grössten, soweit sie im Muskel selbst verlaufen, nie doppelt. Letztere Thatsache steht natürlich nicht mit der anderen im Widerspruch, dass die Muskelvenen, sobald sie aus dem Muskel heraustreten, meist eine Begleitvene erhalten und nun die Arterie in der gewöhnlichen Weise von beiden Seiten her einfassen.

Die Zahl der Klappen in den Muskelvenen ist ausserordentlich gross. Sie finden sich nicht nur in den grössten Ästen, sondern ich konnte sie auch bis in feine Zweige unter $^1/_4$ mm Durchmesser nachweisen. Ihre Anwesenheit erschwert eine gesonderte Darstellung der

Venen ganz bedeutend. Bei Injectionen vom Stamm aus nach der Peripherie zu erhält man wohl bisweilen, d. h. wenn die Klappen mit der Wand verklebt oder sonst insufficient geworden sind, umschriebene Bezirke leidlich gut injicirt und sieht dann an der Peripherie derselben die Masse stets durch eine Klappe am weiteren Vordringen verhindert; in den meisten Fällen gelingt aber auch nicht einmal eine solche stückweise Darstellung, da die Klappen sich einstellen und selbst noch einem Drucke von ca. einer Atmosphäre Widerstand leisten. Eine vollständige Injection der Venen ist daher nur von den Arterien aus in der oben angegebenen Weise möglich.

Da die Vertheilung der Venen mit den erwähnten Ausnahmen derjenigen der Arterien vollständig entspricht, habe ich es nicht für nöthig gehalten, besondere Abbildungen von ihnen beizufügen.

Der Durchmesser der Venen ist, wie überall, so auch im Muskel bedeutend grösser als der der Arterien; auch beginnen sie gleich als im Verhältniss zu den einmündenden Capillaren übermässig grosse Schläuche, welche dann anfangs viel weniger an Durchmesser zunehmen, als die entsprechenden arteriellen Endästchen auf dem gleichen Wege abnehmen. Die Venen erscheinen an Injectionspräparaten stets als platte, bandartige Gefässe, deren spaltförmiges Lumen der Faserrichtung entspricht, wenn sie selbst senkrecht zu derselben verlaufen.

Im Folgenden sollen die Schlussfolgerungen zusammengestellt und discutirt werden, die sich aus den oben angeführten Thatsachen ergeben. Es wird dabei Gelegenheit sein, noch einiges anatomisch Neue zu erwähnen, welches zum besseren Verständniss dienen kann.

1. Jeder Muskel bildet für den Blutstrom ein in sich abgeschlossenes Ganzes; die Gefässe, die in einen Muskel eindringen, versorgen mit wenig Ausnahmen auch nur diesen allein. Selbst für die Capillarbezirke scheint dieses Gesetz in einem gewissen Grade Giltigkeit zu haben, da man die Capillaren an den Rändern des Muskels mit grosser Regelmässigkeit schlingenförmig sich umbiegen sieht. Dieser Befund stimmt auch sehr gut mit der experimentell gefundenen Thatsache, dass bei der Contraction eines Muskels die eintretende Beschleunigung des Kreislaufes nicht auf andere Muskel übergreift.

Allerdings existiren ja Gefässverbindungen namentlich mit dem umgebenden Bindegewebe, doch habe ich sie nie grösser gefunden, als dass sie mit dem unbewaffneten Auge eben noch sichtbar sind. Und selbst wenn man an platten Muskeln, z. B. Mm. latissimus dorsi, sartorius, aus den zarten Gefässbögen, welche den äussersten Randtheil versorgen, eine ganze Anzahl solcher feiner Ästchen in das benachbarte Fascienblatt eindringen sieht, ja bisweilen bis zum nächsten Muskel verfolgen kann, so kann dies meiner Meinung nach an dem aufgestellten Satze nichts ändern, da diese Gefässe bei ihrem absolut und relativ geringen Querschnitt in keiner Weise für die Be- oder Entlastung des betreffenden Stromgebietes in Betracht kommen können. Diese Ästchen scheinen nur für die Ernährung des umgebenden Bindegewebes bestimmt zu sein.

Nicht unerwähnt will ich lassen, dass ich in einigen Fällen auch grössere Gefässe einen Muskel habe verlassen sehen, um entweder in die Haut oder den benachbarten Muskel überzugehen. Das erstere Verhältniss findet sich regelmässig am M. biceps femoris des Hundes; ich behalte es mir für später vor, bei einer anderen Gelegenheit ausführlich darauf einzugehen. Den zweiten Fall habe ich namentlich an den Bauchmuskeln gefunden, wo die Äste der A. epigastrica nicht nur den M. rectus abdominis versorgen, sondern auch auf die queren und schrägen Bauchmuskeln übergreifen (Taf. I, Fig. 2), und wo die Äste der Aa. intercostales resp. lumbales sich in allen drei queren Bauchmuskeln gleichmässig verbreiten. Ob dieses Verhalten, welches von dem der übrigen Muskeln wesentlich abweicht, damit zusammenhängt, dass sich die Bauchmuskeln, wenigstens die derselben Seite, wohl stets gemeinsam contrahiren, wage ich noch nicht zu entscheiden.

2. Die Anastomosen, welche zwischen verschiedenen Arterien und zwischen verschiedenen Ästen einer und derselben bestehen, zeichnen sich alle, selbst im M. rectus abdominis, wo sie sich bei Verengerung oder Verschluss der Aorta abdominalis so enorm erweitern können, durch eine Feinheit aus, die namentlich bei grösseren Muskeln im Missverhältniss steht zu der Grösse der zuführenden Gefässe. In kleineren Muskeln, in denen die Hauptarterien selbst kleiner sind, fällt dieser Unterschied nicht so in die Augen. Es fehlen also in den grossen Muskeln Verbindungsäste, welche durch ihren Quer-

schnitt geeignet sind, den plötzlichen Ausfall eines Gefässgebietes durch Zufuhr von einer anderen Seite her wieder zu ersetzen. Es ist vielmehr der Muskel von einem dichten Netz von allseitig mit einander verbundenen Gefässen durchzogen, deren Durchmesser in nur geringen Grenzen schwankt. An dieses Netz treten von verschiedenen Seiten her die Hauptäste der zuführenden Gefässe heran, um es mit Blut anzufüllen. Die grosse Anzahl der Anastomosen, wie auch die geringen Unterschiede in dem Durchmesser der das Netz bildenden Gefässe bewirken, dass der Blutdruck innerhalb desselben ein möglichst gleichmässiger ist und namentlich nicht davon abhängt, ob ein Gebiet dem Hauptstamm näher oder ferner liegt.

Nach dem eben Gesagten muss auch Verschliessung eines Astes eine durchaus verschiedene Wirkung haben je nach der Grösse desselben. Weiss man auch, dass sich einzelne Blutgefässe bei Verschluss anderer in kurzer Zeit bedeutend erweitern können[1]), so muss man für die Beurtheilung der Frage doch von der folgenden Grundbetrachtung ausgehen:

Gehen zu einem bestimmten Muskelstück die Äste *a*, *b*, *c* und *d*, so kommt es bei Verschluss des Astes *a* auf die Grösse des Querschnittes je von *b*, *c* und *d*, sowie auf die Summe aller drei an; von dem ersteren hängt der Druck und die Geschwindigkeit, von der letzteren die Gesammtmenge des Blutes ab, welche das betreffende Stück erhält. Ist jeder der Querschnitte von *b*, *c* und *d* wesentlich kleiner als der von *a* (das ist also der Fall, dass *a* ein Hauptstämmchen, *b*, *c* und *d* Theile des Anastomosennetzes sind), so ist auch der Druck und die Geschwindigkeit in *b*, *c* und *d*, also auch im ganzen Gebiete geringer[2]); und das betreffende Muskelstück erhält, wenn die Summe der Querschnitte von *b*, *c* und *d* nur wenig grösser oder gar kleiner ist, als der von *a*, eine geringere Blutmenge als sonst, zumal die betreffenden Gefässe nicht nur die Blutmenge, die sie vorher beförderten, sondern auch noch die, welche vordem durch *a* ging, ersetzen sollen. Sind alle vier angenommenen Gefässe aber fast gleich stark, so dass man sie dem oben

1) Stahel, Zur Anatomie und Chirurgie der Art. subclavia. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1886. Anat. Abth. p. 211—235.

2) Es handelt sich hier meistens um die feinen Gefässe, in denen vor den Capillaren wohl der Blutdruck den raschesten Abfall erleidet.

erwähnten Netzwerk und keines den grossen zuführenden Hauptstämmchen zuzählen kann, so sind die Unterschiede im Durchmesser, also auch die im Blutdruck, gering, die Summe der Querschnitte, also auch die Gesammtmenge des Blutes, viel grösser als im verschlossenen Gefässe. In diesem Falle kann also sehr viel leichter das Gebiet des einen Astes durch die anderen mit versorgt werden.

Die Ursache dafür, dass nach Verschluss eines grossen Astes gewöhnlich ein grosses Gebiet ausfällt, während die Verlegung eines kleineren ganz unbemerkt vorübergehen kann, liegt also nicht in der verschiedenen Grösse der von den betreffenden Ästen versorgten Gebiete, sondern darin, dass in dem ersteren Falle der Querschnitt der Anastomosen relativ gering, im letzteren relativ gross ist.

Dass diese Betrachtungsweise mehr als theoretischen Werth besitzt, ist wenigstens zum Theil bereits durch Experimente bewiesen. Ludwig und Alex. Schmidt[1]) fanden bei ihren künstlichen Blutdurchleitungen am M. biceps femoris des Hundes: »Wird nun eine der Muskelarterien eingebunden, so dass nur ihr Bezirk einen Strom empfängt, während die der übrigen Arterien leer bleiben, so tritt unfehlbar und spätestens nach 2 bis 3 Stunden in den nicht vom Blut benetzten Muskelmassen die Starre ein, während die unmittelbar anliegenden, vom Blut umflossenen Fasern einen hohen Grad von Reizbarkeit behauptet haben.« Und dies geschieht, trotzdem, wie ich an meinen Präparaten zeigen kann, zahlreiche wenn auch nur feine Anastomosen zwischen den beiden Hauptgefässen dieses Muskels (aus einem Ast der A. hypogastrica und einem der A. femoralis) und deren Zweigen vorhanden sind.

Rasch eintretende schwächere oder stärkere Verengerungen eines Gefässes werden natürlich je nach ihrer Grösse verschiedene Veränderungen verursachen, deren Ausdehnung sich unter Berücksichtigung der oben gemachten Bemerkungen leicht ergiebt.

Allmählich eintretende Verengerungen beziehentlich Verschliessungen eines Gefässes werden in der Regel gar keinen Einfluss auf die Ernährung eines Muskelstückes haben, da sich die Collateralen

---

1) C. Ludwig und Alex. Schmidt, Das Verhalten der Gase, welche mit dem Blut durch den reizbaren Säugethiermuskel strömen. Berichte d. math. phys. Classe d. K. S. Ges. d. Wiss. 1869. XX. Bd. p. 29.

auch ganz allmählich den von ihnen geforderten erhöhten hydraulischen Leistungen anpassen können.

3. Eine besondere Eigenthümlichkeit der Muskelgefässe liegt noch in der Art der Maschenbildung. Wenn man einen Muskel zugleich mit dem benachbarten Fascienblatte einbettet, sieht man, dass die Gefässmaschen in der Fascie ziemlich unregelmässig polygonal gestaltet sind, während sie im Muskel alle mehr oder weniger als in der Faserrichtung angeordnete Rechtecke mit abgerundeten Ecken erscheinen. Während die grösseren Gefässe sich weniger streng an die Richtung der Muskelfasern halten, laufen jedenfalls die feineren mit Vorliebe in bez. rechtwinklig zu derselben.

Da man nicht anders annehmen kann, als dass die Gefässe bei ihrer Entwickelung die Wege des relativ geringsten Widerstandes bevorzugen, müssen die letzteren im Muskel in der Faserrichtung resp. senkrecht zu derselben gelegen sein. Die feineren Äste, in denen der geringere Blutdruck herrscht, bevorzugen ja diese Richtungen, während die grösseren mit ihrem höheren Druck nicht so streng daran gebunden sind.

Einen Beweis für besondere in der Bauart des Muskels begründete Eigenthümlichkeiten bietet auch noch die Thatsache, dass sich die Gefässvertheilung in demselben Muskel verschiedener und in den Muskeln beider Körperhälften desselben Individuums auffällig gleicht.

Die genauere mechanische Analyse der einschlagenden Verhältnisse muss späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

4. Die Anlage des Venensystems entspricht in allen ihren Einzelheiten ganz besonders der Anforderung, dass das venöse Blut so leicht und so schnell als möglich aus dem Muskel entfernt wird.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass der Muskel bei Durchleitung von *O*-armem und Erstickungsblut nach kurzer Zeit abstirbt, und zwar genau so, als wenn überhaupt kein Blut durchgeleitet wird[1]; die Stoffwechselproducte des Muskels wirken also gewissermassen als Muskelgifte.

Für die beschleunigte Entfernung derselben sorgt einmal das weit verzweigte Netz von Venen, das einen leichten Abfluss nach verschiedenen Seiten hin ermöglicht, und zweitens die zahlreich

1) C. Ludwig und Alex. Schmidt a. a. O. p. 39.

angebrachten Klappen, die den Strom in die Richtung nach dem Herzen zu zwingen. Bedenkt man dabei noch, dass die Klappen eine ganz erstaunliche Widerstandskraft besitzen, so muss man in diesen Einrichtungen schon genügende Garantien dafür sehen, dass die schädlichen Einflüsse des venösen Blutes nicht in Wirksamkeit treten können.

Dass die Venen sich stets an die Wege halten, welche von den Arterien eingeschlagen werden, ist nach dem, was bei diesen gesagt wurde, leicht verständlich, zumal die Venen für Unterschiede in den Widerständen noch viel empfindlicher sind als jene. Hierher gehört jedenfalls auch die oben erwähnte Beobachtung, dass das spaltförmige Lumen der Venen dann, wenn sie senkrecht zur Faserrichtung laufen, in der Axe derselben angetroffen wird.

5. Der Vollständigkeit wegen muss ich hier noch eine schon früher gemachte Beobachtung erwähnen, welche jetzt ihre Erklärung findet. LUDWIG und SCHMIDT sagen[1]: »Ebenso fliesst das Blut oder jede andere der eingespritzten Massen nur durch die der injicirten Arterie entsprechende Vene ab, vorausgesetzt, dass dem Fliessen aus der Vene kein Hinderniss entgegengestellt wird. Unterbindet man dagegen die Vene, welche bis dahin den einzigen Abflussweg darstellte, so entwickelt sich nun auch ein Strom in den anderen Venen desselben Muskels.« Jede grössere Vene entspricht, wie schon aus der gegebenen Darstellung hervorgeht, in allen ihren Verzweigungen der entsprechenden Arterie; das Blut, das durch die Arterie einströmt, fliesst also vornehmlich durch die entsprechende Vene ab. Dabei ermöglicht es aber die grössere Weite der Anastomosen mit den benachbarten Venen, dass nach Verschluss der betreffenden Vene ein Abfliessen nach anderen Gebieten stattfinden kann, wie es bei der Arterie in dem entsprechenden Falle nicht möglich ist.

6. Das Gesetz über die Anordnung der feinsten Arterien und Venen, sowie über Ursprung und Verlauf der Capillaren, scheint dem ganzen thierischen Körper gemeinsam zu sein. Am einfachsten und klarsten, nämlich in der oben mitgetheilten Form, habe ich es beim Kaninchen, und zwar im weissen Muskel, gefunden. Beim Hund ist ebenfalls jede Arterie zwischen zwei Venen gelegen und

1) C. LUDWIG und ALEX. SCHMIDT a. a. O. p. 17.

schickt Capillaren in jede der beiden; jedoch scheinen noch einige Besonderheiten hinzuzukommen in Betreff der Abstände derselben von einander u. s. w., über die erst eine fortgesetzte Untersuchung das Genauere lehren wird. Der rothe Kaninchenmuskel nimmt ebenfalls in gewissen Punkten, auf die z. Th. schon RANVIER[1]) aufmerksam gemacht hat, eine Ausnahmestellung ein, über die ich mir ebenfalls weitere Mittheilung vorbehalten muss.

Dass es gelingt, direct unter dem Mikroskop zu beweisen, dass jede Arterie mit jeder benachbarten Vene directe capilläre Verbindungen hat, ist jedenfalls eine sehr interessante Thatsache; ob aber alle Capillaren, die von einer Arterie aus gespeist werden, nach den nächsten Venen Abflüsse haben, ist eine andere Frage, die ich noch nicht entscheiden kann.

Von vorn herein erwartet man nun, dass die Wege von den feinsten Arterien nach den feinsten Venen alle möglichst gleiche Länge haben, damit ohne die Nothwendigkeit besonderer complicirter nervöser Einrichtungen die Blutversorgung überall eine gleichmässige, keine Muskelfaser vor der anderen durch erleichterte Blutzufuhr bevorzugt ist. Allerdings scheinen nun meine Beobachtungen, dass die Länge der Capillaren in verhältnissmässig grossen Grenzen schwanken kann, dem zu widersprechen. Wenn ich die kleinsten und grössten gemessenen Längen von 0,43 mm und 1,35 mm mit einander vergleiche, so ergiebt dies ein Schwanken um das Dreifache. Auch ohne Berücksichtigung der Minima und Maxima ergeben sich erhebliche Unterschiede; es sind von den gemessenen Capillaren

36 %	0,50—0,59 mm,	
21,5 -	0,60—0,69 -	
14,2 -	0,70—0,79 -	
14,2 -	0,80—0,89 -	
14,2 -	0,90—0,99 -	lang.

Meine Messungen, die alle am M. adductor magnus des Kaninchens angestellt sind, sind aber sicher viel zu gering an Zahl, um schon endgiltige Schlüsse daraus ziehen zu können. Sollten die Längen-

1) RANVIER, Technisches Lehrbuch der Histologie. Übersetzt von NICATI und WYSS. p. 479.

differenzen, namentlich an den Capillaren, die von derselben Arterie nach entgegengesetzten Seiten gehen, sich stets vorfinden, so müsste man allerdings weiter fragen, ob nicht vielleicht noch andere Einrichtungen vorhanden sind, die eine gleichmässige Blutversorgung garantiren, und welche. Oder sind etwa bei den enormen Widerständen, welche der Blutstrom in den Capillaren, und wohl namentlich im Anfangstheil derselben, oder besser gesagt, beim Übergang aus der weiteren Arterie in die enge Capillare findet, diese Längenunterschiede verhältnissmässig ohne Einfluss?

Auffällig ist besonders auch noch, dass jede Capillare ein oder mehrere Male unter rechtwinkligen Knickungen in andere Ebenen umbiegt. Auf diese Art wird jede Faser, wie schon erwähnt, von mehreren Capillaren versorgt. Auf Querschnitten gut injicirter Muskeln sieht man jede Ecke der mehr oder weniger abgerundeten polygonalen Faserdurchschnitte durch einen Gefässdurchschnitt markirt, abgesehen von den Gefässen, welche längs oder schräg getroffen sind (Taf. III, Fig. 7). An jeder Kante, sit venia verbo, einer Muskelfaser läuft also eine Capillare; es ist jedoch selbst auf kürzere Strecken nicht immer dieselbe, sondern verschiedene treten heran, um nach kurzem Verlaufe wieder abzubiegen. Dass auf der Flächenansicht jede Capillarmasche der Breite einer Muskelfaser entspricht, wie schon Ranvier[1]) bemerkte, findet so seine Bestätigung. Aus dieser Anordnung, dass die Muskelfaser nicht auf eine oder wenige Capillaren angewiesen ist, sondern mit einer grossen Zahl derselben (wenn man dazu die Faserlänge in Betracht zieht) in Berührung kommt, folgt, dass sie in der sorgfältigsten und peinlichsten Art von allen Seiten her mit dem Blutstrom in Berührung gebracht und vor den schädlichen Folgen von Circulationsstörungen möglichst gehütet ist.

7. Einen wesentlichen Einblick in die verwickelten Stromverhältnisse muss man von der Betrachtung des contrahirten Muskels erwarten. Wenn wir auch vorläufig die Frage unerörtert lassen müssen, ob die mit dem angegebenen Verfahren erzielten Bilder in Bezug auf die Grösse der Veränderungen genau den Verhältnissen am contrahirten Muskel entsprechen, so sehe ich doch keinen Grund ein, daran zu zweifeln, dass die Form der Veränderung genau die

1) Ranvier, a. a. O. p. 479.

gleiche ist. Sie lässt sich am einfachsten dahin zusammenfassen, dass die Gefässe in der Faserrichtung unter Verkleinerung der Abgangswinkel der Äste näher an einander gerückt werden und, soweit dies, wie bei den Capillaren, nicht möglich ist, sich in Wellenform zu legen gezwungen werden. Ich bemerke dabei, dass ich nicht etwa mit Knickungen der Fasern verbundene, unvollständige Contractionen, sondern präcis und deutlich contrahirte Muskelstücke untersucht habe mit stärker ausgesprochener Querstreifung als am erschlafften Muskel.

Die Formveränderung der Capillaren lässt eine eigenartige Befestigung derselben an der Muskelfaser vermuthen, durch welche die Regelmässigkeit der Bögen erzielt und Knickungen vermieden werden. Dass eine solche vorhanden ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man den injicirten Muskel mit 5—10%iger Salpetersäure behandelt, durch die das gröbere Bindegewebe gelockert und die Zerfaserung sehr erleichtert wird. Auch bei gewaltsamer Zerzupfung einzelner Bündel sieht man dann stets den gut isolirten Fasern kleine oder grössere Stücke von Capillaren anhaften, welche genau dieselbe Form und Lage haben wie an vorsichtig zerlegten etwas dickeren Scheibchen. Ohne eine eigenartige Verbindung der Capillaren mit dem Sarcolemm wäre diese Erscheinung nicht zu erklären. Diese Verbindung muss dabei aber auch so beschaffen sein, dass sie die gestreckten Capillaren nicht hindert, sich zu schlängeln und auf der Oberfläche der Faser zu verschieben. Welcher Art diese Befestigung ist, habe ich bis jetzt noch nicht ermitteln können; namentlich hat mich die Anwendung einer neuen scharfen Differenzirungsmethode für elastische Fasern, an deren Betheiligung ich anfangs dachte, nicht zum Ziele geführt.

Die starke Schlängelung der Capillaren macht auch den Unterschied verständlich, den auf dem Querschnitt ein contrahirter Muskel von einem erschlafften bietet (Taf. III, Fig. 8). Dadurch, dass ein grosser Theil der Windungen längs oder schräg getroffen ist, scheinen die einzelnen Fasern geradezu häufig von Gefässschlingen umgeben zu sein, und es offenbart sich ein Gefässreichthum, wie ihn z. B. noch die Leber darbietet. Es erhellt sofort, wie wesentlich für den arbeitenden Muskel eine solche innigere Berührung mit den Capillaren ist.

Die Thatsache, dass die Capillaren sich bei der Contraction schlängeln, der Widerstand in ihnen somit vermehrt wird, scheint im Gegensatz zu stehen mit der experimentell gefundenen, dass der Blutstrom während derselben Zeit eine Beschleunigung erfährt. Meine Präparate legen mir nun die Vermuthung nahe, dass bei der Contraction die Capillaren sich nicht nur schlängeln, sondern auch verkürzen und dadurch an Durchmesser gewinnen; auf diese Weise kann am ehesten der durch die gewellte Form eigentlich bedingte erhöhte Widerstand wieder verringert werden. Auf Durchschnitten contrahirter Muskeln (Taf. III, Fig. 8) sieht man auch häufig, dass die Querschnitte der Capillaren, namentlich derjenigen, die auf der Fläche der Fasern verlaufen, diese eine Kleinigkeit einbuchten, sich also gewissermassen in dem weichen Muskelprotoplasma Rinnen ausgegraben haben.

Leichter verständlich scheint die Thatsache, dass die Hauptbeschleunigung des Blutstromes, und zwar eine ziemlich plötzliche, nach einer Unterbrechung der Muskelcontraction eintritt, d. h. wenn bei fortbestehender Erweiterung der Muskelarterien die Capillaren wieder ihre gestreckte Form angenommen haben, und so der Widerstand in ihnen verringert worden ist.

Genaueres über die letzten Punkte mitzutheilen bin ich leider noch nicht in der Lage, da meine Injectionspräparate, so vollständig sie auch injicirt sind, doch nicht das geeignete Material scheinen, um an ihnen Dickenmessungen mit einiger Genauigkeit vornehmen zu können. Hier, wo es sich darum handelt, möglichst genaue absolute Werthe zu erhalten, sind ganz andere Gesichtspunkte bei der Herstellung der Präparate massgebend als sonst.

Ich will damit schliessen, die Ergebnisse meiner Untersuchungen nochmals kurz zusammenzufassen:

1. Die Arterien bilden im Muskel ein dichtes Netz anastomosirender Gefässe, dessen engste Maschen an Grösse nur wenig von einander differiren und ungefähr Rechtecken gleichen, die mit ihren längeren Seiten vorwiegend in der Faserrichtung liegen.

2. Aus den Seiten dieses Netzes gehen meist rechtwinklig zur Faserrichtung kleinste Arterien hervor, die den Capillaren bezichent-

lich den letzten vorcapillären Ästchen zum Ursprung dienen. Sie sind je zwischen zwei kleinste, ihnen parallel laufende Venen angeordnet, so dass stets auf eine Arterie eine Vene, auf diese wieder eine Arterie, u. s. w. folgt. Die vorcapillären Ästchen der Arterien sind schlank, gehen in mässig spitzem Winkel von ihrem Stamm ab und bogenförmig in die Faserrichtung über; die ersten Ästchen der entsprechenden Venen sind kurz und weit und entstehen zum Theil aus parallel dem Stamm laufenden Büscheln von Capillaren.

3. Jede solche kleinste Arterie entsendet gleichmässig nach beiden Seiten hin zu den beiden nächstgelegenen Venen eine Anzahl von Capillaren. Die Länge der Capillaren schwankt zwischen 0,5 mm und 1,0 mm; die mittlere Länge beträgt ungefähr 0,7 mm.

4. Im erschlafften Muskel sind die Capillaren langgestreckt, laufen in der Richtung der Fasern an den Kanten derselben und biegen häufig aus einer Ebene in eine andere um. Zwischen den einzelnen Capillaren existiren rechtwinklige Verbindungen. Jede Capillare geht an mehrere Muskelfasern. Jede Kante einer Muskelfaser wird von einer Capillare begleitet, von einer und derselben aber immer nur eine kurze Strecke lang.

5. Im contrahirten Muskel verlaufen die Capillaren mehr oder weniger geschlängelt. Die Berührungsfläche zwischen Muskelfaser und Blutstrom ist wesentlich vergrössert.

6. Die Venen verlaufen (mit der unter 2. erwähnten Ausnahme) stets dicht neben den Arterien, sind einfach angelegt und bis in ihre feinsten Ästchen hinein mit Klappen versehen.

7. Jeder Muskel bildet für den Blutstrom ein in sich abgeschlossenes Ganzes. Die vorhandenen Anastomosen mit den Gefässen des umgebenden Gewebes sind zu fein, als dass sie bei plötzlichem Verschluss eines Astes von Bedeutung sein könnten.

8. Die grosse Anzahl von Anastomosen und die Abwesenheit grösserer Unterschiede in der Weite derselben und überhaupt des gröberen Arteriennetzes sichern die möglichste Gleichmässigkeit von Blutdruck und Geschwindigkeit.

9. Die Anastomosen in einem Muskel zwischen Ästen verschiedener oder derselben Arterie sind alle sehr fein im Verhältniss zu den Hauptstämmen, sind also nicht geeignet, bei plötzlichem Ver-

schluss eines derselben dessen Gebiet mit zu versorgen. Der Ausfall eines kleinen Ästchens, dessen Querschnitt nicht wesentlich grösser ist als diejenigen der zu dem betreffenden Gebiet führenden Anastomosen, kann dagegen sehr wohl durch diese mit gedeckt werden.

10. Die rechteckige Maschenbildung ist den Muskelgefässen eigenthümlich, muss also in besonderen durch die Formveränderung bei der Contraction bedingten hydraulischen Verhältnissen begründet sein.

11. Die Anlage des Venensystems entspricht der Anforderung, dass die Stoffwechselproducte des Muskels so leicht und vollständig als möglich aus dem Muskel entfernt werden können.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Linker hinterer Abschnitt des Zwerchfelles eines Hundes, von oben gesehen. Vergr. 2. Nach Photographie gezeichnet.

IX, X, XI und XII bezeichnet die entsprechenden Rippen mit den betreffenden Aa. intercostales.

Fig. 2. Ein Stück aus einem rechtseitigen M. transversus abdominis eines Hundes. Vergr. 2.

il Ausläufer der A. iliolumbalis.

ic, ic, ic Äste der unteren Aa. intercostales, resp. der Aa. lumbales.

ep Ast der A. epigastrica inferior.


Fig. 1.
XII
XI
X
IX
A. phren. inf.
Fig. 2.
ic
ic
ic
il
ep

Tafel II.

Fig. 3. Endäste der Arterien und Venen. Stück aus dem M. adductor magnus des Kaninchens. Venen roth, Arterien schwarz.

LEITZ, Obj. III, Oc. 1.

Fig. 4. Arterieller Endast zwischen zwei venösen Endästen. Die Arterie enthält im weiteren Theil schwarze, im engeren rothe Masse. Venen roth. Aus demselben Muskel wie Fig. 3.

LEITZ, Obj. III, Oc. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Tafel III.

Fig. 5. Dasselbe wie Fig. 4. Das Arterienstämmchen ist abgerissen.
Vergr.: HARTNACK, Obj. IV, Oc. 3.

Fig. 6. Endast einer Arterie zwischen zwei venösen Endästen aus einem bei 50° C. wärmestarr gemachten M. gemellus surae des Kaninchens. Injection mit Berliner Blau.

A Arterie.

VV Venen.

Vergr.: HARTNACK, Obj. IV, Oc. 3.

Fig. 7. Querschnitt aus dem erschlafften M. semitendinosus des Hundes. Injection mit Berliner Blau. Der Muskel wurde in seiner natürlichen Länge aufgespannt und so gehärtet.

Färbung mit Eosin. Dicke des Schnittes 2/300 mm.

Vergr.: HARTNACK, Obj. VII, Oc. 3.

Fig. 8. Querschnitt aus dem contrahirten M. semitendinosus des Hundes. Injection mit Berliner Blau. Der Muskel wurde durch Eintauchen in Wasser von 50° C. wärmestarr gemacht.

Färbung mit Eosin. Dicke des Schnittes 2/300 mm.

Vergr.: HARTNACK, Obj. VII, Oc. 3.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

ZUR THEORIE

DER

BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN

VON

SOPHUS LIE,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº XII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.



Das Manuscript übergeben am 7. August 1888.
Der Abdruck vollendet den 30. September 1888.

ZUR THEORIE

DER

BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN

VON

SOPHUS LIE.



Die nachstehende Abhandlung behandelt die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die Theorie der Berührungstransformationen. Ich versuche die Grundbegriffe und die wichtigsten Sätze dieser verwandten Theorien durch möglichst durchsichtige Betrachtungen abzuleiten. Darnach gebe ich eine kurzgefasste Zusammenstellung von einigen allgemeinen Resultaten, zu denen mich meine Untersuchungen über Gruppen von Berührungstransformationen geführt haben.

1. Sind $z x_1 \dots x_n$ Cartesische Punktcoordinaten in einem $(n+1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n+1}, so kann die Gleichung einer durch den Punkt $z x_1 \dots x_n$ gehenden n-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit E_n die Form

$$(1) \qquad z' - z - p_1(x_1' - x_1) - \dots - p_n(x_n' - x_n) = 0$$

erhalten; hier sind $z' x_1' \dots x_n'$ Coordinaten eines laufenden Punktes unserer ebenen Mannigfaltigkeit E_n. Bezeichnen wir daher den Inbegriff eines Punktes $z x_1 \dots x_n$ und einer hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit E_n als ein *Element* des Raumes R_{n+1}, so können wir wie in früheren Untersuchungen *) die $2n+1$ Grössen

$$z x_1 \dots x_n \, p_1 \dots p_n$$

als *Coordinaten eines Elements* des Raumes R_{n+1} betrachten. Für den Begriff Element hat *später* Clebsch **) die Bezeichnung *Element des identischen Connexes* und Herr Lindemann ***) die Bezeichnung

*) Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1871 und 1. Mai 1872. Vgl. auch Göttinger Nachrichten Juni und October 1872, sowie Math. Annalen Bd. V, Bd. IX.

**) Clebsch, Göttinger Nachrichten 18. September 1872.

***) Clebsch, Vorlesungen über Geometrie bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann.

Hauptelement angewandt. In der Theorie der Connexe sind möglicherweise diese schwerfälligeren Bezeichnungen berechtigt. Dagegen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Berührungstransformationen ist meine ursprüngliche einfachere Terminologie vorzuziehen; sie ist auch längst von mehreren Verfassern, insbesondere von den Herren Mansion, Darboux, Bäcklund und Jordan adoptirt worden. Jedenfalls hat die Lehre von den Differentialgleichungen durch *explicite* Einführung des Begriffes Element an Einfachheit gewonnen.

Wählen wir eine ganz beliebige Relation zwischen $z x_1 \dots x_n$

$$z = F(x_1 \dots x_n)$$

und fügen zu derselben die n Gleichungen

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad (k = 1 \dots n)$$

hinzu, so besitzt das Gleichungssystem

$$z = F\,,\ p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}\,,\quad \dots \quad p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} \tag{2}$$

die Eigenschaft die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0 \tag{3}$$

zu befriedigen. Wir verstehen dies so, dass die Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$ für jedes Werthsystem z, x, p, dz, dx, dp besteht, welches die Gleichungen (2) und die aus ihnen durch einmalige Differentiation entstehenden Gleichungen erfüllt.

Es giebt indess noch weitere Gleichungssysteme*)

$$\Phi_1 = 0 \dots \Phi_m = 0$$

in den Veränderlichen z, x, p, welche in dem erklärten Sinne die Pfaff'sche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$ erfüllen. Dies ist in der That der Fall mit jedem Gleichungssysteme von der Form:

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} z - p_1 x_1 - \dots - p_q x_q = \Omega(p_1 \dots p_q x_{q+1} \dots x_n)\,, \\ x_1 = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial p_1} \dots x_q = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial p_q}\,,\quad p_{q+1} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_{q+1}} \dots p_n = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_n}\,, \end{cases}$$

*) Wenn wir im Folgenden über Gleichungssysteme $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_m = 0$ in gewissen Veränderlichen $y_1 \dots y_n$ reden, so setzen wir immer voraus, dass dasselbe

welche unter den Zahlen 0, 1, ... n die Zahl q auch sein mag. Man beweist leicht*), dass jedes Gleichungssystem $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_m = 0$, welches die Pfaff'sche Gleichung (3) erfüllt, $n + 1$ Gleichungen von der Form (4) umfasst; zu ihnen können aber weitere Gleichungen hinzutreten, welche gar keiner Beschränkung unterworfen sind.

Das Problem, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Phi\left(x_1 \dots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

zu integriren, kommt darauf hinaus, alle Gleichungssysteme

$$z - F(x_1 \dots x_n) = 0\,, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1 \dots n)$$

zu finden, welche mit der Gleichung $\Phi = 0$ verträglich sind. Es ist vortheilhaft, dieses Problem durch das allgemeinere**) zu ersetzen: *alle mit der Gleichung $\Phi = 0$ verträglichen Gleichungssysteme $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_{n+1} = 0$ zu finden, welche die* Pfaff'sche *Gleichung $dz - p_1\, dx_1 - \dots - p_n\, dx_n = 0$ erfüllen.* Diese letzte Fragestellung giebt, wie auch bei dieser Gelegenheit hervorgehoben werden mag, der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine Allgemeinheit und Einfachheit, welche der Jacobi'schen Theorie fehlt.

Sagen wir, dass ein Gleichungssystem $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_{n+1} = 0$, welches die Pfaff'sche Gleichung (3) erfüllt, eine Element-Mannigfaltigkeit oder kurz eine Element-M_n bestimmt, so können wir das Integrationsproblem einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi = 0$ auch so aussprechen: es sollen alle Element-M_n bestimmt werden, deren Gleichungen mit $\Phi = 0$ verträglich sind, kurz welche $\Phi = 0$ erfüllen.

---

in einer solchen Form vorliegt, dass nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix $\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}\right]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_m = 0$ gleich Null werden.

*) Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, Novbr. 1874; Math. Ann. Bd. IX, S. 250. In Grassmann's Ausdehnungslehre (1861), S. 352 findet sich ein Satz, der anscheinend meinen soeben besprochenen Satz als speciellen Fall umfasst. Dabei ist aber zu bemerken, dass Grassmann's Beweis unrichtig und sein Satz nicht allgemein gültig ist.

**) Gött. Nachrichten October 1872.

2. Ist das Gleichungssystem:

$$z - F(x_1 \ldots x_n) = 0\,,\quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1 \ldots n) \tag{5}$$

mit der Gleichung $\Phi(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ verträglich, so geht die Gleichung $\Phi = 0$ durch die Substitution $z = F$, $p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ in eine Identität über. Wenn aber eine Function von $x_1 \ldots x_n$ identisch verschwindet, so verschwinden auch die Differentialquotienten derselben hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$. Es ist also einleuchtend, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x_k} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \ldots n)$$

vermöge des Gleichungssystems (5) bestehen.

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + p_i \frac{d\Psi}{\partial z}\right) - \sum_1^n{}_i \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

wie gewöhnlich mit dem Symbole $[\Phi\Psi]$, so können wir somit sagen, dass die n Gleichungen

$$\left[\Phi,\ p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right] = 0 \quad (k = 1 \ldots n)$$

vermöge des Gleichungssystems (5) bestehen. Nun aber verschwindet ebenfalls der Ausdruck

$$[\Phi,\ z - F] = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\left(p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right)$$

vermöge des Gleichungssystems (5). Also erhalten wir den folgenden Satz, der sich nur hinsichtlich der Form von einem längst bekannten Satze unterscheidet:

Satz 1. *Ist das Gleichungssystem*

$$z - F(x_1 \ldots x_n) = 0\,,\quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1 \ldots n)$$

mit der Gleichung $\Phi(z x_1 \ldots p_n) = 0$ verträglich, so bestehen die Gleichungen

$$[\Phi,\ z - F] = 0\,,\ \left[\Phi,\ p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right] = 0 \ \ldots \left[\Phi,\ p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}\right] = 0$$

vermöge des Gleichungssystems $z - F = 0$, $p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$.

Benutzen wir den Begriff der *infinitesimalen* Transformation und betrachten überdies

$$[\Phi f] = \sum_1^n i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} +$$

$$\left(p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial \Phi}{\partial p_n}\right) \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_1^n i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

als Symbol einer solchen Transformation in den Veränderlichen $z x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$, so können wir den Satz 1 auch folgendermassen formuliren:

Satz 2. *Ist das Gleichungssystem*

$$z - F(x_1 \dots x_n) = 0\,, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \dots p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

mit der Gleichung $\Phi(x_1 \dots p_n) = 0$ *verträglich, so gestattet es die infinitesimale Transformation* $[\Phi f]$.

Diese nur hinsichtlich der Form neue Bemerkung, die wir später verallgemeinern, liefert eine einfache und durchsichtige Begründung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie auch der Theorie der Berührungstransformationen. Dabei setzen wir als bekannt voraus, dass *die Invarianz eines Gleichungssystems bei einer infinitesimalen Transformation eine Eigenschaft desselben ist, die sowohl von der Wahl der Veränderlichen, wie von der Form des Gleichungssystems unabhängig ist.*

Wir werden annehmen, dass ein vorgelegtes, aus $n+1$ Gleichungen bestehendes Gleichungssystem:

$$\Phi_k(x_1 \dots x_n\, z\, p_1 \dots p_n) = 0 \quad (k = 1 \dots n+1)$$

durch Auflösung auf die Form

$$z = F_k(x_1 \dots x_n)\,, \quad p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad (k = 1 \dots n)$$

gebracht werden kann. Alsdann ist es nach dem Vorangehenden sicher, dass unser Gleichungssystem jede infinitesimale Transformation $[\Phi_i f]$ gestattet; das heisst es verschwinden sämmtliche Ausdrücke $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_{n+1} = 0$. Es frägt sich nun, ob diese Eigenschaft für Gleichungssysteme, welche die Form (6) erhalten können, charakteristisch ist. Um diese Frage beantworten zu

können, schicken wir eine allgemeine Bemerkung voraus, die im Folgenden mehrfache Anwendung finden wird.

Gestattet ein Gleichungssystem, welches sowohl die Form $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_m = 0$ wie die Form $\Psi_1 = 0, \ldots \Psi_m = 0$ annehmen kann, jede infinitesimale Transformation $[\Phi_i f]$, so ist es leicht zu erkennen, dass es auch jede infinitesimale Transformation $[\Psi_k f]$ gestattet. Nach unserer Voraussetzung verschwindet nämlich jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_m = 0$ und gleichzeitig jedes $[\Phi_i \Psi_k]$ vermöge $\Psi_1 = 0 \ldots \Psi_m = 0$. Dann aber verschwindet jedes $[\Psi_k \Phi_i] = -[\Phi_i \Psi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_m = 0$ und folglich auch jedes $[\Psi_k \Psi_i]$ vermöge $\Psi_1 = 0 \ldots \Psi_m = 0$, wie behauptet wurde. Hiermit haben wir nun zunächst den folgenden von mir herrührenden allgemeinen Satz.

Satz 3. *Stehen m Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_m = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n$ in solcher Beziehung, dass jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_m = 0$ verschwindet, so besitzt jede andere Form: $\Psi_1 = 0, \ldots \Psi_m = 0$ unseres Gleichungssystems dieselbe Eigenschaft: es verschwindet jedes $[\Psi_i \Psi_k]$ vermöge $\Psi_1 = 0 \ldots \Psi_m = 0$.*

Stehen $n+1$ unabhängige Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ in solcher Beziehung, dass jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ verschwindet, so folgt daraus nicht, dass unsere Gleichungen sich hinsichtlich $z, p_1 \ldots p_n$ auflösen lassen. Ist aber eine solche Auflösung

$$(6) \qquad z - F(x) = 0\,, \quad p_1 - F_1(x) = 0 \ldots \quad p_n - F_n(x) = 0$$

möglich, so verschwindet nach dem Satze 3 jeder Ausdruck

$$[p_k - F_k\,,\ z - F] = p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

vermöge der Gleichungen (6), und es ist daher $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$. Also haben wir den

Satz 4. *Ein nach $z\, p_1 \ldots p_n$ auflösbares Gleichungssystem $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n$ bestimmt dann und nur dann eine Element-M_n, wenn jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwindet.*

Gleichzeitig können wir unter Anderem den folgenden Satz aufstellen:



Satz 5. *Ein nach $z p_1 \dots p_n$ auflösbares Gleichungssystem $\Phi_1 = a_1 \dots \Phi_{n+1} = a_{n+1}$ mit den willkürlichen Constanten $a_1 \dots a_{n+1}$ stellt dann und nur dann für jedes Werthsystem der a_k eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i \Phi_k]$ identisch null sind.*

Dieser letzte Satz bildet bekanntlich die Grundlage für JACOBI's Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

3. Enthält die Gleichung $z - F(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_{n+1}) = 0$ $n+1$ Parameter $a_1 \dots a_{n+1}$, so stellt das Gleichungssystem

$$z - F(x_1 \dots a_n) = 0\,, \quad p_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \;.\;.\; p_n - \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \tag{6}$$

für jedes Werthsystem der Parameter a_k eine Element-M_n dar. Ist die Determinante

$$\left| \begin{matrix} F & \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \end{matrix} \right|$$

nicht identisch null, so sind die Gleichungen (6) nach den a_k auflösbar, und dann bestimmen die hervorgehenden Gleichungen

$$a_k = \varphi_k (x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) \quad (k = 1 \dots n+1)$$

∞^{n+1} verschiedene Element-M_n, deren Elemente $z\, x\, p$ keine von den a freie Relation erfüllen. Es verschwindet somit der PFAFF'sche Ausdruck $dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$ für jedes Werthsystem $z\, x\, p$, und für jedes Werthsystem $dz\; dx\; dp$, welches die $n+1$ Gleichungen

$$d\varphi_k = \sum_1^n{}_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dz + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} dp_i = 0$$

erfüllt. Daher ist es möglich $n+1$ Functionen $\pi_1 \dots \pi_{n+1}$ von $x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n$ anzugeben, welche die Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \dots + \pi_{n+1} d\varphi_{n+1}$$

identisch erfüllen.

Sind auf der anderen Seite $2q$ Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_q\, \pi_1 \dots \pi_q$ vorgelegt, welche die Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \dots + \pi_q d\varphi_q$$

identisch erfüllen, so können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $\varphi_1 \dots \varphi_q$ unabhängige Functionen sind; sonst liesse sich näm-



lich offenbar eine analoge Gleichung aufstellen, in welcher die Zahl q einen kleineren Werth besässe. Sind aber $\varphi_1 \dots \varphi_q$ unabhängige Functionen, so bestimmen die Gleichungen

$$\varphi_1 = a_1, \quad \dots \quad \varphi_q = a_q$$

für jeden Werth der Parameter a eine Element-Mannigfaltigkeit; folglich ist die Zahl q mindestens gleich $n + 1$; denn eine Element-Mannigfaltigkeit enthält höchstens ∞^n Elemente. Setzen wir insbesondere voraus, dass $q = n + 1$ ist, so erhalten wir durch Verknüpfung der vorangehenden Entwickelungen den Satz:

Satz 6. *Sind $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ hinsichtlich $z p_1 \dots p_n$ unabhängige Functionen von $x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n$, so ist zum Bestehen einer identischen Gleichung von der Form*

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \pi_1 d\varphi_1 + \dots + \pi_{n+1} d\varphi_{n+1} \tag{6'}$$

erforderlich und hinreichend, dass alle $[\varphi_i \varphi_k]$ identisch gleich Null sind. Alsdann sind die π_i eindeutig bestimmt.

Dieser Satz ist längst von meinen Vorgängern, wenn auch möglicherweise nicht eben in dieser Form aufgestellt worden. Es ist aber wohl zu beachten, dass es zum Bestehen einer Identität von der Form (6') keineswegs nothwendig ist, dass $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ hinsichtlich $z p_1 \dots p_n$ unabhängig sind.

4. Eine Transformation

$$z' = Z(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n), \quad x_k' = X_k(x_1 \dots p_n), \quad p_k' = P_k(x_1 \dots z \dots p_n) \tag{7}$$
$$(k = 1, 2 \dots n)$$

in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n$ heisst nach mir eine *Berührungstransformation*, wenn eine Identität von der Form

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \varrho\,(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n)$$

besteht. Es ist dabei klar, dass die Grösse ϱ von Null verschieden sein muss; denn sonst bestände zwischen $Z X_1 \dots X_n$ mindestens eine Relation; da aber die Gleichungen (7) eine Transformation bestimmen sollen, so ist es von vornherein vorausgesetzt, dass $Z X_1 \dots X_n P_1 \dots P_n$ unabhängige Functionen von $z x_1 \dots p_n$ sind.

Das allgemeinste Gleichungssystem in den Z, X, P, z, x, p, welches die Gleichung (7) oder die äquivalente Gleichung

$$P(dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n) = \sigma\,(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n)$$



erfüllt, wird nach der Theorie des Pfaff'schen Problems erhalten durch Elimination der Grössen $\lambda_1 \dots \lambda_m$, P und σ zwischen $2n + m + 2$ Relationen von der Form

$$(8)\quad \begin{cases} \Omega_k(z x_1 \dots x_n Z X_1 \dots X_n) = 0 \quad (k = 1 \dots m), \\ \mathrm{P} = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Z} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial Z}, \quad \sigma = -\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} - \cdots - \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial z}, \\ -\mathrm{P} P_i = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial X_i}, \quad \sigma p_i = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_i}, \end{cases}$$

in denen $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_m = 0$ m beliebige unabhängige Gleichungen zwischen $z\, x_1 \dots x_n\, Z\, X_1 \dots X_n$ bezeichnen sollen. Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass das hervorgehende Gleichungssystem keineswegs immer eine Transformation zwischen den beiden Variabelnsystemen z, x, p und Z, X, P liefert. Wählt man m bestimmte Gleichungen $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_m = 0$, so entscheidet man nach den gewöhnlichen Regeln durch Determinantenbildung, ob sich aus den Gleichungen (8) Relationen zwischen den Grössen $z\, x\, p$ oder zwischen den Grössen $Z X P$ ableiten lassen. Hierbei gilt der bemerkenswerthe Satz, dass sich immer gleichviele Relationen zwischen den z, x, p wie zwischen den Z, X, P herleiten lassen*). Sind insbesondere die Grössen des einen Systems von einander unabhängig, so ist dies auch mit den Grössen des zweiten Systems der Fall. Hiermit erhalten wir den folgenden aus der Theorie des Pfaff'schen Problems bekannten

Satz 7. *Sind $Z\, X_1 \dots X_n\, P_1 \dots P_n$ gegebene Functionen von $z\, x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$, welche die Gleichung*

$$dZ - P_1\, dX_1 - \cdots - P_n\, dX_n = \varrho\,(dz - p_1\, dx_1 - \cdots - p_n dx_n), \; \varrho \neq 0$$

identisch erfüllen, so sind die Grössen $Z X P$ unabhängige Functionen von $z\, x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$.

Durch Verknüpfung dieses Satzes mit den früheren Betrachtungen erhalten wir ohne weiteres den Satz:

Satz 8. *Sind $Z X_1 \dots X_n\, P_1 \dots P_n$ gegebene Functionen von $z x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$, welche die Bedingungsgleichung*

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho\,(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n \partial x_n), \; \varrho \neq 0$$

identisch erfüllen, so liefern die Gleichungen

*) Archiv for Math. Christiania 1876; Math. Ann. Bd. IX, S. 551.



$$z' = Z\,,\quad x_k' = X_k\,,\quad p_i' = P_i$$

immer eine Berührungstransformation.

Deuten wir eine Berührungstransformation $z' = Z$, $x_k' = X_k$, $p_k' = P_k$ in den Veränderlichen $z\,x\,p$ als eine Operation, welche jedes Element $z\,x\,p$ in das Element $z'x'p'$ überführt, so können wir sagen, dass eine Berührungstransformation jede Element-Mannigfaltigkeit allgemeiner Lage in eine ebensolche überführt. Diese Eigenschaft der Berührungstransformationen liesse sich natürlich als Definition derselben benutzen.

Eine besonders wichtige Berührungstransformation, die von EULER herrührt, wird dargestellt durch Gleichungen von der Form

$$(9)\quad \begin{cases} z' = z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q\,,\; p_1' = -x_1 \cdots p_q' = -x_q\,, \\ x_1' = p_1 \cdots x_q' = p_q\,;\;\; p'_{q+k} = p_{q+k}\,;\;\; x'_{q+k} = x_{q+k}\,; \end{cases}$$

es besteht ja identisch die Gleichung

$$d(z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q) + \sum_1^q{}_k\, x_k\, d p_k - \sum_{q+1}^n{}_i\, p_i\, d x_i$$
$$= dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n\,.$$

In diesem Falle ist ϱ gleich 1. Die EULER'sche Transformation umfasst die Dualität im Raume $z\,x_1 \ldots x_n$ als speciellen Fall.

Eine andere einfache Berührungstransformation wird definirt durch die Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} z' = z - \dfrac{a}{\sqrt{1 + p_1^2 + \cdots p_n^2}} = z - \dfrac{a}{\sqrt{\varDelta}} \\[2ex] x_k' = x_k + \dfrac{a p_k}{\sqrt{\varDelta}}\,,\quad p_k' = p_k\,.\quad (k = 1 \ldots n)\,; \end{cases}$$

es ist ja

$$d\left(z - \frac{a}{\sqrt{\varDelta}}\right) - \sum_1^n{}_k\, p_k\, d\left(x_k + \frac{a p_k}{\sqrt{\varDelta}}\right) = dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n\,.$$

Ist insbesondere $n = 2$, so stellen die Gleichungen (10) eine sogenannte Dilatation (Paralleltransformation) des Raumes $z\,x_1 x_2$ dar.

5. Wünschen wir die allgemeinste *infinitesimale* Berührungstransformation

$$\delta z = \zeta\,\delta t\,,\quad \delta x_i = \xi_i\,\delta t\,,\quad \delta p_i = \pi_i\,\delta t$$

in den Veränderlichen zxp zu finden, so bilden wir die Gleichung

$$\frac{\delta}{\delta t}(dz - p_1 dx_1 - \cdots p_n dx_n) = \sigma\,(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

oder ausgeführt die Gleichung

$$\begin{aligned} d\zeta - p_1 d\xi_1 - \cdots - p_n d\xi_n - \pi_1 dx_1 - \cdots - \pi_n dx_n \\ = \sigma\,(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)\,, \end{aligned}$$

die sich in die folgenden Relationen zerlegt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial z} = \sigma\,,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} + p_k \sigma = \pi_k\,,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - p_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial p_i} - \cdots - p_n \frac{\partial \xi_n}{\partial p_i} = 0\,,$$

$$(k,\ i = 1,\ 2\ \ldots\ n)\ .$$

Schreiben wir diese Relationen folgendermassen:

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial z} = \sigma\,,$$

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \partial \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial z} = \pi_k\,,$$

$$\frac{\partial(\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n)}{\partial p_i} = -\,\xi_i$$

und setzen

$$\zeta - p_1 \xi_1 - \cdots - p_n \xi_n = -\,W\,,$$

so erhalten wir für ζ, ξ_i und π_k einfache Ausdrücke, welche nur die Grösse W und ihre Ableitungen enthalten. In dieser Weise finden wir den Satz:

Satz 9. *Jede infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen $zx_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n$ besitzt die Form*

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\delta x_i}{\delta t} = \frac{\partial W}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{\delta z}{\delta t} = -\,W + \sum_1^n {}_k\, p_k \frac{\partial W}{d p_k}\,, \\ \frac{\delta p_i}{\delta t} = -\frac{\partial W}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial W}{\partial z}\,. \end{aligned}$$

Hier bedeutet W eine ganz beliebige Function von den $z\,x\,p$.

Wir nennen W die *charakteristische Function* der infinitesimalen Berührungstransformation (11). Das Symbol derselben ist offenbar

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}\ .$$

Führen wir in diese infinitesimale Transformation neue Veränderliche $z'x'p'$ ein und zwar vermöge einer Euler'schen Transformation

$$(9)\qquad z' = z - p_1x_1 - \cdots - p_qx_q\ ,\quad p_1' = -x_1\ ,\quad \cdots p_q' = -x_q$$
$$p'_{q+k} = p_{q+k}\ ,\quad x_1' = p_1 \cdots x_q' = p_q\ ,\quad x'_{q+k} = x_{q+k}\ ,$$

so ist es von vornherein einleuchtend, dass wir wiederum eine infinitesimale Berührungstransformation in $z'x'p'$ erhalten müssen. Indem wir dies durch Rechnung bestätigen, erhalten wir die Formel

$$(12)\qquad [Wf]_{zxp} - W\frac{\partial f}{\partial z} = [Wf]_{z'x'p'} - W\frac{\partial f}{\partial z'}\ ,$$

welche uns den Satz liefert:

Satz 10. *Führt man in eine infinitesimale Berührungstransformation* $[Wf] - W\frac{\partial f}{dz}$ *neue Veränderliche* $z'\ x'\ p'$ *vermöge einer* Euler'schen *Substitution ein, so wird die charakteristische Function der neuen infinitesimalen Transformation ohne Weiteres erhalten, wenn in die alte charakteristische Function die neuen Veränderlichen eingeführt werden.*

Aus den soeben angestellten Betrachtungen lässt sich noch ein Schluss ziehen. Es ist ja $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'}$ und also folgt

$$[Wf]_{zxp} = [Wf]_{z'x'p'}\ .$$

Dies giebt uns den Satz:

Satz 11. *Bei der* Euler'schen *Transformation* (9) *bleibt jeder Ausdruck* $[Wf]$ *absolut invariant.*

Am Einfachsten beweist man übrigens diesen Satz, indem man verificirt, dass derselbe richtig ist, wenn W und f zwei beliebige unter den Grössen $z'x'p'$ sind. Daraus folgt leicht die allgemeine Gültigkeit desselben.

6. Stellen nun $n+1$ gegebene Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z\ x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$ eine Element-M_n dar, so können die aufgelösten Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q - F(p_1 \cdots p_q x_{q+1} \cdots x_n) = 0\,, \\ x_1 + \dfrac{\partial F}{\partial p_1} = 0 \cdots x_q + \dfrac{\partial F}{\partial p_q} = 0\,, \quad p_{q+k} - \dfrac{\partial F}{\partial x_{q+k}} = 0 \end{cases}$$

durch eine EULER'sche Transformation die Form

$$z' - F(x_1' \cdots x_n') = 0\,, \quad p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'} = 0$$

erhalten. Nun aber ist

$$\left[z' - F\,,\ p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'}\right] = 0\,, \quad \left[p_i' - \frac{\partial F}{\partial x_i'}\,,\ p_k' - \frac{\partial F}{\partial x_k'}\right] = 0\,;$$

also (Satz 11) stehen die Gleichungen (13) in derselben Beziehung zu einander, kurz (Satz 3) es verschwinden alle $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0\ .\ .\ \Phi_{n+1} = 0$. Also:

Satz 12. *Stellen $n+1$ Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ eine Element-M_n dar, so verschwinden alle $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$.*

Hieraus folgt nun ohne weiteres der Satz:

Satz 13. *Besteht eine Gleichung von der Form*

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \Psi dZ + \Psi_1 dX_1 + \cdots + \Psi_n dX_n\,,$$

so sind die Ausdrücke $[ZX_i]$, $[X_i X_k]$ sämmtlich identisch null.

Stehen andererseits $n+1$ unabhängige Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ paarweise in solchen gegenseitigen Beziehungen, dass jedes $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ verschwindet, so ist es immer möglich, die Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ hinsichtlich z und n Grössen x_i oder p_k mit lauter *verschiedenen Indices* aufzulösen. Wäre in der That keine derartige Auflösung möglich, so würde der Satz 3 auf einen Widerspruch führen. Kann nun unser Gleichungssystem etwa nach $z\,x_1 \ldots x_q\,p_{q+1} \ldots p_n$ aufgelöst werden, so kann es offenbar auch die Form

$$\begin{gathered} z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q - F(p_1 \cdots p_q x_{q+1} \cdots x_n) = 0\,, \\ x_i + F_i(p_1 \cdots p_q x_{q+1} \cdots x_n) = 0\,, \quad (i = 1 \cdots q)\,, \\ p_k - \Phi_k(p_1 \cdots p_q x_{q+1} \cdots x_n) = 0\,, \quad (k = q+1 \cdots n) \end{gathered}$$

erhalten. Dabei sollen (Satz 3) die Ausdrücke

$$[z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q - F\,,\ x_i + F_i] = -\left(x_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\right),$$

$$[z - p_1 x_1 - \cdots - p_q x_q - F\,,\ p_k - \Phi_k] = p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

vermöge des Gleichungssystems verschwinden; also ist

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \Phi_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad (i = 1 \cdots q, \; k = q + 1 \cdots n).$$

Wir erhalten somit zunächst den

Satz 14. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen $\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_{n+1} = 0$ in den Veränderlichen $z\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$ stellt dann und nur dann eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwinden.*

Hieraus ergiebt sich ferner der Satz:

Satz 15. *Ein System von $n+1$ unabhängigen Gleichungen $\Phi_1 = a_1 \ldots \Phi_{n+1} = a_{n+1}$ mit den $n+1$ willkürlichen Parametern $a_1 \ldots a_{n+1}$ stellt dann und nur dann für jedes Werthsystem der a eine Element-M_n dar, wenn alle $[\Phi_i \Phi_k]$ identisch gleich null sind.*

Gleichzeitig erhalten wir den Satz:

Satz 16. *Sind $Z, X_1 \ldots X_n$ unabhängige Functionen von $z\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$, so bestimmen die Gleichungen*

$$z' = Z, \quad x_1' = X_1 \cdots x_n' = X_n$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn alle $[Z X_i]$, $[X_i X_k]$ identisch gleich null sind. Die hinzutretenden Gleichungen $p_i' = P_i$ werden aus der Bedingungsgleichung

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

*bestimmt**).

Wenn zwei Functionen Φ und Ψ von $x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n$ in der Beziehung $[\Phi \Psi] = 0$ stehen, so sagen wir, dass dieselben in *Involution* liegen.

7. Bestimmen die Gleichungen

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation, ist also

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n), \quad \varrho \neq 0$$

*) Gesellsch. d. Wissensch. zu Christiania, 1873, S. 245. Soll die Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = \Phi_0 d\varphi_0 + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

bestehen, so können nicht die Grössen $\varphi_0\, \varphi_1 \cdots \varphi_n$ alle von z frei sein. Es ist daher erlaubt, wie an der citirten Stelle geschehen, unter φ_n eine Grösse zu verstehen, welche z wirklich enthält.

so liefern auch die Gleichungen:

$$z' = Z - P_1 X_1 - \cdots - P_q X_q\,, \quad p_1' = -X_1 \cdots p_q' = -X_q\,, \quad p'_{q+k} = P_{q+k}\,,$$
$$x_1' = P_1 \cdots x_q' = P_q\,, \quad x_q'_{+k} = X_{q+k}$$

eine derartige Transformation, und also zeigt Satz 16, dass die Functionen $Z - P_1 X_1 - \ldots - P_q X_q$, $P_1 \ldots P_q$, $X_{q+1} \ldots X_n$ paarweise in *Involution* liegen. In dieser Weise erhalten wir die Relationen

$$[P_i P_k] = 0\,, \quad [X_i P_k] = 0\,, \quad (i \neq k)\,,$$
$$[Z P_k] - P_k [X_k P_k] = 0 = [Z - P_k X_k\,,\ P_k]\,.$$

Es bestimmen aber auch die Gleichungen

$$z'' = Z - \frac{a}{\sqrt{1 + P_1^2 + \cdots P_n^2}} = Z - \frac{a}{\sqrt{\Delta}}\,,$$
$$x''_k = X_k + \frac{a P_k}{\sqrt{\Delta}}\,, \quad p_k'' = P_k$$

eine Berührungstransformation; folglich ist

$$\left[X_i + \frac{a P_i}{\sqrt{\Delta}}\,, \quad X_k + \frac{a P_k}{\sqrt{\Delta}}\right] = 0\,,$$

woraus folgt

$$[X_1 P_1] = [X_2 P_2] = \cdots = [X_n P_n]\,.$$

Betrachten wir endlich die Berührungstransformation

$$z' = Z\,, \quad x_1' = X_1 \cdots x_n' = X_n\,, \quad x_n'_{+1} = x_{n+1}\,,$$
$$p_1' = P_1 \cdots p_n' = P_n\,, \quad p_n'_{+1} = \varrho\, p_{n+1}$$

in den Veränderlichen $z x_1 \ldots x_{n+1} p_1 \ldots p_{n+1}$, so finden wir die Gleichungen

$$[X_1 P_1] = \cdots = [X_n P_n] = -\varrho\,.$$

Hiermit haben wir den

Satz 17. *Bilden die Gleichungen*

$$z' = Z\,, \quad x_k' = X_k\,, \quad p_k' = P_k$$

eine Berührungstransformation, so bestehen die Relationen

$$(14) \qquad \begin{cases} [Z X_i] = [X_i X_k] = [X_i P_k] = [P_i P_k] = 0\,, \\ [P_i X_i] = \varrho\,, \quad [P_i Z] = \varrho P_i\,, \quad \varrho \neq 0\,. \end{cases}$$

Es lässt sich nun umgekehrt zeigen, dass jedes Grössensystem

$Z X_1 \ldots X_n P_1 \ldots P_n$, welches die Bedingungsgleichungen (14) erfüllt, eine Berührungstransformation liefert. Es ist zunächst leicht zu sehen, dass die Grössen Z, X, P unabhängig sein müssen. Bestände in der That etwa die Gleichung:

$$P_1 = \Psi(Z X_1 \cdots X_n P_2 \cdots P_n),$$

so käme

$$[P_1 X_1] = [\Psi, X_1];$$

diese Gleichung ist indess unmöglich, indem die rechte Seite gleich Null, die linke von Null verschieden ist. Bestände andererseits eine Relation von der Form:

$$Z = \varphi(X_1 \cdots X_n),$$

so gäbe die Gleichung

$$[P_1 Z] = [P_1 \varphi]$$

die Relation

$$P_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1},$$

welche nach dem eben Gesagten unmöglich ist. In ganz analoger Weise ergiebt sich, dass auch keine Relation zwischen $X_1 \ldots X_n$ allein bestehen kann.

Da nun $Z X_1 \ldots X_n$ sicher von einander unabhängig sind und überdies paarweise in Involution liegen, so giebt es immer (Satz 16) n Grössen $\Pi_1 \ldots \Pi_n$, welche eine Relation

$$\sigma(dZ - \Pi_1 dX_1 - \cdots - \Pi_n dX_n) = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

identisch erfüllen. Es bestehen daher u. a. die Gleichungen

$$[X_k \Pi_i] = 0, \quad [\Pi_i Z] - \Pi_i [\Pi_i X_i] = 0.$$

Bilden wir nun die $n - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen

$$[X_2 f] = 0 \cdots [X_n f] = 0,$$

so erkennen wir zunächst, indem wir f der Reihe nach die Werthe $P_2 P_3 \ldots P_n$ ertheilen, dass unsere $n - 1$ Gleichungen unabhängig sind und somit höchstens $n + 2$ unabhängige Lösungen besitzen. Wir kennen aber schon so viele unabhängige Lösungen, nämlich

$$Z, \ X_1, \ X_2 \cdots X_n P_1.$$

Folglich besitzt jede Lösung, z. B. Π_1, die Form

$$\Pi_1 = W(Z X_1 X_2 \cdots X_n P_1).$$



Tragen wir diesen Werth in die Gleichung:

$$[ZH_1] - H_1 \, (X_1 H_1) = 0 \, ,$$

so kommt

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} \{[Z P_1] - W [X_1 P_1]\} = 0$$

oder, da W wegen der Gleichung $\sigma [H_1 X_1] = 1$ nicht von P_1 frei sein kann:

$$[Z P_1] - W [X_1 P_1] = 0 \, .$$

Andererseits aber ist

$$[Z P_1] - P_1 [X_1 P_1] = 0 \, ,$$

also folgt $W = P_1$ und überhaupt $H_k = P_k$.

Also:

Satz 18. *Zum Bestehen einer identischen Relation von der Form*

$$dz - p_1 \, dx_1 - \cdots - p_n \, dx_n = \frac{1}{\varrho} (dZ - P_1 \, dX_1 - \cdots - P_n \, dX_n)$$

ist erforderlich und hinreichend, dass die $2n + 1$ *Grössen* Z, X_i *und* P_k *die Bedingungsgleichungen*

$$[Z X_i] = 0 \, , \quad [X_i X_k] = 0 \, , \quad [X_i P_k] = 0 \, , \quad [P_i P_k] = 0 \, ,$$

$$[P_1 X_1] = \cdots = [P_n X_n] = \varrho \, , \quad [P_i Z] = \varrho \, P_i$$

erfüllen.

Diesen fundamentalen Satz veröffentlichte ich in dieser Form in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1872 und 1873, S. 258. Derselbe ist übrigens nur eine *andere Form* des folgenden von mir an der angegebenen Stelle *bewiesenen* schönen Satzes:

Satz 19. *Zum Bestehen einer identischen Relation von der Form*

$$p_0 \, dx_0 + p_1 \, dx_1 + \cdots + p_n \, dx_n = P_0 \, dX_0 + P_1 \, dX_1 + \cdots + P_n \, dX_n$$

ist erforderlich und hinreichend, dass die $2n + 2$ *Functionen* X *und* P *von den* x, p *die Relationen*

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0 \, , \quad (P_i X_i) = 1 \, ,$$

$$\sum^k p_k \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0 \, , \quad \sum^k p_k \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = P_i$$

erfüllen.



8. Eine infinitesimale Berührungstransformation in den Veränderlichen $z\,x_1 \ldots x_n\,p_1 \ldots p_n$ ertheilt den x_i und p_k Incremente, die nur von den x und p abhängen, wenn die charakteristische Function derselben die Form

$$Az + u\,(x_1 \cdots x_n\,p_1 \cdots p_n)$$

besitzt und dabei A eine Constante bedeutet. Besonders wichtig ist der Fall $A = 0$; alsdann ist

$$(uf) + \left(\sum p_k \frac{\partial u}{\partial p_k} - u\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

das Symbol der infinitesimalen Transformation. Zwei derartige Transformationen u_1 und u_2 sind vertauschbar, wenn $(u_1 u_2) = 0$ ist; sieht man von z ab, so genügt schon, dass $(u_1 u_2)$ gleich einer Constanten ist.

Sind u und v Functionen von den $x\,p$, so bleibt der Klammerausdruck (uv) bei jeder Berührungstransformation in den $x\,p$ invariant. Dies gilt im besonderen auch, wenn die besprochene Transformation infinitesimal ist. Indem man dies analytisch ausdrückt, erhält man die allgemeine JACOBI'sche Identität. Eine andere Deutung*) der JACOBI'schen Identität erhält man, indem man zwei infinitesimale Berührungstransformationen in den $x\,p$, etwa u_1 und u_2, betrachtet. Dieselben lassen den PFAFF'schen Ausdruck: $dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n$ invariant. Setzt man daher

$$(u_k f) + \left(\sum p_i \frac{\partial u_k}{\partial p_i} - u\right)\frac{\partial f}{\partial z} = B_k f\,,$$

so ist einleuchtend, dass auch die Transformation $B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$ jenen PFAFF'schen Ausdruck invariant lässt und somit die Form

$$(\omega f) + \left(\sum p_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - \omega\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzt. Hierdurch wird man wiederum auf die JACOBI'sche Identität geführt.

Die MAYER'sche Identität gestattet eine ganz ähnliche Deutung.

Sind W_1 und W_2 die charakteristischen Functionen zweier infinitesimalen Berührungstransformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ in den Veränderlichen $z\,x\,p$, so ist

*) Math. Ann. Bd. XVI. S. 528.

$$[W_1\, W_2] - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right)$$

die charakteristische Function der infinitesimalen Transformation $X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$.

Wird auf die infinitesimale Berührungstransformation W die endliche Berührungstransformation

$$z' = Z\,, \quad x_k' = X_k\,, \quad p_i' = P_i$$

ausgeführt, und ist dabei

$$dZ - P_1\,dX_1 - \cdots - P_n\,dX_n = \varrho\,(dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n)\,,$$

so ist ϱW die charakteristische Function der neuen infinitesimalen Berührungstransformation (Arch. for Math., Christiania 1876).

Sind $u_1 \ldots u_r$ Functionen von $x_1 \ldots x_n\; p_1 \ldots p_n$, welche paarweise Relationen von der Form

$$(u_i u_k) = \omega_{ik}(u_1 \cdots u_r)$$

erfüllen, so bilden die u_k und alle Functionen u derselben nach meiner alten Terminologie eine *Functionengruppe* oder noch kürzer eine *Gruppe*. Ich wählte diese Bezeichnung, weil alle infinitesimalen Berührungstransformationen (uf) eine *unendliche* Gruppe von Berührungstransformationen erzeugen.

9. Eine Berührungstransformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n$ heisst *reducibel*, wenn sie durch eine Berührungstransformation in diesen Veränderlichen in eine Gruppe von *Punkt*transformationen des Raumes $z\, x_1 \ldots x_n$ übergeführt werden kann. Sonst heisst sie *irreducibel*. In den Veränderlichen $z\, x\, p$ ist somit eine reducible Gruppe imprimitiv. Eine irreducible Gruppe kann natürlich auch imprimitiv sein. Eine Berührungstransformationsgruppe ist reducibel dann und nur dann, wenn sie ein n-gliedriges vollständiges System invariant lässt, dessen Lösungen paarweise in Involution liegen.

Es ist mir gelungen, alle endlichen Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes zu bestimmen, welche im fünffach ausgedehnten Raume $z\, x_1\, x_2\, p_1\, p_2$ primitive Gruppen liefern.

Auch das allgemeine, sehr schwierige Problem, überhaupt alle



endlichen Berührungstransformationsgruppen des dreifachen Raumes zu bestimmen, habe ich im *Princip* gelöst; nur einige Detailrechnungen bleiben noch übrig.

Aus meiner alten Bestimmung aller Berührungstransformationsgruppen einer Ebene ergiebt sich ohne Schwierigkeit (Archiv for Math. Bd. 9, 1884) die Bestimmung aller Gruppen von *Punkt*-Transformationen des dreifachen Raumes, bei denen eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung invariant bleibt. Eine derartige Gruppe ist *immer endlich*. Ist sie intransitiv, so enthält sie weniger als drei Parameter.

In dieser Weise erhält man u. a. den Ausgangspunkt für die Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten im R_4, die eine projective Gruppe gestatten und zugleich einen Ansatz zur Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten im R_4, die eine Gruppe von conformen Punkttransformationen gestatten.

Wünscht man alle irreducibeln Berührungstransformationsgruppen des dreifachen Raumes zu bestimmen, die eine Schaar von Gleichungen

$$F(x_1\, x_2\, z\, p_1\, p_2) = \text{Const.}$$

invariant lassen, so kann man zunächst $F = x_2$ setzen. Jede derartige Gruppe enthält eine invariante irreducible Untergruppe, welche alle Ebenen $x_2 = $ Const. stehen lässt. Diese Untergruppe Γ transformirt die Linienelemente jeder Ebene $x_2 = $ Const. durch eine irreducible Berührungstransformationsgruppe g dieser Ebene. Es sind daher drei verschiedene Fälle zu untersuchen. Ist insbesondere die Parameterzahl der Gruppe g gleich zehn, so ist die Gruppe Γ ebenfalls zehngliedrig.

Bei einer irreducibeln Berührungstransformationsgruppe einer Ebene bleibt immer eine (Gött. Nachr. 1874) und nur eine Differentialgleichung dritter Ordnung invariant. Dieselbe kann auf die Form $y''' = 0$ oder, wenn man es vorzieht, auf die Form $y' y''' - \frac{3}{2} y''^2 = 0$ gebracht werden.

10. Bestimmen die Gleichungen

$$(1)\quad z' = Z(z\, x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n)\,, \quad x_k' = X_k\,, \quad p_k' = P_k \quad (k = 1 \cdots n)$$

eine Berührungstransformation, so sind, wie schon früher bemerkt, die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$[X_1 f] = 0 \cdots \quad [X_n f] = 0$$

sicher unabhängig. Es sind daher nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left| \frac{\partial X_k}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial p_n} \quad \sum_1^n p_i \frac{\partial X_k}{\partial p_i} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_k}{\partial z} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_k}{\partial z} \right|$$

identisch gleich Null und offenbar auch nicht alle n-reihigen Determinanten der einfacheren Matrix

$$\left| \frac{\partial X_k}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial p_n} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_k}{\partial z} \cdots \frac{\partial X_k}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_k}{\partial z} \right|.$$

Unsere Transformation hat, wie wir wissen, die Eigenschaft, die Pfaff'sche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$ invariant zu lassen. Es ist nun möglich, eine *erweiterte* Transformation in den Veränderlichen

$$x_1 \cdots x_n z p_1 p_2 \cdots p_n \quad r_{11} \cdots r_{ik} = r_{ki} \cdots r_{nn}$$

von der Form:

$$z' = Z, \quad x_k' = X_k, \quad p_k' = P_k, \quad r_{ik}' = R_{ik} \quad (x z p r_{\alpha\beta})$$

zu bilden, welche das System der Pfaff'schen Gleichungen

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0, \quad dp_k - r_{k1} dx_1 - \cdots - r_{kn} dx_n = 0$$
$$(k = 1 \cdots n)$$

invariant lässt. Unsere Forderung wird ja, wenn wir allgemein

$$\frac{dU(xzp)}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U}{\partial z} + \sum_1^n j \frac{\partial U}{\partial p_j} r_{ji}$$

setzen, durch die Gleichungen

$$\frac{dP_k}{dx_i} = r_{k1}' \frac{dX_1}{dx_i} + \cdots + r_{kn}' \frac{dX_n}{dx_i}$$

ausgedrückt. Es fragt sich, ob die n-reihige Determinante

$$\Delta = \left| \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_j}{\partial z} p_i + \sum^{\nu} \frac{\partial X_j}{\partial p_\nu} r_{\nu i} \right|$$

vermöge $r_{ik} = r_{ki}$ verschwindet. Nach der an die Spitze dieser Nummer gestellten Bemerkung ist dies offenbar nicht der Fall. Man erhält also eine Bestimmung aller r_{ki}' durch die Grössen $x z p r_{\alpha\beta}$:

$$r_{ki}' = R_{ki}(x_1 \cdots z \cdots p_n \cdots r_{nn}),$$



und dabei ergiebt sich, dass jedes R_{ki} vermöge $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ gleich R_{ik} ist.

Unsere Berührungstransformation transformirt daher nicht allein $z\,x_1 \dots x_n$ und die *ersten* Differentialquotienten von z nach den x_k, sondern auch die *zweiten* Differentialquotienten von z. Aehnliche Ueberlegungen zeigen, dass auch die höheren Differentialquotienten unter sich transformirt werden.

Ist nun eine Gruppe von Berührungstransformationen vorgelegt, so findet man durch Mitberücksichtigung von allen Differentialquotienten erster, zweiter bis $m$ter Ordnung eine erweiterte Gruppe. *Ihre Invarianten sind Differentialinvarianten der ursprünglichen Gruppe.*

11. Wir werden annehmen, dass einerseits eine Element-M_n, andererseits eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $W(x\,z\,p)$ vorgelegt ist. Wünschen wir nun zu entscheiden, ob das Gleichungssystem $\Phi_1 = 0 \dots \Phi_{n+1} = 0$ unserer Element-M_n die infinitesimale Transformation W gestattet, so bilden wir, wenn unser Gleichungssystem die Form

$$z - F(x_1 \cdots x_n) = 0\,, \quad p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$$

erhalten kann, die Ausdrücke

$$[W,\ z - F] - W' = \sum_1^n{}_k \frac{\partial W}{\partial p_k}\left(p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - W\,,$$

$$\left[W,\ p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}\right] = -\frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{\partial W}{\partial z}\,p_k - \sum \frac{\partial W}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}\,,$$

führen sodann in ihnen die Substitution $z = F$, $p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ aus und verlangen schliesslich, dass die hervorgehenden Ausdrücke identisch verschwinden sollen. Hierdurch erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$W\left(x_1 \cdots x_n\, F\, \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \equiv 0\,, \quad \frac{\partial W\left(x\, F\, \frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x_k} \equiv 0\,, \quad (k = 1 \cdots n)\,,$$

welche sich auf die erste reduciren. Das Gleichungssystem $z - F = 0$, $p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ gestattet daher die infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn es mit der Gleichung $W = 0$ verträglich ist.

Kann das Gleichungssystem der vorgelegten Element-M_n nicht die Form $z - F(x) = 0$, $p_k - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ erhalten, so ist es, wie wir wissen, immer möglich, dasselbe durch eine EULER'sche Transformation auf diese Form zu bringen. Gleichzeitig verwandelt sich die infinitesimale Berührungstransformation W in eine Berührungstransformation in den neuen Veränderlichen, deren charakteristische Function wiederum W ist. Das früher abgeleitete Resultat gilt daher immer, kurz es besteht der Satz:

Satz 20. *Das Gleichungssystem*) einer Element-M_n gestattet eine infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn es mit der Gleichung $W(xzp) = 0$ verträglich ist**).*

Dieser schöne, wenn auch im Grunde selbstverständliche Satz, den ich im Jahre 1871 oder 1872 entdeckte, war der Ausgangspunkt für meine Untersuchungen über infinitesimale Berührungstransformationen.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $q > n + 1$ unabhängige Gleichungen:

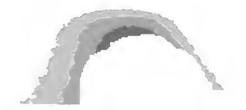
$$\Phi_1 = 0 \cdots \Phi_{n+1} = 0 \cdots \Phi_q = 0$$

eine Element-Mannigfaltigkeit bestimmen, welche natürlich ∞^{2n+1-q} Elemente enthält. Man übersieht leicht, dass *diese Element-Mannigfaltigkeit dann und nur dann die infinitesimale Berührungstransformation W gestattet, wenn sie von charakteristischen Streifen der Gleichung $W = 0$ erzeugt ist.*

Wir wollen nun annehmen, dass eine Element-M_{n-1} vorgelegt ist, welche die infinitesimale Berührungstransformation W nicht gestattet. Bilden wir dann alle endlichen Transformationen derjenigen eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation W ist, und

*) Der Satz 20 gilt ohne Ausnahme, also insbesondere auch wenn die betreffende Element-M_n eine *singuläre* Integral-M_n liefert.

**) Man kann den Satz des Textes auch so aussprechen: Eine Element-Mannigfaltigkeit gestattet die infinitesimale Berührungstransformation W dann und nur dann, wenn sie von charakteristischen Streifen der Gleichung $W = 0$ erzeugt ist. Diese Formulirung ist aber insofern specieller als diejenige des Textes, als sie *singuläre* Integral-Mannigfaltigkeiten nicht berücksichtigt. Was die Theorie der singulären Integral-Mannigfaltigkeiten einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung betrifft, verweise ich auf DARBOUX's gekrönte Preisschrift.



führen alle diese Transformationen auf die Elemente unserer M_{n-1} aus, so erhalten wir ∞^n Elemente, deren Inbegriff eine Element-M_n bilden, welche die infinitesimale Transformation W gestattet, welche also die Gleichung $W = 0$ erfüllt. In dieser Weise findet man offenbar *alle Element-M_n, welche die Gleichung $W = 0$ erfüllen*. Diese von mir herrührende Methode umfasst die CAUCHY'sche Integrationstheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als speciellen Fall.

Hieran schliessen wir einige Betrachtungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die eine vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation W gestatten. Ist $\Phi = 0$ eine derartige Gleichung m-ter Ordnung, so bestimmt jedes Werthsystem

$$z x_1 \dots x_n \frac{\partial z}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}$$

ein *Element der Gleichung*. Es ist nun immer möglich, jedes Element der Gleichung $\Phi = 0$ zu finden, welches von der infinitesimalen Transformation in ein benachbartes Element übergeführt wird, das mit dem vorgelegten *vereinigt* liegt. *Der Inbegriff aller derartigen Elemente gestattet die infinitesimale Transformation*, und es ist leicht zu erkennen, dass *alle diese Elemente sich zu Element-Mannigfaltigkeiten zusammenordnen lassen.* In dieser Weise gelingt es, eine ausgezeichnete Classe Integrale*) der Gleichung $\Phi = 0$ zu finden und zwar durch Integration einer partiellen Differentialgleichung m-ter Ordnung in n Veränderlichen $\zeta \xi_1 \dots \xi_{n-1}$. Die betreffenden Integral-Mannigfaltigkeiten genügen alle der Gleichung $W = 0$.

Die vorangehenden Betrachtungen dehnen sich *ohne weiteres* auf den Fall aus, dass eine vorgelegte Gleichung $m$ter Ordnung $\Phi = 0$ mehrere *vertauschbare* infinitesimale Transformationen gestattet, deren charakteristische Functionen $W_1 \dots W_q$ keine Functionalrelation von der Form

$$\Omega\left(\frac{W_1}{W_q} \dots \frac{W_{q-1}}{W_q}\right) = 0$$

erfüllen.

Gestattet überhaupt irgend ein integrables System partieller Differentialgleichungen irgend eine endliche oder unendliche Gruppe

---

*) Math. Annalen, Bd. XI, S. 490, Anmerkung.

von Berührungstransformationen, so lässt sich hieraus immer Vortheil für die Integration derselben ziehen. Freilich findet man im Allgemeinen nur specielle Classen von Integralen.

12. Kennt man die Definitionsgleichungen einer endlichen Transformationsgruppe, so ist es natürlich immer möglich, beliebig viele Glieder in den Reihenentwickelungen der betreffenden infinitesimalen Transformationen zu berechnen. Sodann findet man die *Zusammensetzung* der Gruppe durch ausführbare Rechnungen.

Enthält eine r-gliedrige Gruppe $X_1 \ldots X_{r-1}\, Y$ eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe $X_1 \ldots . X_{r-1}$, welche nicht invariant ist, so giebt es $r-2$ infinitesimale Transformationen

$$Z_k = e_{k1} X_1 + \cdots + e_{k,\, r-1} X_{r-1},$$

welche Relationen von der Form

$$(Z_k Y) = d_{k1} X_1 + \cdots + d_{k,\, r-1} X_{r-1}$$

erfüllen. Diese $r-2$ infinitesimalen Transformationen bilden eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe, die in der $(r-1)$-gliedrigen Gruppe invariant ist. — Dieser Satz lässt sich nach mehreren Richtungen verallgemeinern.

Enthält eine einfache r-gliedrige Gruppe weniger als neun Parameter, so ist sie dreigliedrig oder achtgliedrig. Im ersten Falle ist sie holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Im zweiten Falle ist sie holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer Ebene. Die zur Bestimmung aller einfachen Gruppen mit *neun* Parametern erforderlichen Rechnungen habe ich grösstentheils durchgeführt; nach den Ergebnissen derselben ist es *wahrscheinlich*, dass es keine einfache Gruppe mit neun Parametern giebt.

Enthält eine einfache r-gliedrige Gruppe Untergruppen mit $r-\varrho$ Parametern und keine Untergruppe mit mehr Parametern, so giebt es gleichzusammengesetzte Gruppen Γ in einem ϱ-fach ausgedehnten Raume. Für kleine Werthe der Zahl ϱ (jedenfalls für $\varrho = 1, 2, 3$ oder 4) kann nun die Gruppe Γ so gewählt werden, dass sie mit einer *projectiven* Gruppe des ϱ-fachen Raumes ähnlich ist. Dieser Satz gilt aber nicht allgemein für jeden Werth der Zahl ϱ. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit für die Integralrechnung.



13. In früheren Arbeiten entwickelte ich eine allgemeine Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Die Erledigung eines solchen Problems verlangte jedesmal die Integration gewisser Hülfsgleichungen, die aber unter Umständen in mehreren Weisen gewählt werden könnten. Ich werde jetzt ausdrücklich hervorheben, dass die *Ordnungszahlen dieser Hülfsgleichungen immer dieselben bleiben*. Auch in diesem Punkte besteht eine *vollständige* Analogie zwischen der GALOIS'schen Theorie der algebraischen Gleichungen und meiner Integrationstheorie (vgl. C. JORDAN'S *traité des substitutions*).

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº XIII.

MIT NEUNZEHN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1888.



Das Manuscript übergeben am 6. August 1888.
Der Abdruck vollendet den 10. November 1888.

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS.

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KGL. SÄCHS. GESELLSCH. DER WISSENSCHAFTEN.



Die Methode des arithmetischen Mittels giebt nicht nur den Existenzbeweis der betreffenden Functionen, sondern liefert auch für diese Functionen bestimmte *analytische Ausdrücke*, und ermöglicht hierdurch eine tiefer gehende Untersuchung dieser Functionen. Derartige Untersuchungen sollen nun in der vorliegenden Abhandlung wirklich angestellt werden.

Die unendliche Ebene sei durch eine geschlossene Curve in einen *innern* Theil $\mathfrak{J}$, und einen *äussern* Theil $\mathfrak{A}$ zerlegt. Und zwar mag jene Curve, unter Zugrundelegung eines *positiven* Axensystems x, y, gegeben sein durch die simultanen Gleichungen:

$$(A.)\qquad \xi = \mathfrak{f}(t) \quad \text{und} \quad \eta = \mathfrak{g}(t)\,.$$

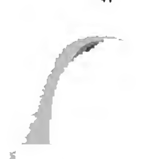
Sodann aber mag nachträglich, statt der independenten Variable t, die Bogenlänge σ eingeführt, und die so entstehende Gestalt der beiden Gleichungen mit:

$$(B.)\qquad \xi = \mathfrak{F}(\sigma) \quad \text{und} \quad \eta = \mathfrak{G}(\sigma)$$

bezeichnet sein. Dabei mag die Bogenlänge σ, von irgend einem festen Punkte aus, gerechnet sein in der Richtung der *positiven Tangente* τ, d. i. in derjenigen Richtung, welche zur *innern Normale* ν ebenso liegt, wie die x-Axe zur y-Axe.

Bezeichnet man also für irgend einen Curvenpunkt (ξ, η) die Richtungscosinus der positiven Tangente τ mit α, β, ferner die Richtungscosinus der innern Normale ν mit A, B, und versteht man überdies unter θ das Azimuth von τ gegen die x-Axe, so werden die Formeln stattfinden:

$$(C.)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos\theta = \dfrac{d\xi}{d\sigma} = \xi'\,, \\[2ex] \beta = \sin\theta = \dfrac{d\eta}{d\sigma} = \eta'\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = -\sin\theta = -\eta'\,, \\[2ex] \mathsf{B} = \cos\theta = \xi'\,; \end{cases}$$



woraus z. B. folgt:

$$(D.)\qquad \xi'^2 + \eta'^2 = 1 \,.$$

Bezeichnet man ferner den *Krümmungsradius* der Curve im Punkte (ξ, η) mit R, so ist:

$$(E.)\qquad \frac{1}{R} = \varepsilon \frac{d\theta}{d\sigma} = \varepsilon\theta' = \varepsilon(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \,,$$

wo die Accente, ebenso wie in (C.), (D.), Differentiationen nach der Bogenlänge σ andeuten. Das in (E.) enthaltene ε ist $= +1$ oder $= -1$, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein *innerer* oder *äusserer* ist, d. i. je nachdem derselbe die gegebene Curve *von Innen* oder *von Aussen* berührt.

Determinationen.

Um für unsere Untersuchungen ein brauchbares festes Fundament zu gewinnen, wollen wir für die vorliegende Abhandlung, ein für alle Mal, Folgendes festsetzen:

I. — *Die gegebene geschlossene Curve soll keine Doppelpunkte haben; so dass also durch sie die unendliche Ebene immer nur in zwei Theile $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ zerlegt wird.*

II. — *Die Coordinaten ξ, η sollen stetige Functionen der Bogenlänge σ sein. Ueberdies soll θ entweder ebenfalls eine stetige, oder doch wenigstens eine abtheilungsweise stetige Function von σ sein.*

III. — *Der Umfang Σ der Curve soll einen bestimmten endlichen Werth besitzen.*

IV. — *Die Curve soll von solcher Beschaffenheit sein, dass die Anzahl der durch die Curve auf irgend einer geraden Linie markirten Punkte stets $< N$ ist, wo N eine bestimmte endliche Zahl vorstellt. Diese Zahl N kann alsdann etwa als der Rang der Curve bezeichnet werden.*

V. — *Im Allgemeinen soll jede längs der Curve vorgeschriebene Function f als eine eindeutige und periodische Function der Bogenlänge σ angesehen werden; so dass also die Formel gilt:*

$$f = f(\sigma) = f(\sigma + m\Sigma) \,,$$

wo m jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, während Σ den Umfang der Curve vorstellt. Wird also von einer

solchen Function z. B. gesagt, sie sei überall stetig, so ist dadurch schon mitausgedrückt, dass sie für $\sigma = 0$ und für $\sigma = \Sigma$ ein und denselben Werth hat.

Ausser solchen periodischen Functionen, zu denen z. B. ξ, η, α, β, A, B, *R gehören* [vgl. die Formeln (*B.*), (*C.*), (*D.*), (*E.*)], *werden aber auch nichtperiodische Functionen in Betracht kommen, wie z. B.* θ.

Erste Bemerkung (zu II.). — Ich nenne eine Function $F(x)$ in einem gegebenen Intervall $a \dots b$ *abtheilungsweise stetig*, sobald dieses Intervall in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass die Function $F(x)$ längs jeder einzelnen Strecke stetig bleibt.

Ist also, was den hier vorliegenden Fall betrifft, θ eine *abtheilungsweise stetige* Function der Bogenlänge σ, so wird die gegebene Curve eine *endliche* Anzahl von *Ecken* besitzen. Mit anderen Worten: Es wird alsdann die Curve ein *Polygon* sein; und θ wird *unstetig* sein in den Ecken dieses Polygons, hingegen *stetig* sein längs jeder einzelnen Seite des Polygons.

Zweite Bemerkung (zu IV.). — Für einen Kreis oder für eine Ellipse ist die Zahl $N = 2$. Für die Peripherie eines Quadrates ist sie aber ebenfalls $= 2$. Denn giebt man z. B. der geraden Linie (welche selbstverständlich nach beiden Seiten ins Unendliche laufen soll) eine solche Lage, dass zwei aufeinanderfolgende Ecken p, q des Quadrates in die Linie hineinfallen, so werden offenbar auf dieser Linie durch die Peripherie des Quadrates im Ganzen nur *zwei* bestimmte Punkte markirt, nämlich nur die Punkte p und q selber. Und giebt man jener Linie irgend welche andere Lage, so wird die Anzahl der auf ihr durch die Peripherie des Quadrates markirten Punkte je nach Umständen bald $= 0$, bald $= 1$, bald $= 2$, niemals aber > 2 sein.

Plan der Untersuchung.

Das eigentliche Ziel, dem die vorliegenden Untersuchungen zustreben — von einer wirklichen Erreichung desselben kann selbstverständlich nicht die Rede sein — besteht in der genaueren Untersuchung gewisser Ableitungen oder Differentialquotienten, nämlich in der Absolvirung zweier Aufgaben, von denen die *eine* folgendermassen lautet:

Es sei $\Psi = \Psi(x, y)$ eine Function, welche *in Erstreckung* des Gebietes $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig, welche ferner *innerhalb* $\mathfrak{J}$, sammt ihren ersten und zweiten Ableitungen, stetig und der Gleichung $\Delta\Psi = 0$ entsprechend ist, und welche endlich *am Rande* von $\mathfrak{J}$



vorgeschriebene Werthe f besitzt. Es soll das Verhalten der Ableitungen $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ *in unmittelbarer Nähe des Randes* genauer untersucht werden.

Die *zweite* der in Rede stehenden Aufgaben bezieht sich in analoger Weise auf das Gebiet $\mathfrak{A}$. Und bei beiden Aufgaben mögen die vorgeschriebenen Randwerthe dargestellt gedacht sein durch *ein und dieselbe* Function der Bogenlänge: $f = f(\sigma)$.

Bedienen wir uns des Wortes: Fundamentalfunction in dem früher (Abh. I, pag. 16 und 21) festgesetzten Sinne*), so können wir diese beiden einander parallel stehenden Aufgaben folgendermassen zusammenfassen:

Es sei $\begin{Bmatrix} \Phi = \Phi(x, y) \\ \Psi = \Psi(x, y) \end{Bmatrix}$ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\begin{Bmatrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{J} \end{Bmatrix}$, *welche am Rande***) *dieses Gebietes vorgeschriebene Werthe* $f = f(\sigma)$ *besitzt. Es soll die Beschaffenheit der Ableitungen*

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{1.}$$

in unmittelbarer Nähe des Randes einer genaueren Untersuchung unterworfen werden. Namentlich sollen, was den Charakter der gegebenen Randcurve, und den Charakter der vorgeschriebenen Randwerthe $f = f(\sigma)$ *betrifft, möglichst allgemeine Fälle angegeben werden, in denen jene Ableitungen* (1.) *bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren.*

Bei der Inangriffnahme dieser Aufgaben werde ich als Basis meiner Untersuchung diejenigen *analytischen Ausdrücke* benutzen, welche für die Functionen Φ und Ψ — wenigstens unter gewissen Voraussetzungen — durch die Methode des arithmetischen Mittels sich ergeben. Diese analytischen Ausdrücke besitzen [vergl. Abh. I, pag. 79 (*R.*) und pag. 28 (2.)] die Gestalt:

---

*) C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung, 1887; im XIII. Bande der Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.

**) Der Rand von $\mathfrak{A}$ ist identisch mit dem von $\mathfrak{J}$; vgl. pag. 3 und 4.

(2.)
$$\Phi = \Phi(x\,,\; y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,\xi\,d\sigma\,,$$
$$\Psi = \Psi(x\,,\; y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,\eta\,d\sigma\,,$$

oder, was dasselbe ist, folgende Gestalt:

(2a.)
$$\Phi = \Phi(x\,,\; y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_{(x,\,y)}\,,$$
$$\Psi = \Psi(x\,,\; y) = (\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_{(x,\,y)}\,,$$

die Integrationen hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Randcurve. Dabei soll ν die innere Normale des Elements $d\sigma$, und $T = \log \frac{1}{E}$ sein, wo E den Abstand des Elements $d\sigma$ vom Punkte (x, y) vorstellt. Ferner bezeichnen ξ und η (nicht zu verwechseln mit den Coordinaten) gewisse längs des Randes sich hinerstreckende Functionen der Bogenlänge σ, und zwar Functionen, *deren Beschaffenheit in bestimmter Weise von den jedesmal vorgeschriebenen Randwerthen f abhängt* *). Was endlich die Formeln (2a.) betrifft, so bezeichnet $(d\sigma)_{(x,\,y)}$ die mit dem Factor ± 1 multiplicirte scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ für einen in (x, y) befindlichen Beobachter; und zwar ist jener Factor $= +1$ oder $= -1$, je nachdem dieser Beobachter die *innere* oder die *äussere* Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Die Beschaffenheit der Functionen Φ, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, etc. hängt, zufolge (2.), in erster Linie von ξ ab, während ξ seinerseits, wie soeben betont wurde, von f abhängt. Analoges ist über die Functionen Ψ, $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, etc. zu bemerken. Dieselben hängen in erster Linie von η ab, während η seinerseits von f abhängt. Und demgemäss werden wir also diese Abhängigkeitsketten

(3.)
$$\begin{cases} \quad\;\; \Phi \text{ ——— } \xi \text{ ——— } f \\ \text{und } \Psi \text{ ——— } \eta \text{ ——— } f \end{cases}$$

genauer zu untersuchen haben.

---

*) Die Buchstaben ξ, η werden in der ganzen Abhandlung in *zweierlei* Bedeutungen benutzt werden. Bald nämlich werden sie dienen zur Bezeichnung der soeben genannten von f abhängenden Functionen, bald aber auch (wie z. B. auf pag. 3) zur Bezeichnung der Coordinaten der einzelnen Curvenpunkte.

Dabei wollen wir, um die Schwierigkeiten *einzeln* zu überwinden, zuvörderst (im ersten Capitel) nur die *vorderen* Glieder dieser Ketten, d. i. die Beziehung zwischen Φ und ξ, respective zwischen Ψ und η in Betracht ziehen, um sodann erst später (im zweiten Capitel) die *ganzen* Ketten ins Auge zu fassen.

Erstes Capitel (§§ 1—10). — Benutzen wir $\mathfrak{T}$, W, λ als Collectivbezeichnungen für $\mathfrak{A}$, Φ — (Const.), ξ und $\mathfrak{J}$, Ψ — (Const.), η, so wird unsere Aufgabe in diesem ersten Capitel, zufolge der soeben getroffenen Disposition, in der genaueren Untersuchung derjenigen Beziehung bestehen, welche durch die Formel

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\,\lambda\, d\sigma \tag{4.}$$

zwischen W und λ hervorgebracht wird. Hierbei erscheint es zweckmässig, *neben* dieser Formel (4.) zugleich auch folgende einfachere Formel in Betracht zu ziehen*):

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T\lambda\, d\sigma\,. \tag{5.}$$

Offenbar repräsentirt dieses V das Potential einer materiellen Belegung der Randcurve von der *Dichtigkeit* $\frac{\lambda}{\pi}$, ebenso wie W zu bezeichnen ist als das Potential einer materiellen *Doppel*-Belegung vom *Moment* $\frac{\lambda}{\pi}$.

Auf Grund der Formeln (4.), (5.) wird sich nun ergeben, dass jedwede Ableitung von V oder W — mag sie nun erster oder höherer Ordnung sein — im Allgemeinen immer darstellbar ist als die Summe zweier neuer Potentiale, von denen eines zur Gattung der V, das andere zur Gattung der W gehört. Mittelst dieses allgemeinen Satzes aber, durch welchen die Untersuchung der *Ableitungen* der Potentiale V und W auf die Untersuchung dieser Potentiale *selber* sich reducirt, werden wir zu dem Resultate gelangen, dass die Ableitungen

*) In der Abhandlung selber findet man f statt λ gesetzt. Hier in der Einleitung aber habe ich eine derartige Anwendung des Buchstabens f absichtlich vermieden, um einer Verwechselung mit den von Hause aus vorgeschriebenen Randwerthen f vorzubeugen.

$$\frac{\partial W}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial W}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, und dass diese beiden Ableitungen, die soeben genannten Convergenzwerthe miteingerechnet, zwei *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{T}$ repräsentiren, — vorausgesetzt dass λ, $\frac{d\lambda}{d\sigma}$ und $\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}$, sowie auch die Beschaffenheit der Randcurve, gewissen Voraussetzungen entsprechen, auf welche hier näher eingehen zu wollen zu weit führen würde.

Es werden also, falls man das soeben über $\mathfrak{T}$, W, λ Gesagte auf $\mathfrak{A}$, Φ, ξ und $\mathfrak{J}$, Ψ, η überträgt, die vier Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{6.}$$

am Rande gegen bestimmte endliche Werthe convergiren und, diese Convergenzwerthe miteingerechnet gedacht, vier theils zu $\mathfrak{A}$ theils zu $\mathfrak{J}$ gehörige *Fundamentalfunctionen* repräsentiren, — vorausgesetzt dass ξ, $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$ und η, $\frac{d\eta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$, sowie auch die Beschaffenheit der Randcurve, gewissen noch näher anzugebenden Voraussetzungen entsprechen.

Zweites Capitel. (§§ 11—15.) — Was nun ferner die *hintern* Glieder der Ketten (3.), d. i. die Beziehung zwischen ξ und f, respective zwischen η und f betrifft, so sind ξ und η durch unendliche Reihen darstellbar, deren einzelne Glieder von f abhängen. [Vgl. Abh. I, pag. 79 (Q.) und pag. 115 (Q'.)]. Mehr geeignet aber als diese Reihen selber erscheinen zur Untersuchung der genannten Beziehungen gewisse auf Grund dieser Reihen für ξ und η sich ergebende *Functionalgleichungen*. Diese letztern lauten, falls man unter s jeden beliebigen Punct der Randcurve versteht, folgendermassen:

$$\begin{aligned} \xi_s + f_s &= +(\text{Const.}) + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_s\,, \\ \eta_s - f_s &= -(\text{Const.}) - \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_s\,, \end{aligned} \tag{7.}$$

wo ξ_s, η_s, f_s die Werthe von ξ, η, f im Punkte s vorstellen, während $(d\sigma)_s$ denjenigen Werth bezeichnet, welchen $(d\sigma)_{(x,y)}$ an-



nimmt, sobald man statt des Punktes (x, y) den Punkt s eintreten lässt. Auf Grund dieser Functionalgleichungen (7.) wird sich nun ergeben, dass die Beschaffenheit der Functionen

$$(8.)\qquad \xi,\ \frac{d\xi}{d\sigma},\ \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \text{ und } \eta,\ \frac{d\eta}{d\sigma},\ \frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$$

wesentlich abhängt von der Beschaffenheit der Functionen f, $\frac{df}{d\sigma}$, $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$, sowie auch von der Beschaffenheit der Randcurve.

Schliesslich werden wir sodann durch Zusammenfassung der in (6.) und (8.) angedeuteten Sätze zu folgendem Theorem gelangen [man findet dasselbe am Schluss des § 13 dieser Abh.]:

Theorem. — *Wird in Betreff der gegebenen Curve und in Betreff der vorgeschriebenen Function f vorausgesetzt dass θ, $\frac{d\theta}{d\sigma}$, $\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}$ und f, $\frac{df}{d\sigma}$ stetige Functionen von σ sind, dass ferner $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$ eine abtheilungsweise stetige Function von σ ist, und dass überdies $\frac{d\theta}{d\sigma}$ überall > 0 ist*), so werden die Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ bei einer Annäherung an den Rand gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, und, diese Convergenzwerthe mit eingerechnet gedacht, zwei Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ repräsentiren.*

Oder ein wenig anders ausgedrückt: Es werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Φ, Φ_1, Φ_2 des Gebietes $\mathfrak{A}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass Φ die vorgeschriebenen Randwerthe f besitzt, und dass überdies für jedweden Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag, die Relationen stattfinden $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Phi_1$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Phi_2$.

Desgleichen werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass Ψ die vorgeschriebenen Randwerthe f besitzt, und dass überdies für jedweden Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag, die Relationen stattfinden: $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi_1$ und $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \Psi_2$.

Aus diesem Theorem, welches übrigens, wenn auch weniger

*) θ soll die auf pag. 3 angegebene Bedeutung besitzen.

scharf, schon vor langer Zeit*) von mir ausgesprochen worden ist, ergiebt sich z. B., dass der nach der *innern* Normale ν genommene Differentialquotient $\frac{d\Psi}{d\nu}$ bei einer Annäherung an den Rand, und ebenso auch bei einer Bewegung *längs* des Randes *stetig* bleibt, immer vorausgesetzt, dass die im Theorem genannten Bedingungen erfüllt sind. Analoges ergiebt sich für $\frac{d\Phi}{d\mathsf{N}}$, wo N die *äussere* Normale vorstellen soll.

Das dritte Capitel (§§ **16—22**) bezieht sich speciell auf die *Green'sche Function* und auf die *Theorie der conformen Abbildung*. Sind

$$\theta\,,\ \frac{d\theta}{d\sigma}\,,\ \frac{d^2\theta}{d\sigma^2}\ \textit{stetige}\text{ Functionen der Bogenlänge }\sigma\,, \tag{10.}$$

ist ferner

$$\frac{d\theta}{d\sigma}\ \text{überall} \geqq 0\,, \tag{11.}$$

und ist überdies irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt (a, b) gegeben, so werden zufolge des soeben ausgesprochenen Theorems drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, von solcher Beschaffenheit, dass erstens für jeden *Randpunkt* $U = \log\frac{1}{r}$ ist, wo r den Abstand dieses Punktes vom festen Punkte (a, b) vorstellt, und dass zweitens für jedweden Punkt *innerhalb* $\mathfrak{J}$ (wie nahe derselbe dem Rande auch liegen mag) die Relationen stattfinden

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \quad\text{und}\quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2\,.$$

Die Function U heisst alsdann die dem Punkte (a, b) entsprechende *Green'sche Function*, und der Punkt (a, b) der *Centralpunkt* dieser Function.

Setzt man jetzt:

$$\Omega = \left(\log\frac{1}{r}\right) - U = -\,(U + \log r)\,, \tag{12.}$$

wo U den Werth der Function U in einem beliebigen Punkte (x, y), andererseits r den Abstand dieses Punktes (x, y) vom festen Punkte

*) In den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. von 1878, pag. 50 und 52. Vgl. auch die Math. Annal. Bd. 16, pag. 428.



(a, b) vorstellen soll, so wird Ω eine Function von (x, y) sein, welche *am Rande* von $\mathfrak{J}$ durchweg verschwindet, welche ferner *innerhalb* $\mathfrak{J}$ überall > 0, und speciell im Punkte (a, b) positiv unendlich ist.

Hieraus ergiebt sich, dass der nach der innern Normale ν genommene Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ längs des Randes durchweg *positiv* ist. Auch lässt sich ohne grosse Mühe nachweisen, dass derselbe niemals in *sämmtlichen* Punkten eines Randelementes verschwinden kann, wie klein das Element auch sein möge. Ob aber dieser Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ nicht vielleicht in *einzelnen* Punkten des Randes verschwinden könne, — diese Frage scheint bisher noch niemals in Angriff genommen, und überhaupt mit grossen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Das Resultat, zu dem ich in dieser Beziehung — allerdings auf sehr verwickeltem und mühsamem Wege — gelangen werde, lautet folgendermassen:

Sind die Voraussetzungen (10), (11.) *erfüllt, so wird der Differentialquotient* $\frac{d\Omega}{d\nu}$ *am Rande überall* e x i s t i r e n, *längs des Randes überall* s t e t i g *sein, und zugleich auch längs des Randes überall*

$$\frac{d\Omega}{d\nu} > k \tag{13.}$$

sein, wo k *eine positive und von* 0 *verschiedene Constante vorstellt.*

Um diese Constante k wirklich angeben zu können, bezeichne man den kleinsten Krümmungsradius der gegebenen Randcurve mit R_0, ferner den kleinsten Abstand des gegebenen Punktes (a, b) vom Rande mit $2P_0$, und verstehe sodann unter A irgend eine Constante die > 0, die überdies $< R_0$ und zugleich auch $< P_0$ ist. Sodann lasse man auf der innern Seite der Randcurve einen Kreis vom Radius A fortrollen, und denke sich diesen Kreis in jedem Augenblicke der genannten Bewegung in zwei Halbkreise zerlegt mittelst eines Durchmessers, welcher senkrecht steht zu dem nach dem augenblicklichen Berührungspunkte hinlaufendem Radius. Der dem Berührungspunkte *abgewendete* Halbkreis wird alsdann während jener rollenden Bewegung eine gewisse *ringförmige Fläche* überstreichen, die vom Rande des Gebietes $\mathfrak{J}$ überall durch einen gewissen Zwischenraum getrennt ist. Bezeichnet nun Ω_0 den kleinsten Werth von Ω in Erstreckung dieser ringförmigen Fläche, so hat jene Constante k den Werth:

(14.) $$k = \frac{\Omega_0}{33A}.$$

Solches absolvirt, gehen wir über zur *Aufgabe der conformen Abbildung des Gebietes $\mathfrak{J}$ auf einer Kreisfläche.* Es sei (x_0, y_0) irgend ein fester Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, und

(15.) $$V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx),$$

wo U_1 und U_2 die schon vorhin genannten Fundamentalfunctionen sein sollen, und die Integrationscurve auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt sein soll. Ferner sei:

(16.) $$z = x + iy, \quad c = a + ib, \quad W = U + iV,$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

Endlich mag unter $F(z)$ folgende Function verstanden sein:

(17.) $$F(z) = (z - c)e^W.$$

Bildet man nun das in der z-Ebene gelegene Gebiet $\mathfrak{J}$ mittelst der Formel

(18.) $$w = F(z)$$

auf der w-Ebene ab, so wird das Resultat dieser Abbildung eine Kreisfläche $\mathfrak{K}$ sein, deren Radius $= 1$ ist, und deren Mittelpunkt $w = 0$ in Correspondenz steht zu dem gegebenen Punkte $z = c$.

Das sind bekannte und einfache Sachen. Will man nun aber beweisen, dass diese Abbildung *wirklich conform* ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$, dass sie also in *jedwedem* Punkte z des Gebietes $\mathfrak{J}$, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegen, eine in den kleinsten Theilen ähnliche ist, so wird man, was z. B. den Differentialquotienten $\frac{dF(z)}{dz}$ betrifft, zu zeigen haben, dass dieser Differentialquotient überall *existirt*, sowohl in jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{J}$ wie auch in jedem Randpunkte von $\mathfrak{J}$, ferner zu zeigen haben, dass die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten in jedem solchen Punkte eine von allen Seiten her *äquiconvergente* ist, und endlich zu zeigen haben, dass der Werth dieses Differentialquotienten in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ (also z. B. auch am Rande) *verschieden von* 0 ist.

Ich werde nun diese Nachweise für den Fall, dass die Voraus-

setzungen (10.), (11.) *erfüllt sind, wirklich führen, wobei mir der in* (13.) *angegebene Satz wesentlich zur Stütze dient.*

Vorläufige Mittheilungen über die *Resultate* der gegenwärtigen Abhandlung sind von mir bereits erfolgt in den Sitzungsberichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. im Juni 1878 und im Mai 1888, ferner im Jahre 1880 im 16. Bande der Mathem. Annalen; wobei erwähnt sein mag, dass am letztern Orte nicht nur Sätze über das Logarithmische Potential, sondern auch die analogen Sätze über das *Newton'sche Potential im Raume* angegeben sind.

Zur besonderen Genugthuung gereicht mir das Interesse, welches Herr Beltrami für diese letzern Sätze dadurch an den Tag gelegt hat, dass er kurze Zeit nach ihrer Publication nicht nur einen *Beweis*, sondern gleichzeitig auch eine *Verallgemeinerung* derselben mittheilte. In der That hat Beltrami im Jahre 1880 im 10. Bande der *Annali di Matematica* in seinem Aufsatz: *Intorno ad alcuni nuovi Teoremi del Sig. Neumann sulle Funzioni potenziali* jene von mir für *geschlossene* Flächen aufgestellten Sätze nicht nur bewiesen, sondern auch auf den Fall *ungeschlossener* Flächen ausgedehnt.

Methoden und Resultate.

Wie wohl in allen Gebieten der Mathematik, so dürften auch hier die *Methoden* bei Weitem wichtiger sein als die augenblicklichen *Resultate*. Die Methoden aber pflegen einfacher und klarer hervorzutreten durch Beschränkung auf mehr oder weniger specielle Fälle. Demgemäss ist mein Bestreben in der vorliegenden Abhandlung vor Allem dahin gerichtet gewesen, die *Methoden* der Untersuchung in helles Licht zu stellen, — selbst auf Kosten der Allgemeinheit der zu erlangenden *Resultate*.

Aus dieser Tendenz erklärt sich die *sehr mangelhafte Ausnutzung* der von mir dargelegten Methoden. So z. B. werden wir fast stets nur Curven betrachten, die *frei* von Ecken sind, trotzdem, dass die exponirten Methoden die Durchführung der Untersuchungen meistentheils auch dann noch gestatten würden, wenn Ecken *vorhanden* sind. Ueberhaupt würde es mittelst der exponirten Methoden möglich gewesen sein, fast alle Resultate der vorliegenden Abhandlung in sehr viel grösserer Allgemeinheit zu erhalten; wie denn z. B. auch die im Jahre 1880, ohne Beweis, von mir publicirten Sätze (Math. Annal., Bd. 16) über die *hier* mitzutheilenden Sätze vielfach hinausgreifen.

Ebenso erklärt sich aus jener Tendenz der Umstand, dass in der vorliegenden Abhandlung nirgends der Versuch gemacht ist, die Voraussetzungen auf ihr geringstes Maass zu reduciren. So z. B. ist häufig der Begriff der *abtheilungsweisen Stetigkeit* angewendet, wo schon der blosse Begriff der *Integrirbarkeit* ausreichend gewesen wäre. Auch ist zuweilen kurzweg die Stetigkeit der zweiten Ableitungen vorausgesetzt, wo schon die Stetigkeit der *beiden* Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ein ausreichendes Fundament geliefert hätte.

Um eine wirklich genaue, und dabei nicht allzuschleppende Ausdrucksweise zu ermöglichen, habe ich mich genöthigt gesehen, einerseits den Begriff der *Fundamentalfunctionen* einzuführen (Abh. I, pag. 16 und 21), und andererseits auch dem Worte *Convergenzwerth* eine gewisse eigenthümliche Bedeutung beizulegen (vgl. in der vorliegenden Abhandlung die zu Anfang des § 2 gegebenen Definitionen pag. 22, 23).

Die *wirkliche Ausnutzung* der dargelegten Methoden und die Aufstellung eines abgerundeten und vollständigen Systems von Sätzen dürfte allerdings eine sich von selber aufdrängende Aufgabe sein. Aber man kann eben nicht Alles auf einmal erreichen. Vorläufig sollen hier nur die von mir entdeckten *Methoden* dargelegt werden. Später dürften wohl alsdann zu diesen Methoden noch andere nicht minder wichtige Methoden sich gesellen. Auch dürfte im Laufe der Zeit die *Ausdrucksweise* sich etwas mehr abschleifen, und dem behandelten Gegenstande sich besser accommodiren. Und dann erst dürfte es vielleicht angemessen sein, an die Construction eines nach allen Seiten hin möglichst vollständigen Systems zu denken.

Erstes Capitel.

Ueber die Potentiale V und W, namentlich über die Differentialquotienten derselben.

Die Hauptpunkte dieses Capitels bestehen in zwei Theoremen $V\alpha.$ und $W\alpha.$, welche die Potentiale selber betreffen, ferner in zwei Theoremen $V\beta.$ und $W\beta.$, welche die *ersten Differentialquotienten* derselben betreffen, endlich in zwei Theoremen $V\gamma.$ und $W\gamma.$, welche auf die *zweiten Differentialquotienten* der Potentiale Bezug haben. Eine übersichtliche Zusammenstellung all' dieser und noch höherer Theoreme findet man in § 9.

Uebrigens sind für die weiter folgenden Capitel dieser Abhandlung nur die vier ersten Theoreme (§§ 1—6) erforderlich. Die Aufstellung dieser vier Theoreme lässt aber eine gewisse Gesetzmässigkeit zu Tage treten, die von selber zu den Theoremen $V\gamma.$ und $W\gamma.$ (§ 7 und § 8), sowie auch zu noch höheren Theoremen (§ 9) hindrängt. Schliesslich ist (in § 10) eine ganz beiläufige Betrachtung hinzugefügt über *monogene* Functionen von der Form $V + iW$.

§ 1.

Ueber das Potential V. Theorem $V\alpha$.

Längs der gegebenen geschlossenen Curve sei irgend eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben. Denkt man sich nun irgendwo in der Ebene einen Punkt (x, y) markirt, und die Abstände dieses Punktes von den einzelnen Elementen $d\sigma$ der Curve mit E bezeichnet, so repräsentirt der Ausdruck*)

*) Gelegentlich dieser Formel (1.) sei noch bemerkt, dass die unter dem Integralzeichen befindlichen Bogenelemente $d\sigma$ unter allen Umständen als *positive* Grössen angesehen werden sollen.

(1.) $$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \left(\log \frac{1}{E}\right) f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma\,,$$

in welchen T Abbreviatur ist für $\log \frac{1}{E}$, dasjenige *Potential*, welches auf den Punkt (x, y) ausgeübt wird von einer auf der Curve ausgebreiteten materiellen *Belegung* von der Dichtigkeit $\frac{f}{\pi}$. Für dieses Potential gilt folgender Satz:

Erster Satz. — *Sind*

(2.) *θ und f abtheilungsweis stetige Functionen von σ,*

so wird das Potential

(3.) $$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

eine Function von (x, y) sein, die in der ganzen unendlichen Ebene überall stetig ist.

Beweis. — Dass V für alle von der Curve *getrennten* Punkte stetig ist, übersieht man sofort. Und es wird also der Beweis der Stetigkeit von V nur noch für solche Punkte (x, y) zu führen sein, die *auf* der Curve liegen. Zu diesem Zwecke aber wird es ausreichend sein, dem Punkte (x, y) auf der Curve eine beliebige Lage zu geben, und sodann zu zeigen, dass die diesem Punkte *zunächst* befindlichen Curventheile zu jenem Potential V immer nur einen *verschwindend kleinen* Beitrag liefern. Oder genauer ausgedrückt:

Denkt man sich den Punkt (x, y) irgendwo auf der Curve gelegen, beschreibt man sodann um (x, y), als Centrum, einen kleinen Kreis vom Radius R, und bezeichnet man das innerhalb dieses Kreises befindliche Stück der gegebenen Curve mit γ, so wird es für den genannten Zweck ausreichend sein, zu zeigen, dass der von γ herrührende Theil $V^{(\gamma)}$ des Potentials V durch Verkleinerung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist.

Zufolge unserer Voraussetzung (2.) ist das Azimuth θ eine abtheilungsweise stetige Function der Bogenlänge, die gegebene Curve also als ein Polygon mit einer endlichen Anzahl von Ecken anzusehen [vgl. die erste Bemerkung pag. 5]. Liegt nun, um die Vorstellung zu fixiren, der Punkt (x, y) in einer *Ecke* des Polygons, und sind a und b die beiden in dieser Ecke zusammenstossenden *Seiten* des Polygons, so wird θ stetig sein längs a, und ebenso auch

längs b. Demgemäss wird man, von jener Ecke (x, y) aus, auf a und b zwei Strecken α und β abschneiden können, die so klein sind, dass θ längs α beliebig wenig, z. B. um weniger als 60° variirt, dass mithin alle Elemente $d\alpha$ dieser Strecke α gegen die in (x, y) an α gelegte Tangente A Winkel bilden, die $< 60°$ sind, und dass andererseits Analoges auch stattfindet für die Elemente $d\beta$ der Strecke β mit Bezug auf die in (x, y) an β gelegte Tangente B. Solches festgesetzt, ist also der Winkel $(d\alpha, A)$ stets $< 60°$, mithin $\cos(d\alpha, A) > \cos(60°) = \frac{1}{2}$, folglich:

$$(g.) \qquad \frac{1}{\cos(d\alpha, A)} < 2\,, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{1}{\cos(d\beta, B)} < 2\,,$$

vorausgesetzt, dass man unter den hier genannten Winkeln stets die *spitzen* Winkel versteht.

Diese beiden Strecken α und β wollen wir jetzt noch weiter sich verkleinern lassen. Zu diesem Zwecke beschreiben wir um (x, y), als Centrum, einen Kreis mit einem Radius

$$(h.) \qquad R < 1\,,$$

der so klein sein soll, dass der Kreis die beiden Strecken α und β schneidet, und lassen sodann α und β auf diejenigen Stücke sich zusammenziehen, welche innerhalb dieses Kreises liegen.

Für den von α herrührenden Theil des Potentials V:

$$V^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi}\int\left(\log\frac{1}{E}\right) f d\alpha$$

ergiebt sich alsdann die Formel:

$$\text{abs } V^{(\alpha)} \leqq \frac{1}{\pi}\int\left(\log\frac{1}{E}\right)(\text{abs } f)\, d\alpha\,;$$

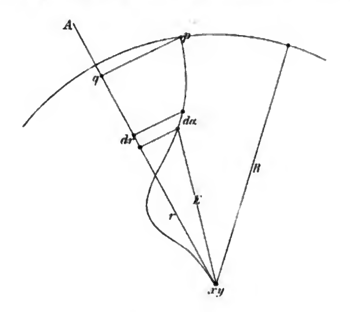
denn es ist zu beachten, dass die $d\alpha$ alle *positiv* zu denken sind [vgl. die Note pag. 16], und ferner zu beachten, dass die $d\alpha$ alle innerhalb des Kreises (R) liegen, dass mithin die zugehörigen E durchweg $\leqq R$, also, nach $(h.)$, durchweg < 1, und dass daher die hier in Betracht kommenden $\log\frac{1}{E}$ durchweg *positiv* sind.

Die Function f ist, nach der Voraussetzung (2.), längs der gegebenen Curve abtheilungsweise stetig, mithin durchweg *endlich*. Bezeichnet man nun ihren absolut grössten Werth mit M, so folgt aus der letzten Formel sofort:



(*j.*) $$\text{abs}\, V^{(\alpha)} \leqq \frac{M}{\pi} \int \left(\log \frac{1}{E}\right) d\alpha \ .$$

Projicirt man jetzt [vgl. die Figur] die Linien E und $d\alpha$ senkrecht auf die in (x, y) an α gelegte Tangente A, und bezeichnet



man diese Projectionen mit r und dr, so ist einerseits

$$d\alpha = \frac{dr}{\cos(d\alpha, A)} \ ,$$

mithin nach (*g.*):

$$d\alpha < 2dr \ ,$$

und andererseits $E > r$, mithin:

$$\log \frac{1}{E} \leqq \log \frac{1}{r} \ ;$$

so dass die Formel (*j.*) übergeht in:

(*k.*) $$\text{abs}\, V^{(\alpha)} < \frac{2M}{\pi} \int_0^{\varrho} \left(\log \frac{1}{r}\right) dr \ .$$

Hier bezieht sich ϱ auf den *Endpunkt* p der Curvenstrecke α. Denkt man sich nämlich von p aus ein Perpendikel pq herabgelassen auf die Tangente A, so bezeichnet ϱ den Abstand des so erhaltenen Fusspunktes q vom Punkte (x, y).

Offenbar wird die rechte Seite der Formel (*k.*) noch weiter vergrössert werden, falls man daselbst die Integration nicht bis $r = \varrho$, sondern bis $r = R$ ausdehnt; so dass man also *a fortiori* erhält:



$$\text{abs}\, V^{(\alpha)} < \frac{2M}{\pi} \int_0^R \left(\log \frac{1}{r}\right) dr\,, \tag{l.}$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{abs}\, V^{(\alpha)} < \frac{2MR}{\pi} \left(1 + \log \frac{1}{R}\right)\,. \tag{m.}$$

Hieraus aber folgt sofort, dass das abs $V^{(\alpha)}$ durch Verkleinerung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist. Analoges gilt offenbar auch von $V^{(\beta)}$, und, wenn man beide Strecken α und β zusammengenommen mit γ bezeichnet, auch von

$$V^{(\gamma)} = V^{(\alpha)} + V^{(\beta)}\,. \qquad Q.\ e.\ d. \tag{n.}$$

Dass man endlich zu genau demselben Resultate auch dann gelangt, wenn der Punkt (x, y) nicht in einer Ecke, sondern irgendwo anders auf der gegebenen Curve liegt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Wenn wir nun aber auch den vorstehenden Satz wirklich bewiesen haben, also eingesehen haben, dass V in der Ebene *allenthalben stetig* ist, so bleibt doch noch fraglich, ob dieses V nicht vielleicht beim Fortgang zu unendlich fernen Punkten ins Unendliche anwachsen kann. Diese Frage findet ihre Beantwortung durch folgenden Satz:

Zweiter Satz. — *Fügt man zu den schon gemachten Voraussetzungen* (2.) *noch die hinzu, dass das über die gegebene Curve σ erstreckte Integral*

$$\int f d\sigma = 0 \tag{4.}$$

sein soll, so wird V in den unendlich fernen Punkten der Ebene nicht nur endlich, sondern sogar $= 0$ sein.

Oder genauer ausgedrückt: Denkt man sich irgend eine die Curve σ umschliessende Kreisperipherie s vom Radius r construirt, so werden, falls die Voraussetzungen (2.) *und* (4.) *erfüllt sind, alle Werthe, welche V ausserhalb dieser Peripherie s besitzt, ihrem absoluten Betrage nach, durch Vergrösserung von r unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.*

Und gleichzeitig werden alsdann für jeden solchen die Curve σ umschliessenden Kreis s, mag nun sein Radius r gross oder klein sein, die Formeln stattfinden:

$$\int V ds = 0 \quad \text{und} \quad \int \frac{dV}{dr} ds = 0\,, \tag{5.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der Peripherie s.

Beweis. — Es sei C das Centrum der Peripherie s. Markirt man nun auf der Peripherie s irgend einen Punkt (x, y), und auf der gegebenen Curve σ irgend einen Punkt (ξ, η), und bezeichnet die dem Centrum C entsprechenden Polarcoordinaten dieser Punkte respective mit (r, o) und (ϱ, ω), so dass also r den Radius von s vorstellt, — so erhält man für den gegenseitigen Abstand E dieser beiden Punkte die Entwicklung:

$$\log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n(\omega - o)\,.$$

Bildet man jetzt, unter Anwendung dieser Entwicklung, das Potential

$$V = \frac{1}{\pi}\int\left(\log\frac{1}{E}\right) f\,d\sigma$$

für jenen auf s markirten Punkt (x, y) oder (r, o), so ergiebt sich:

$$V = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{1}{r}\right)\int f\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n(\omega - o)\right] f\,d\sigma\,,$$

also mit Rücksicht auf (4.):

$$(G.)\qquad V = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A^{(n)}\frac{\cos no}{r^n} + B^{(n)}\frac{\sin no}{r^n}\right)\,,$$

wo alsdann unter den $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ folgende *Constanten* [d. i. von (x, y) oder (r, o) unabhängige Grössen] zu verstehen sind:

$$(H.)\qquad \begin{aligned} A^{(n)} &= \frac{1}{n\pi}\int\varrho^n\,(\cos n\omega)\,f\,d\sigma\,,\\ B^{(n)} &= \frac{1}{n\pi}\int\varrho^n\,(\sin n\omega)\,f\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

Auf Grund der Formel $(G.)$ erkennt man aber nun sofort die Richtigkeit der in unserm Satze ausgesprochenen Behauptungen.

Zusammenfassung der erhaltenen Resultate. — Bezeichnet man die gegebene Curve schlechtweg mit σ, und jedweden Punkt (x, y), jenachdem er *innerhalb* $\mathfrak{J}$, oder *auf* σ, oder *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, respective mit j oder s oder a, und erinnert man sich endlich an die Art und Weise, in welcher früher (Abh. I, pag. 16 und 21) die *Fundamentalfunctionen* der Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ definirt worden sind,



so gelangt man auf Grund der soeben bewiesenen beiden Sätze sofort zu folgendem Theorem:

Theorem $V\alpha$. — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve* σ *eine bestimmte Function der Bogenlänge:* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(6.) *θ und f abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so wird das auf den Punkt (x, y) *ausgeübte Potential*

$$V = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma \tag{7.}$$

eine Function von (x, y) *sein, welche in der ganzen unendlichen Ebene allenthalben stetig ist. Gleichzeitig werden alsdann die Werthe* V_j *und* V_s *zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *repräsentiren.*

Fügt man ferner zu den Voraussetzungen (6.) *noch die hinzu, dass*

$$\int f d\sigma = 0 \tag{8.}$$

sein soll, so wird Aehnliches auch von den Werthen V_a, V_s *zu sagen sein. Denn es werden alsdann all' diese Werthe* V_a *und* V_s *zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *repräsentiren.*

§ 2.

Ueber das Potential W. Theorem $W\alpha$.

Ist eine Function $F = F(x, y)$ in der gegebenen Curve *unstetig*, so sind im Allgemeinen *drei* Werthsysteme zu unterscheiden: das System der F_s, das der F_a, und das der F_j. Dabei sind sämmtliche Punkte der gegebenen Curve mit s, andererseits aber alle von der Curve *getrennten* Punkte mit a oder j, und zwar die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen mit a, die zu $\mathfrak{J}$ gehörigen mit j bezeichnet zu denken. Im Anschluss an diese Vorstellungen und Bezeichnungen wollen wir nun, um an Kürze des Ausdruckes zu gewinnen, folgende Definitionen festsetzen:

Definitionen. — *Es sei* s *ein bestimmter Punkt der gegebenen Curve, und* o *ein um* s *(als Centrum) beschriebener kleiner Kreis.*

Lässt sich alsdann zeigen, dass dem Punkte s eine bestimmte endliche Grösse P_s zugehört von solcher Beschaffenheit, dass alle Abweichungen, welche die innerhalb o befindlichen Werthe F_a gegenüber P_s zeigen, durch Verkleinerung von o unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind, so soll jene Grösse P_s der Convergenzwerth der Werthe F_a für den Punkt s genannt, und kurzweg mit F_{as} bezeichnet werden.

Lässt sich ferner nachweisen, dass jenem Punkte s noch eine zweite bestimmte endliche Grösse Q_s adjungirt ist, von solcher Beschaffenheit, dass alle Abweichungen, welche die innerhalb o befindlichen Werthe F_j gegenüber Q_s zeigen, durch Verkleinerung von o unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind, so soll Q_s der Convergenzwerth der Werthe F_j für den Punkt s genannt, und mit F_{js} bezeichnet werden.

Lassen sich die in Rede stehenden Nachweise bewerkstelligen für jedweden Punkt s der gegebenen Curve, so hat man längs dieser Curve im Allgemeinen dreierlei Functionen, die erste bestehend aus den direct auf der Curve selber gegebenen Werthen F_s, die zweite bestehend aus den äussern Convergenzwerthen $P_s = F_{as}$, und die dritte endlich bestehend aus den innern Convergenzwerthen $Q_s = F_{js}$.

Bemerkung. — Man wird diese Definitionen z. B. auch anwenden können auf den besonders einfachen Fall, dass die gegebene Function $F = F(x, y)$ in der ganzen unendlichen Ebene *allenthalben stetig* ist. Alsdann wird offenbar

$$F_s = F_{as} = F_{js}$$

sein. So z. B. wird für das auf pag. 22 besprochene Potential V, falls die dortigen Voraussetzungen (6.) erfüllt sind, die Formel stattfinden $V_s = V_{as} = V_{js}$.

Dies vorangeschickt, mag es mir gestattet sein, an die Untersuchungen meiner ersten Abhandlung kurz zu erinnern. Jene Untersuchungen beruhen, wie dort besonders betont worden ist [Abh. I, pag. 34] auf gewissen aus der *geometrischen Anschauung* herstammenden Elementarsätzen, welche folgendermassen lauten:

Erster Elementarsatz. — *Zerlegt man die gegebene geschlossene Curve in lauter unendlich kleine Elemente, und bezeichnet man die scheinbare Grösse eines solchen Elementes $d\sigma$ für einen im Punkte (x, y) befindlichen Beobachter mit* $\pm (d\sigma)_{(x,y)}$, *und zwar mit* $+ (d\sigma)_{(x,y)}$ *oder*

— $(d\sigma)_{(x,y)}$, *jenachdem jener Beobachter die innere oder äussere Seite des Elementes vor Augen hat, so wird das über die ganze Curve erstreckte Integral* $\int (d\sigma)_{(x,y)}$ *verschiedene Werthe haben, jenachdem der Punkt* (x, y) *zu den Punkten* a, s *oder* j *gehört. Und zwar gelten die Formeln:*

$$\int (d\sigma)_a = 0\,,$$

$$(1.)\qquad \int (d\sigma)_s = \pi(1 - \vartheta_s)\,,$$

$$\int (d\sigma)_j = 2\pi\,,$$

wo $\pi(1 - \vartheta_s)$ *den Innenwinkel der gegebenen Curve im Punkte* s *vorstellt.*

Dabei ist in Betreff des in (1.) enthaltenen Ausdruckes

$$(2.)\qquad \int (d\sigma)_s$$

und zugleich auch in Betreff des allgemeineren Ausdruckes

$$(3.)\qquad \int f(d\sigma)_s$$

stets zu beachten, dass unter diesen Symbolen (2.) und (3.) nicht Integrale, sondern die *Grenzen* gewisser Integrale*) zu verstehen sind. Will man nämlich die eigentlichen Werthe dieser Symbole haben, so hat man zuvörderst die Integrationen auszuführen mit Ausschluss eines kleinen den Punkt s enthaltenden Curvenstückes, sodann aber dieses Curvenstück ins Unendliche sich verkleinern zu lassen. Entspricht nun, was wir stets voraussetzen, die gegebene Curve den festgesetzten Determinationen pag. 4, so wird das Symbol (2.) den in (1.) angegebenen Werth haben. Und ist überdies f längs der Curve *stetig*, oder wenigstens *abtheilungsweise stetig*, so wird das Symbol (3.) ebenfalls einen *bestimmten endlichen* Werth haben; wie solches mittelst des Satzes Abh. I, pag. 42 sich leicht ergiebt.

Zweiter Elementarsatz. — *Setzt man:*

$$(4.)\qquad \int d\sigma = \Sigma\,,$$

*) Hierauf aufmerksam zu machen ist um so wichtiger, weil solches in Abh. I. nicht genügend hervorgehoben ist.

so besitzt das so definirte Σ *einen* ***bestimmten endlichen*** *Werth. Dieser Werth heisst der* ***Umfang*** *der gegebenen Curve.*

Dritter Elementarsatz. — *Setzt man:*

$$(5.)\qquad \int \text{abs}\,(d\sigma)_{(x,\,y)} = \Phi(x, y)\ ,$$

und denkt man sich dabei dieses Integral für den Fall, dass der Punkt (x, y) ***auf*** *der Curve liegt, ebenso wie vorhin das Integral* $\int (d\sigma)_s$, (2.), *berechnet, so wird die in solcher Weise definirte Function* $\Phi(x, y)$ *in der ganzen unendlichen Ebene überall* ***endlich*** *sein, der Art, dass ihr absoluter Werth stets* $<$ M *bleibt, wo* M *eine* ***endliche Constante*** *vorstellt.*

Ob diese aus der geometrischen Anschauung herstammenden Elementarsätze auch noch gültig sind für ganz nebelhaft vorschwebende Curven, z. B. für Curven mit unendlich vielen Ecken, — das dürfte eine müssige Frage sein. Ist man doch bei solch' nebelhaften Curven nicht einmal von der Länge des Curvenelements zu sprechen berechtigt, also nicht einmal befugt zur Anwendung des Zeichens $d\sigma$ und der damit verbundenen Vorstellungen!

Dass hingegen diese Elementarsätze für die vorhin (pag. 4) *determinirten Curven* denselben Grad von Strenge besitzen wie etwa der Pythagoräische Lehrsatz, bedarf keiner weitern Erläuterung. Gleiches gilt daher auch von *sämmtlichen Resultaten meiner ersten Abhandlung.* Denn all' diese Resultate sind aus jenen Elementarsätzen mit absoluter Strenge abgeleitet.

Und wir werden daher hier, wo wir uns durchweg auf jene *determinirten Curven* beschränken, von sämmtlichen Resultaten der ersten Abhandlung Gebrauch machen dürfen, ohne dass dabei irgend welche Restriction erforderlich wäre. Demgemäss werden wir z. B. die dort [Abh. I, pag. 46, 47] über den Ausdruck

$$(6.)\qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\, f\, d\sigma$$

aufgestellten Sätze benutzen dürfen. Dieser Ausdruck, in welchem T, f, $d\sigma$ dieselben Bedeutungen haben, wie in (1.) pag. 17, und in welchem ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale bezeichnet, repräsentirt bekanntlich dasjenige *Potential*, welches auf den Punkt

(x, y) ausgeübt wird von einer auf der Curve ausgebreiteten materiellen *Doppelbelegung* vom *Momente* $\frac{f}{\pi}$. Bringen wir nun jene damals (Abh. I, pag. 46, 47) für dieses Potential W erhaltenen Sätze auf den besonderen Fall in Anwendung, dass die gegebene Curve *keine* Ecken hat, dass mithin θ überall *stetig* ist, so gelangen wir zu folgendem Theorem:

Theorem $W\alpha$. — *Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge: $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(7.) *f und θ stetige Functionen der Bogenlänge σ sind, dass also die Curve z. B. frei von Ecken ist,*

so wird das auf den Punkt (x, y) ausgeübte Potential)*

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_{(x, y)} \tag{8.}$$

eine Function von (x, y) sein, welche in der ganzen unendlichen Ebene, mit alleiniger Ausnahme der gegebenen Curve, überall stetig ist.

Die in der Curve vorhandene Unstetigkeit hat zur Folge, dass im Ganzen dreierlei Werthsysteme zu unterscheiden sind: das System der W_a, das der W_s, und das der W_j.

Für jeden Punkt s besitzen die W_a und W_j bestimmte endliche Convergenzwerthe W_{as} und W_{js} [vgl. die Definitionen pag. 22, 23], *welche zu dem direct in s selber vorhandenem Werthe**) W_s in der Beziehung stehen:*

$$\begin{aligned} W_{as} - W_s &= -f_s\,, \\ W_{js} - W_s &= +f_s\,; \end{aligned} \tag{9.}$$

woraus z. B. folgt:

$$W_{as} - W_{js} = -2f_s\,. \tag{10.}$$

---

*) In dieser Formel (8.) bezeichnet ν die auf dem Curvenelement $d\sigma$ errichtete *innere* Normale. Ueber die Bedeutung von $(d\sigma)_{(x, y)}$ ist Näheres angegeben auf pag. 23, unten.

**) Will man diesen directen Werth W_s mittelst der aus (8.) entspringenden Formel

$$W_s = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_s$$

wirklich berechnen, so ist dabei die bei (3.) gegebene Vorschrift im Auge zu behalten.

Vor Allem ist dabei aber hervorzuheben, dass die Werthe W_a und W_{as} zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ bilden, dass ferner die W_j und W_{js} zusammengenommen eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ bilden, und dass endlich die W_s längs der gegebenen Curve stetig sind.

Bemerkung. — Die Voraussetzungen (7.) haben keinerlei Bezug auf die Ableitungen $\frac{d\theta}{d\sigma}$ und $\frac{df}{d\sigma}$. Demgemäss wird also nicht nur die Beschaffenheit dieser Ableitungen, sondern selbst auch die *Existenz* derselben für die Gültigkeit des vorstehenden Theorems vollkommen gleichgültig sein.

Aehnliches hätte bei dem Theorem *Vα.* pag. 22 bemerkt werden können. Doch werden wir derartige Bemerkungen, die eigentlich doch nur besagen, dass das betreffende Theorem in *correcter* Weise von uns ausgesprochen ist, in Zukunft meistentheils ganz unterdrücken.

Mit Rücksicht auf eine *allgemeinere* Durchführung der Untersuchung (von welcher auf pag. 14 die Rede war) sei bemerkt, dass man das Theorem *Wα.* leicht auf den Fall ausdehnen kann, dass f und θ nicht stetige, sondern nur *abtheilungsweise stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann wird die gegebene Curve in einzelne Strecken zerlegbar sein, der Art, dass f und θ längs jeder *einzelnen* Strecke stetig bleiben. Auch übersieht man sofort, dass das Theorem *Wα.* in diesem allgemeinern Falle Wort für Wort in Gültigkeit bleibt, abgesehen von denjenigen Curvenpunkten g, durch welche jene Zerlegung der Curve markirt ist; so dass also das Verhalten der Function $W = W(x, y)$ nur noch in der Nähe dieser *Ausnahmspunkte* g einer weiteren Untersuchung bedarf. Ohne auf eine solche Untersuchung hier näher einzugehen, will ich nur mittheilen, dass das *Resultat* derselben folgendes ist:

Drei aufeinander folgende Punkte g seien mit g_1, g, g_2 bezeichnet. Ferner seien die Punkte der Curvenstrecke g_1g mit g', die der Strecke gg_2 mit g'', und die zugehörigen Werthe von f respective mit f' und f'' bezeichnet:

$$(11.)\qquad \underbrace{g_1 \cdots g' \cdots g}_{f'}\underbrace{\cdots g'' \cdots g_2}_{f''}$$

Andererseits aber mögen unter a und j (nach wie vor) alle von der Curve *getrennten*, theils zu $\mathfrak{A}$, theils zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkte verstanden sein.

Alsdann wird, falls ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt, um g (als Centrum) stets ein Kreis o von solcher Kleinheit construirbar sein, dass für alle innerhalb o befindlichen Punkte a, j, g', g die Formeln gelten:

$$
(12.)\quad
\begin{aligned}
W_a &= W_g - f_g' \frac{\pi - \Delta_a'}{\pi} - f_g'' \frac{\pi - \Delta_a''}{\pi} + \Theta_1 \varepsilon , \\
W_j &= W_g + f_g' \frac{\pi - \Delta_j'}{\pi} + f_g'' \frac{\pi - \Delta_j''}{\pi} + \Theta_2 \varepsilon , \\
W_{g'} &= W_g + f_g'' \frac{\pi - \gamma}{\pi} + \Theta_3 \varepsilon , \\
W_{g''} &= W_g + f_g' \frac{\pi - \gamma}{\pi} + \Theta_4 \varepsilon ,
\end{aligned}
$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 unbekannte ächte Brüche sind.

Hier repräsentirt W_g den *direct* in g selber vorhandenen Werth *). Ferner bezeichnet γ den Innenwinkel der Curve im Punkte g. Ferner bezeichnen Δ_j' und Δ_j'' die Winkel, unter denen die gerade Linie gj im Punkte g gegen die *innern* Seiten der Curvenstrecken gg_1 und gg_2 geneigt ist; so dass also z. B. die Relation stattfindet: $\Delta_j' + \Delta_j'' = \gamma$. Endlich bezeichnen Δ_a' und Δ_a'' die Winkel, unter denen die gerade Linie ga im Punkte g gegen die *äussern* Seiten der Curvenstrecken gg_1 und gg_2 geneigt ist; so dass also die Relation stattfindet $\Delta_a' + \Delta_a'' = 2\pi - \gamma$.

Bereits in der *ersten* Abhandlung (in der dritten Bemerkung pag. 115) ist von mir hervorgehoben, dass die in jener Abhandlung über den Kreis und die Kugel aufgestellten Sätze *mangelhaft bewiesen*, trotzdem aber *correct* sind. Solches soll hier dargelegt werden.

Beweis des Satzes über den Kreis (Abh. I, pag. 96). — Längs einer Kreislinie vom Radius **) A sei eine *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner sei gesetzt:

$$(\alpha.)\qquad M = \int f d\sigma ,$$

und

$$(\beta.)\qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi} \int f (d\sigma)_{(x, y)} ,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Kreislinie.

*) Es ist also dieser Werth W_g ebenso gebildet zu denken, wie vorhin der Werth W_s, vgl. die zweite Note pag. 26, und namentlich die bei (3.) pag. 24 gegebene Vorschrift.

**) Dieser Radius A ist in Abh. I, pag. 96 nicht mit A, sondern mit ϱ bezeichnet worden.

Zufolge des Theorems $W\alpha$. (pag. 26) repräsentiren alsdann die W_a, W_{as} und die W_j, W_{js} zwei respective zu $\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{J}$ gehörige *Fundamentalfunctionen*. Setzt man also

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= \frac{M}{2\pi A} - W_a \;, \\ \Psi_j &= W_j - \frac{M}{2\pi A} \;, \end{aligned}$$

so gilt Analoges auch von den Φ_a, Φ_{as} und Ψ_j, Ψ_{js}. Um den in Rede stehenden Satz (Abh. I, pag. 96) zu beweisen, wird also nur noch zu zeigen sein, dass die Φ_{as} sowohl, wie auch die Ψ_{js} identisch sind mit den vorgeschriebenen f_s.

Nun ist nach $(\gamma.)$:

$$\Phi_{as} = \frac{M}{2\pi A} - W_{as} \;,$$

$$\Psi_{js} = W_{js} - \frac{M}{2\pi A} \;,$$

also mit Rücksicht auf (9.):

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= \left(\frac{M}{2\pi A} - W_s\right) + f_s \;, \\ \Psi_{js} &= \left(W_s - \frac{M}{2\pi A}\right) + f_s \;. \end{aligned}$$

Was die Berechnung des aus $(\beta.)$ entspringenden Ausdruckes

$$W_s = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_s \;, \quad \text{[vergl. das bei (3.) Gesagte]},$$

anbelangt, so ist:

$$(d\sigma)_s = \frac{1}{2}\,(d\sigma)_c = \frac{1}{2}\,\frac{d\sigma}{A} \;,$$

wo c das Centrum, und A den Radius des Kreises vorstellen. Somit folgt:

$$W_s = \frac{1}{2\pi A}\int f\,d\sigma = \frac{M}{2\pi A} \;. \quad \text{[Vgl. } (\alpha.)\text{]}$$

Demgemäss gewinnen die Formeln $(\delta.)$ die einfache Gestalt:

$$\Phi_{as} = f_s \;,$$
$$\Psi_{js} = f_s \;. \quad - \; Q.\ e.\ d.$$

Beweis des Satzes über die Kugel (Abh. I, pag. 104). — Auf einer Kugelfläche vom Radius A sei eine daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner sei gesetzt:

$$(A.)\qquad M = \int f\,d\sigma \;,$$

und:

$$(B.)\qquad W = W(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_{x, y, z} \;,$$

$$(C.) \qquad \Omega = \Omega(x, y, z) = \frac{1}{4\pi A}\left(\frac{M}{A} - \frac{M}{4\pi A^2}\int\frac{d\sigma}{E} + \int\frac{f d\sigma}{E}\right),$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Kugelfläche. Dabei soll E den Abstand des variablen Punktes (x, y, z) vom Element $d\sigma$ vorstellen; so dass also z. B. das in $(C.)$ enthaltene Glied*)

$$(D.) \qquad \frac{M}{4\pi A^2}\int\frac{d\sigma}{E} = \frac{M}{R} \text{ oder } = \frac{M}{A}$$

ist, je nachdem der Punkt (x, y, z) *ausserhalb* oder *innerhalb* der Kugelfläche liegt, vorausgesetzt dass man unter R den Centralabstand dieses Punktes versteht.

Der Ausdruck W $(B.)$ subordinirt sich dem Theorem Abh. I, pag. 47. Nach diesem Theorem repräsentiren die W_a, W_{as} und die W_j, W_{js} zwei respective zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ gehörige *Fundamentalfunctionen*. Gleiches gilt, wie man leicht erkennt, auch von den Ω_a, Ω_{as} und den Ω_j, Ω_{js}. Setzt man also

$$(E.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= \Omega_a - W_a, \\ \Psi_j &= W_j - \Omega_j, \end{aligned}$$

so gilt Gleiches auch von den Φ_a, Φ_{as} und den Ψ_j, Ψ_{js}. Um den in Rede stehenden Satz (Abh. I, pag. 104) zu beweisen, ist daher nur noch zu zeigen nöthig, dass die Werthe Φ_{as} sowohl, wie auch die Ψ_{js} identisch sind mit den vorgeschriebenen Werthen f_s.

Nun folgt aus $(E.)$

$$(F.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= \Omega_{as} - W_{as}, \\ \Psi_{js} &= W_{js} - \Omega_{js}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen $(F.)$ aber sind mit Rücksicht auf die aus Abh. I. pag. 46 (24.) und (25.) entspringenden Relationen

$$(G.) \qquad \begin{aligned} W_{as} &= W_s - f_s, \\ W_{js} &= W_s + f_s, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die aus $(C.)$, $(D.)$ entspringende Formel:

$$(H.) \qquad \Omega_s = \Omega_{as} = \Omega_{js} = \frac{1}{4\pi A}\int\frac{f d\sigma}{E},$$

auch so darstellbar:

$$(J.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= \Omega_s - (W_s - f_s), \\ \Psi_{js} &= (W_s + f_s) - \Omega_s. \end{aligned}$$

Das hier auftretende W_s hat nach $(B.)$ den Werth:

$$(\alpha.) \qquad W_s = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s,$$

*) Für A und R sind in der Abh. I, pag. 104 respective die Buchstaben ϱ und gebraucht worden.

wobei das früher bei (3.) Gesagte zu beachten ist. Nun ist:

$$(\beta.) \qquad (d\sigma)_s = \frac{\cos\delta \,.\, d\sigma}{E^2} = \frac{d\sigma}{2AE},$$

wo E den Abstand des Punktes s vom Elemente $d\sigma$, also eine gewisse *Sehne* der Kugelfläche vorstellt, während δ den Winkel dieser Sehne E gegen die in $d\sigma$ errichtete innere Normale bezeichnet. Denkt man sich nämlich über der Sehne E, als Grundlinie, ein gleichschenkliges Dreieck construirt, dessen Spitze im Kugelcentrum liegt, so repräsentirt δ den gemeinschaftlichen Werth derjenigen beiden Innenwinkel dieses Dreiecks, welche der Grundlinie E anliegen; so dass also z. B. die Relation stattfindet: $2A \cos\delta = E$. Durch diese Relation aber geht der *zweite* Theil der Formel (β.) in den *dritten* über.

Aus (α.) und (β.) folgt sofort:

$$(\gamma.) \qquad W_s = \frac{1}{4\pi A}\int \frac{f d\sigma}{E},$$

also mit Rückblick auf (H.):

$$(\delta.) \qquad W_s = \Omega_s;$$

so dass also die Formeln (J.) folgende Gestalt gewinnen:

$$(K.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{as} &= f_s, \\ \Psi_{js} &= f_s. \quad \text{— } Q.\ e.\ d. \end{aligned}$$

§ 3.

Die ersten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\beta$.

In der Formel

$$(1.) \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma$$

hat T die Bedeutung:

$$(2.) \qquad T = \log\frac{1}{E} = -\frac{1}{2}\log\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right],$$

wo ξ, η die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ vorstellen. Bei der gegenwärtigen Untersuchung des Potentials V mag nun vorausgesetzt werden, dass

(3.) θ, f *stetige*, und θ', f' *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann sind offenbar*) ξ', η' *stetige*, und ξ'', η'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ.

---

*) Man erkennt nämlich solches mittelst der Formeln (C.) pag. 3: $\xi' = \cos\theta$, $\eta' = \sin\theta$; aus denen sofort folgt $\xi'' = -\theta'\sin\theta$, $\eta'' = \theta'\cos\theta$.

Für einen von der Curve *getrennten* Punkt (x, y) ergeben sich aus (1.) und mit Rücksicht auf (2.) sofort die Formeln:

$$
(4.)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int\frac{\partial T}{\partial x} f d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma\,, \quad (!)\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int\frac{\partial T}{\partial y} f d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial T}{\partial \eta} f d\sigma\,, \quad (!)
\end{aligned}
$$

wo die Ausrufungszeichen andeuten sollen, dass diese Formeln nur so lange gültig sind, als der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt. Auch erkennt man sofort, dass die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ *stetige* Functionen von (x, y) sind, — immer vorausgesetzt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt. Fraglich hingegen erscheint das Verhalten der Functionen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ für den Fall, dass der Punkt (x, y) der gegebenen Curve sich ins Unendliche nähert. Um hierauf genauer einzugehen, wollen wir zuvörderst die Formeln (4.) einer gewissen Transformation unterwerfen.

Differenzirt man den Ausdruck T (2.) nach der Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η), und nach der in diesem Punkte errichteten *innern* Normale ν, so erhält man:

$$
(5.)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dT}{d\sigma} &= \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\sigma}\,,\\
\frac{dT}{d\nu} &= \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\nu}\,,
\end{aligned}
$$

Formeln, welche mit Rücksicht auf die Relationen (*C.*) pag. 3:

$$
(6.)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\nu} &= \mathsf{A} = -\sin\theta = -\eta'\,,\\
\frac{d\eta}{d\nu} &= \mathsf{B} = +\cos\theta = +\xi'\,,
\end{aligned}
$$

auch so darstellbar sind:

$$
(7.)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dT}{d\sigma} &= +\frac{\partial T}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\eta'\,, &&\Big|\ +f\xi' d\sigma\\
\frac{dT}{d\nu} &= -\frac{\partial T}{\partial \xi}\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\xi'\,. &&\Big|\ -f\eta' d\sigma
\end{aligned}
$$

Hieraus aber folgt durch Multiplication mit den beigesetzten Factoren und Addition und mit Rücksicht auf die aus (6.) entspringende Relation $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$, sofort:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma = \left(\frac{dT}{d\sigma} f\xi' - \frac{dT}{d\nu} f\eta'\right) d\sigma ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(8.)\qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma = \left(\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma} - T\frac{d(f\xi')}{d\sigma} - \frac{dT}{d\nu}(f\eta')\right) d\sigma .$$

Nun ist, nach (3.), $Tf\xi'$ eine *stetige* und $\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma}$ eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge. Integrirt man daher die Formel (8.) über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Curve, so wird hierbei das Glied $\frac{d(Tf\xi')}{d\sigma} d\sigma$ verschwinden; mithin die erste der folgenden beiden Gleichungen entstehen:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \int \frac{\partial T}{\partial \xi} f d\sigma &= -\int T\frac{d(f\xi')}{d\sigma} d\sigma - \int \frac{dT}{d\nu}(f\eta') d\sigma , \\ \int \frac{\partial T}{\partial \eta} f d\sigma &= -\int T\frac{d(f\eta')}{d\sigma} d\sigma + \int \frac{dT}{d\nu}(f\xi') d\sigma . \end{aligned}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ergiebt sich in analoger Weise, nämlich ebenfalls durch Combination der beiden Formeln (7.), unter Anwendung der Factoren $f\eta' d\sigma$ und $f\xi' d\sigma$.

All' diese Gleichungen (7.), (8.), (9.) sind unanfechtbar, falls man nur annimmt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* ist. Substituirt man nun die unter dieser Annahme erhaltenen Werthe (9.) in den unter derselben Annahme erhaltenen Formeln (4.), so ergiebt sich:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \overbrace{\frac{1}{\pi}\int T(f\xi')' d\sigma}^{\mathfrak{V}} + \overbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f\eta') d\sigma}^{\mathfrak{W}} , \quad (!) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\eta')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\xi') d\sigma , \quad (!) \end{aligned}$$

wo z. B. $(f\xi')'$ die Ableitung von $(f\xi')$ nach der Bogenlänge σ vorstellt, und wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ als Abbreviaturen dienen sollen für die beiden Integrale erster Zeile.

Nach Ausführung dieser Transformationen wollen wir jetzt das Verhalten der beiden Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ für den Fall untersuchen, dass der Punkt (x, y) von Innen oder von Aussen her der gegebenen Curve sich ins Unendliche nähert.



Zufolge der Voraussetzungen (3.) sind die Producte $(f\xi')$ und $(f\eta')$ *stetige*, und die Ableitungen $(f\xi')'$ und $(f\eta')'$ *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge; so dass man also mit Bezug auf die in (10.) vorhandenen Integrale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ folgende Notizen machen kann:

mit Bezug auf $\mathfrak{V}$.	mit Bezug auf $\mathfrak{W}$.
$(f\xi')'$ ist eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge, und $\int (f\xi')' d\sigma$ ist $= 0$.	$(f\eta')$ ist eine *stetige* Function der Bogenlänge.

Demgemäss subordinirt sich das Integral $\mathfrak{V}$ ohne Weiteres dem Theorem $V\alpha$. pag. 22, und das Integral $\mathfrak{W}$ dem Theorem $W\alpha$. pag. 26.

Aus dem Theorem $W\alpha$. folgt, dass die Werthe $\mathfrak{W}_a$ und $\mathfrak{W}_j$ für jedweden auf der Curve gelegenen Punkt s *bestimmte endliche Convergenzwerthe* besitzen [vgl. die Definitionen pag. 22, 23], und dass zwischen diesen Convergenzwerthen — sie mögen $\mathfrak{W}_{as}$ und $\mathfrak{W}_{js}$ heissen — die Relation stattfindet:

$$\mathfrak{W}_{as} - \mathfrak{W}_{js} = -2 f_s \eta_s' . \tag{11.}$$

Sodann ergiebt sich weiter aus jenem Theorem $W\alpha$., dass alle Werthe $\mathfrak{W}_a$ und $\mathfrak{W}_{as}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andrerseits alle $\mathfrak{W}_j$ und $\mathfrak{W}_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ bilden.

Andererseits folgt aus dem Theorem $V\alpha$., dass $\mathfrak{V}$ eine Function von (x, y) ist, welche in der ganzen unendlichen Ebene *allenthalben stetig* bleibt, dass mithin für diese Function $\mathfrak{V}$ [vgl. die Bemerkung pag. 23] die Gleichungen stattfinden: $\mathfrak{V}_{as} = \mathfrak{V}_{js} = \mathfrak{V}_s$; so dass man also schreiben kann:

$$\mathfrak{V}_{as} - \mathfrak{V}_{js} = 0 . \tag{12.}$$

Sodann ergiebt sich weiter aus jenem Theorem $V\alpha$., dass alle Werthe $\mathfrak{V}_a$ und $\mathfrak{V}_{as}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andererseits alle $\mathfrak{V}_j$ und $\mathfrak{V}_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ bilden.

Diese Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ übertragen sich nun, mittelst der Formel (10.):

$$(13.)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,, \quad (!)$$

sofort auf die Function $\frac{\partial V}{\partial x}$. Diese Formel sagt z. B. aus*), dass die beiden Functionen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $(\mathfrak{V} + \mathfrak{W})$ für jedweden Punkt a, wie nahe derselbe der gegebenen Curve auch liegen mag, unter einander *identisch* sind, und dass folglich diese beiden dem Gebiet $\mathfrak{A}$ entsprechenden Functionen für jeden Curvenpunkt s *ein und denselben* Convergenzwerth besitzen. Demgemäss erhalten wir die Formeln

$$(14.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a &= \mathfrak{V}_a + \mathfrak{W}_a\,, \quad (!) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} &= \mathfrak{V}_{as} + \mathfrak{W}_{as}\,, \end{aligned}$$

und ebenso auch folgende Formeln:

$$(15.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j &= \mathfrak{V}_j + \mathfrak{W}_j\,, \quad (!) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= \mathfrak{V}_{js} + \mathfrak{W}_{js}\,; \end{aligned}$$

woraus mit Hinblick auf (11.), (12.) sich ergiebt:

$$(16.)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} = -2 f_s \eta_s'\,.$$

Da nun die Werthe $(\mathfrak{V}_a + \mathfrak{W}_a)$ und $(\mathfrak{V}_{as} + \mathfrak{W}_{as})$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ bilden, so gilt, zufolge (14.), Gleiches auch von den Werthen $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as}$. Ebenso ergiebt sich aus (15.), dass die Werthe $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js}$ zusammengenommen eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ repräsentiren.

Zu analogen Resultaten wird man offenbar, auf Grund der *zweiten* der beiden Gleichungen (10.), für $\frac{\partial V}{\partial y}$ gelangen; so dass man also, Alles zusammengefasst, folgendes Theorem erhält:

*) Man beachte dabei das der Formel beigefügte *Ausrufungszeichen*, welches hier und ebenso in allen späteren Formeln beständig andeuten soll, dass die betreffende Formel Gültigkeit besitzt für jedweden (durch einen wenn auch noch so kleinen Zwischenraum) von der Curve *getrennten* Punkt.

Theorem $V\beta$. — *Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(17.) θ, f *stetige, und* θ', f' *abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma \tag{18.}$$

in jedem Punkte (x, y), der von der Curve getrennt ist, darstellbar durch die Formeln

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\xi')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f\eta') d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\eta')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\xi') d\sigma\,, \quad (!)\end{aligned} \tag{19.}$$

wo die Ausrufungszeichen andeuten sollen, dass diese Formeln nur für solche Punkte (x, y) Gültigkeit haben, die von der Curve getrennt sind.

*Aus diesen Formeln ergiebt sich**), *dass die vier Functionen*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_j \tag{20.}$$

*für jedweden Punkt s bestimmte endliche Convergenzwerthe***) *besitzen, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen — sie mögen*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} \tag{21.}$$

genannt werden — folgende Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= -2 f_s \eta_s'\,,\\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} &= +2 f_s \xi_s'\,.\end{aligned} \tag{22.}$$

Als besonders wichtig ist hervorzuheben, dass die vier Functionen (20.), *inclusive ihrer Convergenzwerthe* (21.), *vier Fundamentalfunctionen repräsentiren, die theils dem Gebiete* $\mathfrak{A}$, *theils dem Gebiete* $\mathfrak{J}$

*) Wie nämlich solches im Vorhergehenden dargethan ist.

**) Vgl. die Definitionen pag. 22, 23.

angehören. So z. B. repräsentiren die Werthe $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a$, *inclusive der* $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as}$, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$. *U. s. f.*

Bemerkung. — Denkt man sich in irgend einem Curvenpunkte s die positive Tangente τ und die innere Normale ν construirt, und legt man sodann der Betrachtung dasjenige Coordinatensystem zu Grunde, dessen x-Axe mit τ, und dessen y-Axe mit ν zusammenfällt, so werden die allgemeinen Relationen ($C.$) pag. 3:

$$\xi' = \cos\theta \quad \text{und} \quad \eta' = \sin\theta$$

für jenen speciellen Punkt s die Gestalt annehmen:

$$\xi_s' = 1 \quad \text{und} \quad \eta_s' = 0\ ;$$

denn das Azimuth θ ist für jenen Punkt s offenbar $= 0$.

Demgemäss gewinnen die Relationen (22.) speciell für den Punkt s folgende Gestalt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} = 0\,, \qquad \text{d. i.}\ \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{js} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} = 2f_s\,, \qquad \text{d. i.}\ \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{js} = 2f_s\,.$$

Die letzte dieser beiden Formeln repräsentirt den bekannten *Laplace-schen Satz*, oder vielmehr das Analogon dieses Satzes für die Theorie des Logarithmischen Potentials.

§ 4.

Die ersten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\beta$.

Der in der Formel

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int Q f d\sigma \tag{1.}$$

enthaltene Ausdruck Q hat die Bedeutung:

$$Q = \frac{dT}{d\nu} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\,\mathsf{A} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\mathsf{B}\,, \tag{2.}$$

woraus mit Rücksicht auf ($C.$) pag. 3 sich ergiebt:

$$Q = \frac{dT}{d\nu} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\xi'\,. \tag{3.}$$

Dabei ist:

$$T = \log\frac{1}{E} = -\frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\,, \tag{4.}$$



wo ξ, η die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ vorstellen. Aus (3.) und (4.) folgt z. B.:

$$(5.) \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}, \text{ und } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi}.$$

Bei der gegenwärtigen Untersuchung über das Potential W mag nun vorausgesetzt sein, dass

(6.) θ, f, f' *stetige*, und θ', f'' *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind. Alsdann sind offenbar*) ξ', η' *stetige*, und ξ'', η'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ.

Für einen von der Curve *getrennten* Punkt (x, y) ergiebt sich aus (1.), und mit Rücksicht auf (5.), sofort die Formel:

$$(7.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial Q}{\partial x} f d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial Q}{\partial \xi} f d\sigma. \quad (!)$$

Auch erkennt man sofort, dass $\frac{\partial W}{\partial x}$ eine *stetige* Function von (x, y) ist, — immer vorausgesetzt, dass der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt bleibt.* Um nun das Verhalten dieser Function für den Fall, dass der Punkt (x, y) der Curve sich ins Unendliche nähert, zu untersuchen, wollen wir zunächst die Formel (7.) einer gewissen Transformation unterwerfen.

Differenzirt man den von x, y, ξ, η, ξ', η' abhängenden Ausdruck Q (3.) nach der Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η), so folgt:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial Q}{\partial \xi'}\xi'' + \frac{\partial Q}{\partial \eta'}\eta'',$$

oder, weil, nach (3.), $\frac{\partial Q}{\partial \xi'} = \frac{\partial T}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial Q}{\partial \eta'} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}$ ist:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\xi'' - \frac{\partial T}{\partial \xi}\eta''.$$

Diese Formel aber gewinnt mit Hinblick auf die aus den Gleichungen (C.) pag. 3:

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} \xi' = \cos\theta, \\ \eta' = \sin\theta \end{cases}$$

entspringenden Relationen

*) Man vgl. die Note pag. 31.

$$(\beta.)\qquad \begin{cases}\xi'' = -\,\theta'\sin\theta\,,\\ \eta'' = +\,\theta'\cos\theta\,,\end{cases}\quad \text{d. i.}\quad \begin{cases}\xi'' = -\,\theta'\,\eta'\,,\\ \eta'' = +\,\theta'\,\xi'\,,\end{cases}$$

folgende Gestalt:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\eta'\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi'\right)\theta'\,,$$

oder, einfacher geschrieben, folgende Gestalt:

$$(8.)\qquad \frac{dQ}{d\sigma} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\eta'\right) - \frac{dT}{d\sigma}\,\theta'\,.$$

Andererseits ergiebt sich aus der Formel:

$$\frac{dT}{d\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta'$$

durch nochmalige Differentiation nach σ:

$$\frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\xi'^2 + 2\,\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta}\,\xi'\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\eta'^2\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\xi'' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\eta''\right),$$

wofür man, auf Grund der bekannten Gleichung $\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0$, und mit Rücksicht auf die Relationen (β.), auch schreiben kann:

$$\frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(-\,\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\xi'^2 + 2\,\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta}\,\xi'\,\eta' - \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\eta'^2\right) + \left(-\,\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\xi'\right)\theta'\,.$$

Und diese Formel endlich ist, mit Rücksicht auf die aus (3.) entspringenden Gleichungen:

$$Q = -\,\frac{\partial T}{\partial \xi}\,\eta' + \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\xi'\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = -\,\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta}\,\xi'\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = -\,\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta}\,\eta' + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\,\xi'\,,$$

offenbar auch so darstellbar:

$$(9.)\qquad \frac{d^2T}{d\sigma^2} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\,\eta' - \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,\xi'\right) + Q\,\theta'\,.$$

Multiplicirt man jetzt die beiden Formeln (8), (9.) einmal mit den Factoren ξ', η', das andere Mal mit den Factoren η', $-\,\xi'$, und addirt jedesmal, so erhält man, mit Rücksicht auf die aus (α.) entspringende Relation $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \left(\frac{dQ}{d\sigma} + \frac{dT}{d\sigma}\theta'\right)\xi' + \left(\frac{d^2T}{d\sigma^2} - Q\theta'\right)\eta',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \left(\frac{dQ}{d\sigma} + \frac{dT}{d\sigma}\theta'\right)\eta' - \left(\frac{d^2T}{d\sigma^2} - Q\theta'\right)\xi',$$

oder, falls man die Differentiationen nach der Bogenlänge σ *durchweg* durch Accente andeutet, und zugleich die Relationen (β.) beachtet:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = Q'\xi' + T'\eta'' + T''\eta' + Q\xi'',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = Q'\eta' - T'\xi'' - T''\xi' + Q\eta'',$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = (Q\xi' + T'\eta')',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = (Q\eta' - T'\xi')'.$$

Hieraus folgt sofort:

$$f\frac{\partial Q}{\partial \xi} = [f(Q\xi' + T'\eta')]' - f'(Q\xi' + T'\eta'),$$

$$f\frac{\partial Q}{\partial \eta} = [f(Q\eta' - T'\xi')]' - f'(Q\eta' - T'\xi'),$$

oder, falls man, was die *letzten* Terme betrifft, die identischen Gleichungen:

$$T'f'\eta' = (Tf'\eta')' - T(f'\eta')',$$

$$T'f'\xi' = (Tf'\xi')' - T(f'\xi')'$$

benutzt:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} f\frac{\partial Q}{\partial \xi} &= [f(Q\xi' + T'\eta') - Tf'\eta']' + T(f'\eta')' - Qf'\xi', \\ f\frac{\partial Q}{\partial \eta} &= [f(Q\eta' - T'\xi') + Tf'\xi']' - T(f'\xi')' - Qf'\eta'. \end{aligned}$$

Zufolge der Voraussetzungen (6.) sind die hier in den eckigen Klammern [ ] enthaltenen Grössen *stetige* Functionen der Bogenlänge, und die Ableitungen derselben nach σ, d. i. die Grössen [ ]', *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge. Substituirt man daher die Werthe (10.) in der in (7.) für $\frac{\partial W}{\partial x}$ aufgestellten Formel und in der analogen für $\frac{\partial W}{\partial y}$ geltenden Formel, so erhält man sofort:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \overbrace{\frac{1}{\pi}\int T(-f'\eta')'\,d\sigma}^{\mathfrak{V}} + \overbrace{\frac{1}{\pi}\int Q(f'\xi')d\sigma}^{\mathfrak{W}}, \ (!) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\xi')'\,d\sigma \quad + \frac{1}{\pi}\int Q(f'\eta')d\sigma, \ (!) \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ als Abbreviaturen dienen sollen für die beiden Integrale erster Zeile.

Nun sind, zufolge der Voraussetzungen (6.), $(f'\xi')$ und $(f'\eta')$ *stetige*, und andererseits $(f'\xi')'$ und $(f'\eta')'$ *abtheilungsweis stetige* Functionen der Bogenlänge; so dass also in Betreff der Integrale $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ folgende Notizen zu machen sind:

mit Bezug auf $\mathfrak{V}$.	mit Bezug auf $\mathfrak{W}$.
$(-f'\eta')'$ ist eine *abtheilungsweis stetige* Function der Bogenlänge, und $\int(-f'\eta')'d\sigma$ ist $= 0$.	$(f'\xi')$ ist eine *stetige* Function der Bogenlänge.

Demgemäss subordiniren sich die Integrale $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ ohne Weiteres den Theoremen $V\alpha$. und $W\alpha$. (pag. 22 und 26). Man kann daher die im vorhergehenden Paragraph angestellten Ueberlegungen hier Schritt für Schritt von Neuem wiederholen, und gelangt so z. B. zu der Einsicht, dass die Werthe $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j$ für jedweden Punkt s *bestimmte endliche Convergenzwerthe* $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as}$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js}$ besitzen, zwischen denen die Relation stattfindet:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} = -2 f_s' \xi_s' .$$

Analoges ergiebt sich sodann, was die *zweite* der Formeln (11.) anbelangt, für $\frac{\partial W}{\partial y}$; so dass man, Alles zusammengefasst, zu folgendem Theorem gelangt:

Theorem $W\beta$. — ***Denkt man sich längs der gegebenen geschlossenen Curve irgend eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass***



(12.) *θ, f, f' stetige, und θ', f'' abtheilungsweis stetige Functionen der Bogenlänge sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma \tag{13.}$$

in jedwedem von der Curve getrennten Punkte (x, y) folgendermassen darstellbar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(-f'\eta')' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\xi')\, d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\xi')' d\sigma \quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\eta')\, d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned} \tag{14.}$$

*Auf Grund dieser Formeln ergiebt sich**), *dass die vier Functionen*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_j \tag{15.}$$

*für jedweden Punkt s bestimmte endliche Convergenzwerthe***) *besitzen:*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js}, \tag{16.}$$

und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} &= -2 f_s' \xi_s'\,, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} &= -2 f_s' \eta_s'\,. \end{aligned} \tag{17.}$$

Sodann aber ist als ganz besonders wichtig hervorzuheben, dass jene vier Functionen (15.), *inclusive ihrer Convergenzwerthe* (16.), ***vier Fundamentalfunctionen** repräsentiren, die theils dem Gebiete $\mathfrak{A}$, theils dem Gebiete $\mathfrak{J}$ angehören.*

Bemerkung. — Lässt man, ebenso wie früher [vgl. die Bemerkung pag. 37] die x-Axe mit τ, die y-Axe mit ν zusammenfallen, und bezeichnet man den Ausgangspunkt der beiden Linien τ und ν mit s, so werden, ebenso wie damals, die Formeln stattfinden:

$$\xi_s' = 1 \quad \text{und} \quad \eta_s' = 0\,;$$

wodurch die Relationen (17.) die Gestalt gewinnen:

*) Wie nämlich solches im Vorhergehenden erläutert worden ist.

**) Vgl. die Definitionen pag. 22, 23.

$$(A.)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} = -2f_s' \ ,$$

$$(B.)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} = 0 \ .$$

Die Formel ($A.$) steht in vollem Einklang mit der Formel (10.) pag. 26. Andererseits enthält die Formel ($B.$) den wichtigen Satz, *dass der Differentialquotient des Potentiales W nach der Normale bei einem Durchgange durch die gegebene Curve in stetiger Weise sich ändert.*

Zweite Bemerkung. — Es sei s ein bestimmter Punkt der gegebenen Curve, und ebenso wie bisher:

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma \ .$$

Alsdann wird offenbar die Stetigkeit resp. Unstetigkeit von W, $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ *in unmittelbarer Nähe des Punktes s* nur von derjenigen Beschaffenheit abhängen, welche die vorgeschriebene Function f, sowie auch die gegebene Curve selber, *in unmittelbarer Nähe von s* besitzen. Demgemäss ergiebt sich auf Grund der Thoreme $W\alpha$. pag. 26 und $W\beta$. pag. 41 folgender Satz:

Erster Satz. — Es seien θ und f stetige Functionen der Bogenlänge σ; so dass also das Integral

$$(\alpha.)\qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_{(x, y)}$$

unter allen Umständen einen bestimmten endlichen Werth besitzt.

Denkt man sich nun auf der gegebenen Curve irgend einen bestimmten Punkt s markirt, so werden W, und namentlich auch

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} \ \text{und} \ \frac{\partial W}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an diesen Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, falls nur innerhalb eines den Punkt s einschliessenden beliebig kleinen Curvenintervalls f' stetig, und θ' und f'' abtheilungsweise stetig sind.

Dieser Satz ist ohne Weiteres anwendbar auf die Fundamentalfunctionen einer *Kreisfläche* [Abh. I., pag. 96], und führt alsdann zu folgendem Resultate:

Zweiter Satz. — Am Rande einer gegebenen Kreisfläche seien irgend welche daselbst stetige Werthe $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben; so dass also die diesen Werthen f entsprechende Fundamentalfunction Ψ der Kreisfläche in jedwedem Punkte (x, y) innerhalb dieser Fläche darstellbar ist durch die Formel [Abh. I., pag. 96 (18.)]:

$$(\gamma.)\qquad \Psi = \Psi(x, y) = \text{Const.} + \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_{(x, y)} \ .$$



Markirt man alsdann irgend einen Randpunkt s, so werden Ψ und namentlich auch

$$(\delta.)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an diesen Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren, falls nur innerhalb eines den Punkt s einschliessenden beliebig kleinen Randintervalls f' stetig, und f'' abtheilungsweise stetig ist.

Diese die Kreisfläche betreffenden Dinge sind übrigens von P. du Bois-Reymond in einem kürzlich erschienenen Aufsatz (Crelle's J., Bd. 103, pag. 221) einer etwas *tiefer* gehenden Untersuchung unterworfen worden, — wenigstens insoweit, als es sich um die Ableitung von Ψ nach der *Normale* ν des Randes handelt. Das Resultat, zu welchem der genannte Autor gelangt, ist folgendes:

Man bezeichne die Bogenlänge des gegebenen Punktes s mit σ, und verstehe unter $\lambda(t)$ eine monoton mit t verschwindende Function von solcher Beschaffenheit, dass der Quotient

$$\frac{f(\sigma+t)+f(\sigma-t)-2f(\sigma)}{\lambda(t)}$$

bei abnehmendem t unter einer endlichen Schranke bleibt, und einmal aufhört Null zu werden. Oder genauer ausgedrückt: Man beschränke sich auf solche Fälle, in denen eine Function $\lambda(t)$ von der soeben genannten Beschaffenheit wirklich existirt. Alsdann wird die nach der Normale ν des Punktes s gebildete Ableitung

$$\frac{d\Psi}{d\nu},$$

bei einer Annäherung an den Punkt s, convergiren oder divergiren, je nachdem das Integral

$$\int_0^a \frac{\lambda(t)\,dt}{t^2}$$

convergent oder divergent ist. Dabei bezeichnet a eine positive Constante von beliebiger Kleinheit.

§ 5.

Allgemeine Betrachtungen über die höheren Ableitungen der Potentiale V und W.

Benutzt man P als Collectivbezeichnung für die beiden Potentiale V und W, so ist nach den Theoremen $V\beta$. (pag. 36) und $W\beta$. (pag. 41):

$$(1.)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W}, \quad (!)$$

wo $\mathfrak{V}$ das Potential einer gewissen *einfachen Belegung*, andererseits

$\mathfrak{W}$ das Potential einer gewissen *Doppelbelegung* vorstellt. Hieraus folgt sofort:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \cdot \quad (!)$$

Nun ergiebt sich aber, falls man jene Theoreme $V\beta.$ und $W\beta.$ abermals, und zwar diesmal auf $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ in Anwendung bringt:

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{W}', \quad (!)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} = \mathfrak{V}'' + \mathfrak{W}'', \quad (!)$$

wo wiederum $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}''$ die Potentiale gewisser *einfacher Belegungen*, und $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ die Potentiale gewisser *Doppelbelegungen* vorstellen. Somit folgt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\mathfrak{V}' + \mathfrak{V}'') + (\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}''), \quad (!)$$

oder kürzer geschrieben:

(2.) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \mathfrak{v} + \mathfrak{w}, \quad (!)$$

wo alsdann $\mathfrak{v} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{V}''$ das Potential einer gewissen *einfachen Belegung*, und $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}''$ das Potential einer gewissen *Doppelbelegung* vorstellt.

Ebenso wie wir hier, mittelst der Theoreme $V\beta.$, $W\beta.$, von (1.) zu (2.) gelangt sind, ebenso werden wir offenbar, mittelst derselben beiden Theoreme, von (2.) aus zu folgender Formel gelangen können:

(3.) $$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{w}', \quad (!)$$

und sodann von hier aus zu folgender:

(4.) $$\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = \mathfrak{v}'' + \mathfrak{w}''. \quad (!)$$

u. s. w. — Wir übersehen somit bereits, dass wir in dieser und ähnlicher Weise schliesslich zu folgendem Resultate gelangen:

Allgemeiner Satz. — *Benutzt man P als Collectivbezeichnung für die beiden Potentiale V und W, so ist* im Allgemeinen *jedwede Ableitung von P folgendermassen darstellbar:*

(5.) $$\frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial y^n} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W},$$



wo $\mathfrak{V}$ *das Potential einer gewissen einfachen Belegung, und* $\mathfrak{W}$ *das Potential einer gewissen Doppelbelegung vorstellt.*

Will man indessen die Dinge nicht *im Allgemeinen*, sondern mit *wirklicher Genauigkeit* haben, so muss man mühsam von Stufe zu Stufe emporsteigen, und also von den in den beiden vorhergehenden Paragraphen besprochenen *ersten* Ableitungen zunächst emporsteigen zu den *zweiten* Ableitungen. Und zu diesem Zwecke mögen zuvörderst die Ergebnisse jener beiden vorhergehenden Paragraphe in eine etwas einfachere und mehr symmetrische Form versetzt werden.

§ 6.

Recapitulation und Vereinfachung der Theoreme $V\alpha.$, $W\alpha.$ und $V\beta.$, $W\beta.$

Aus den Formeln (*C.*) pag. 3:

$$(A.)\qquad \begin{cases}\xi' = \alpha = \cos\theta\,,\\ \eta' = \beta = \sin\theta\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathsf{A} = -\sin\theta\,,\\ \mathsf{B} = \cos\theta\end{cases}$$

folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge σ sofort:

$$(B.)\qquad \begin{cases}\xi'' = \alpha' = \mathsf{A}\theta'\,,\\ \eta'' = \beta' = \mathsf{B}\theta'\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathsf{A}' = -\alpha\theta'\,,\\ \mathsf{B}' = -\beta\theta'\,,\end{cases}$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation:

$$(C.)\qquad \begin{cases}\xi''' = \alpha'' = \mathsf{A}\theta'' - \alpha\theta'\theta'\,,\\ \eta''' = \beta'' = \mathsf{B}\theta'' - \beta\theta'\theta'\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathsf{A}'' = -\alpha\theta'' - \mathsf{A}\theta'\theta'\,,\\ \mathsf{B}'' = -\beta\theta'' - \mathsf{B}\theta'\theta'\,.\end{cases}$$

Und mit Rücksicht auf diese Relationen (*A.*), (*B.*), (*C.*) kann den Theoremen $V\beta.$ und $W\beta.$ eine etwas einfachere und mehr symmetrische Gestalt verliehen werden. Aber auch die Theoreme $V\alpha.$ und $W\alpha.$ sind einer etwas bequemeren Darstellung fähig. So z. B. kann das Theorem $V\alpha.$, oder wenigstens der für uns *wichtigste Theil* dieses Theorems folgendermassen ausgesprochen werden [vgl. pag. 22]:

Theorem $V\alpha.$ — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function der Bogenlänge* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(1.) *θ und f abtheilungsweis stetige Functionen von σ sind, und dass überdies $\int f d\sigma = 0$ ist,*

so wird das Potential

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f d\sigma \tag{2.}$$

in der ganzen unendlichen Ebene allenthalben stetig sein; so dass z. B. die Formeln stattfinden:

$$V_{as} = V_s = V_{js}\,, \quad \text{[vgl. die Bemerkung pag. 23].} \tag{3.}$$

Auch werden alsdann die Werthe V_a, inclusive der V_{as}, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und ebenso die V_j, inclusive der V_{js}, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ bilden.

Andererseits kann man das Theorem $W\alpha$. (pag. 26), seinem Hauptinhalt nach, folgendermassen ausdrücken:

Theorem $W\alpha$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(4.) *θ und f stetige Functionen von σ sind,*

so wird das Potential

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_{(x,\,y)} \tag{5.}$$

in der Ebene überall stetig sein, mit alleiniger Ausnahme der gegebenen Curve.

Insbesondere werden alsdann die Werthe W_a, inclusive ihrer Convergenzwerthe W_{as}, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und die W_j, inclusive ihrer Convergenzwerthe W_{js}, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ bilden. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relation

$$W_{as} - W_{js} = -2 f_s \tag{6.}$$

mit einander verbunden sein.

Bemerkung. — Sagt man von einer Function $F(x)$, sie sei sammt ihrem Differentialquotienten stetig, so ist dadurch schon mitausgesagt die *Existenz* dieses Differentialquotienten.

Aehnlich liegen die Dinge hier. Wenn z. B. gesagt wird, die Werthe W_a bildeten, inclusive ihrer Convergenzwerthe W_{as}, eine *Fundamental-*



function des Gebietes $\mathfrak{A}$, so ist damit schon mitausgesagt die *Existenz* jener Convergenzwerthe, und ebenso auch das *Endlich-* und *Stetigsein* derselben. Denn eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist (ihrer Definition zufolge) endlich und stetig in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$, also z. B. auch am Rande von $\mathfrak{A}$.

Die in dem vorstehenden Theorem benutzte Ausdrucksweise dürfte also in Bezug auf *Kürze* und *Schärfe* nichts zu wünschen übrig lassen, und soll demgemäss auch weiterhin zur Anwendung kommen.

Mit Rücksicht auf die zu Anfang dieses Paragraphs notirten Relationen (*A.*), (*B.*), (*C.*) gewinnt das Theorem $V\beta$. (pag. 36) folgende Gestalt:

Theorem $V\beta$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function* $f = f(\sigma)$ *vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(7.) θ, f *stetige, und* θ', f' *abtheilungsweis stetige Functionen von* σ *sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int Tf\,d\sigma \tag{8.}$$

in jedem von der Curve getrennten Punkte (x, y) *darstellbar durch die Formeln:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\alpha)'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\mathsf{A})\,d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f\beta)'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-f\mathsf{B})\,d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned} \tag{9.}$$

Auch werden alsdann die vier Functionen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_a, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_j, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_j, \tag{10.}$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, vier theils zu $\mathfrak{A}$, *theils zu* $\mathfrak{J}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{js} &= 2f_s\mathsf{A}_s\,, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{js} &= 2f_s\mathsf{B}_s\,, \end{aligned} \tag{11.}$$

mit einander verbunden sein.

Endlich wird man das Theorem $W\beta$. (pag. 41), mit Rücksicht auf die zu Anfang dieses Paragraphs gegebenen Relationen (A.), (B.), (C.), in folgende Fassung versetzen können:

Theorem $W\beta$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12). *θ, f, f' stetige, und θ', f'' abtheilungsweis stetige Functionen von σ sind,*

so sind die ersten Ableitungen des Potentials

$$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x,\,y)} \tag{13.}$$

in jedwedem von der Curve getrennten Punkte (x, y) darstellbar durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{A})'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\alpha)\, d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{B})'\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\beta)\, d\sigma\,. \quad (!) \end{aligned} \tag{14.}$$

Auch werden alsdann die vier Functionen

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_a \quad und \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_j, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_j, \tag{15.}$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, vier theils zu $\mathfrak{A}$ theils zu $\mathfrak{J}$ gehörige Fundamentalfunctionen sein. Ueberdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{js} &= -\, 2 f_s'\alpha_s\,, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{js} &= -\, 2 f_s'\beta_s\,, \end{aligned} \tag{16.}$$

mit einander verbunden sein.

§ 7.

Die zweiten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\gamma$.

Im Anschluss an die auf der Curve vorgeschriebene Function $f = f(\sigma)$ mögen die Abbreviaturen eingeführt sein:

$$g = (f\alpha)' \quad \text{und} \quad h = -f\mathsf{A}\,. \tag{1.}$$

Ueberdies mag vorausgesetzt sein, dass

(2.) θ, θ', f, f' *stetige*, und θ'', f'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sind. Alsdann werden offenbar*) g, h, h' *stetige*, und g', h'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sein.

Dies vorangeschickt, ergiebt sich nun für das Potential

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int Tf\,d\sigma \tag{3.}$$

mittelst des Theorems $V\beta$. (pag. 48) die Formel:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int T(f\alpha)'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\Big(-f\mathsf{A}\Big)\,d\sigma\,, \quad (!)$$

eine Formel, die man mit Hinblick auf (1.) auch so schreiben kann:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int Tg\,d\sigma}_{\mathfrak{B}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}h\,d\sigma}_{\mathfrak{W}}\,. \quad (!) \tag{4.}$$

Hieraus folgt, falls man die Integrale rechts mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ bezeichnet:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,, \quad (!) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,, \quad (!) \end{aligned}$$

wo die Ausrufungszeichen nach wie vor andeuten, dass die betreffenden Formeln nur so lange gültig sind, als der Punkt (x, y) von der Curve *getrennt* bleibt.

Das Potential $\mathfrak{B}$ (4.):

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{\pi}\int Tg\,d\sigma \tag{p.}$$

subordinirt sich, in Hinblick auf die Angaben (2.), ohne Weiteres dem Theorem $V\beta$. (pag. 48). Hieraus folgt einerseits, dass die Formeln stattfinden:

$$(p'.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha)'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-\,g\mathsf{A})\,d\sigma\,, \quad (!) \\ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta)'\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-\,g\mathsf{B})\,d\sigma\,, \quad (!) \end{aligned}$$

andererseits aber, dass die vier Functionen

*) Vgl. die für α, A gegebenen Formeln (*A*.), (*B*.), (*C*.), pag. 46.

$$(p''.)\qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *vier Fundamentalfunctionen* sind, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(p'''.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{A}_s , \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{B}_s . \end{aligned}$$

Aehnliches ist zu bemerken über das Potential $\mathfrak{W}$ (4.):

$$(q.)\qquad \mathfrak{W} = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}\, h\, d\sigma .$$

Aus (2.) ergiebt sich nämlich, dass dieses Potential dem Theorem $W\beta$. (pag. 49) sich subordinirt. Und hieraus folgt einerseits, dass die Formeln gelten:

$$(q'.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(h'\mathsf{A})' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(h'\alpha) d\sigma\ , \quad (!) \\ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(h'\mathsf{B})' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(h'\beta) d\sigma\ ; \quad (!) \end{aligned}$$

andererseits aber, dass die vier Functionen

$$(q''.)\qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_j,\ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *vier Fundamentalfunctionen* sind, und dass zwischen diesen Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(q'''.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_{js} &= -\,2\, h_s' \alpha_s , \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)_{js} &= -\,2\, h_s' \beta_s . \end{aligned}$$

Da nun, nach $(p''.)$, $(q''.)$, die $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)_a$ und die $\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a$, inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ sind, so gilt Gleiches auch von der Summe dieser beiden Functionen: $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right)_a$, d. i. nach (5.) von $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a$. In solcher Art gelangt man, auf Grund jener Sätze $(p''.)$, $(q''.)$, und mit Rücksicht auf (5.), zu der Einsicht, dass die vier Functionen

$$(6.)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_j , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_j ,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, ***Fundamentalfunctionen*** sind, und dass mithin, wie unmittelbar aus der Symmetrie folgt, Gleiches auch gelten muss von den beiden Functionen

$$(6\alpha.)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_j .$$

Gleichzeitig ergeben sich für die Convergenzwerthe der Functionen (6.) aus (5.), (p'''.), (q'''.) die Relationen:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{A}_s - 2 h_s' \alpha_s , \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{js} &= 2 g_s \mathsf{B}_s - 2 h_s' \beta_s . \end{aligned}$$

Die Werthe der Fundamentalfunctionen (6.), (6α.) sind leicht näher angebbar. Substituirt man nämlich die Werthe (p'.), (q'.) in (5.), so folgt:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{A}\int T(g\alpha + h'\mathsf{A})' d\sigma + \frac{1}{A}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A} + h'\alpha) d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{A}\int T(g\beta + h'\mathsf{B})' d\sigma + \frac{1}{A}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B} + h'\beta) d\sigma . \quad (!) \end{aligned}$$

Substituirt man aber hier für g, h ihre eigentlichen Bedeutungen (1.), so erhält man, nach einigen elementaren Reductionen [bei denen die Relationen (*B.*) pag. 46 von Nutzen sind], die *erste* und *letzte* Formel folgenden Systems:

$$(9.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{A}\int T[f'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f\theta'(2\alpha\mathsf{A})]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{A}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(2\alpha\mathsf{A}) + f\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)] d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{1}{A}\int T[f'(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f\theta'(2\beta\mathsf{B})]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{A}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(2\beta\mathsf{B}) + f\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)] d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{A}\int T[f'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B}) + f\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{A}\int \frac{dT}{d\nu}[-f'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A}) + f\theta'(\alpha\beta - \mathsf{A}\mathsf{B})] d\sigma , \quad (!) \end{aligned} \right.$$

während die *mittlere* Formel ohne Weiteres hinzugefügt ist nach Analogie der *ersten*.

Desgleichen gelangt man von den Formeln (7.) aus, durch Substitution der in (1.) angegebenen Bedeutungen von g, h, zur *ersten* und *letzten* Formel folgenden Systems:

$$(10.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} = 2[f'(2\alpha \mathsf{A}) - f\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)]_s\,, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{js} = 2[f'(2\beta \mathsf{B}) - f\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)]_s\,, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} = 2[f'(\alpha \mathsf{B} + \beta \mathsf{A}) - f\theta'(\alpha\beta - \mathsf{AB})]_s\,, \end{cases}$$

wo wiederum die *mittlere* Formel hinzugefügt ist auf Grund ihrer Analogie mit der *ersten*. Dabei sei bemerkt, dass das in (9.), (10.) auftretende θ' den Werth hat:

$$(11.)\qquad \theta' = \frac{\varepsilon}{R}\,, \quad [\text{vgl. } (E.) \text{ pag. } 4]\,,$$

wo R den Krümmungsradius der gegebenen Curve bezeichnet, und wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein innerer oder äusserer ist. Wir können schliesslich die Resultate dieses Paragraphs folgendermassen zusammenfassen:

Theorem $V\gamma$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12.) *θ, θ', f, f' stetige, und θ'', f'' abtheilungsweis stetige Functionen von σ sind,*

so sind die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(13.)\qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int T f\, d\sigma$$

für jeden von der Curve getrennten Punkt (x, y) durch die Formeln (9.) darstellbar.

Ferner werden alsdann die sechs Functionen

$$(14.)\quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_a, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_a, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_j, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_j, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_j\,,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, sechs theils zu $\mathfrak{A}$, theils zu $\mathfrak{J}$ gehörige Fundamentalfunctionen sein. Und überdies werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen (10.) *mit einander verbunden sein.*



Bemerkung. — Nimmt man ebenso wie früher [vgl. die Bemerkung pg. 37] zur x-Axe eine positive Tangente der Curve, und zur y-Axe die im Berührungspunkte s errichtete innere Normale, so wird für diesen Punkt s das Azimuth $\theta = 0$, mithin [nach (A) pag. 46]:

$$\alpha = 1\,, \quad \beta = 0\,, \quad \mathsf{A} = 0\,, \quad \mathsf{B} = 1\,,$$

sodass also die Formeln (10.), mit Rücksicht auf (11.), für diesen speciellen Punkt s die Gestalt erhalten:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{js} = -2\left(\frac{f\varepsilon}{R}\right)_s,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{js} = +2\left(\frac{f\varepsilon}{R}\right)_s,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} = +2 f_s'\,.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln lässt sich z. B. leicht controliren für eine gleichmässig mit Masse belegte Kreisperipherie. Für eine solche Belegung ist nämlich das Potential auf *innere* Punkte constant, andererseits aber das Potential auf *äussere* Punkte $= M \log \frac{1}{r}$, wo M die Gesammtmasse der Belegung, und r die Centraldistanz des sollicitirten Punktes vorstellt. U. s. w.

§ 8.

Die zweiten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\gamma$.

Zur Abkürzung sei gesetzt:

(1.) $$g = (f'\mathsf{A})' \text{ und } h = f'\alpha\,.$$

Zugleich mag angenommen werden, dass

(2.) θ, θ', f, f', f'' *stetige*, und θ'', f''' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sind. Alsdann werden offenbar*) g, h, h' *stetige*, und g', h'' *abtheilungsweis stetige* Functionen von σ sein.

Dies vorangeschickt, ergiebt sich nun für das Potential

(3.) $$W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma\,,$$

mittelst des Theorems $W\beta$. (pag. 49) die Formel:

*) Vgl. die Formeln (A.), (B.), (C.) pag. 46.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int T(f'\mathsf{A})'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(f'\alpha)d\sigma\,, \quad (!)$$

d. i. mit Rücksicht auf (1.):

$$(4.)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int Tg\,d\sigma}_{\mathfrak{V}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}h\,d\sigma}_{\mathfrak{W}}\,; \quad (!)$$

woraus folgt:

$$(5.)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,, \quad (!)\\ \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,. \quad (!)\end{aligned}$$

Das Potential $\mathfrak{V}$ (4.):

$$(P.)\qquad \mathfrak{V} = \frac{1}{\pi}\int Tg\,d\sigma$$

subordinirt sich [vgl. (2.)] dem Theorem $V\beta$. (pag. 48). Hieraus folgt einerseits, dass die Formeln stattfinden:

$$(P'.)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha)'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-\,g\mathsf{A})d\sigma\,, \quad (!)\\ \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta)'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-\,g\mathsf{B})d\sigma\,, \quad (!)\end{aligned}$$

andrerseits aber — u. s. w. Kurz es ergeben sich genau dieselben Formeln und Bemerkungen, wie sie im vorigen Paragraph in ($p.$), ($p'.$), ($p''.$), ($p'''.$) und ($q.$), ($q'.$), ($q''.$), ($q'''.$) notirt worden sind, nur mit dem Unterschiede, dass g und h hier andere Bedeutungen haben als damals.

Demgemäss sind auch die weitern Ergebnisse analog mit denen des vorigen Paragraphs. Man gelangt nämlich zu dem Resultate, dass die sechs Functionen

$$(6.)\qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_a \text{ und } \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, *Fundamentalfunctionen* sind, ferner zu dem Resultate, dass zwischen den soeben genannten Convergenzwerthen die Relationen stattfinden:

$$(7.)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{A}_s - 2h_s'\alpha_s\,,\\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{js} &= 2g_s\mathsf{B}_s - 2h_s'\beta_s\,.\end{aligned}$$

und endlich auch zu dem Resultate, dass für jene Functionen (6.) die Formeln gelten:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\alpha + h'\mathsf{A})' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{A} + h'\alpha) d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T(g\beta + h'\mathsf{B})' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}(-g\mathsf{B} + h'\beta) d\sigma . \quad (!) \end{aligned}$$

Substituirt man hier in (8.) für g und h ihre eigentlichen Bedeutungen (1.), so erhält man, nach einfachen Reductionen [bei denen die Relationen (B.) pag. 46 von Nutzen sind], die *erste* und *letzte* Formel folgenden Systems:

$$(9.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(2\alpha\mathsf{A}) - f'\theta'(\alpha^2 - \mathsf{A}^2)]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[f''(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f'\theta'(2\alpha\mathsf{A})] d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(2\beta\mathsf{B}) - f'\theta'(\beta^2 - \mathsf{B}^2)]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[f''(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f'\theta'(2\beta\mathsf{B})] d\sigma , \quad (!) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\pi}\int T[f''(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A}) - f'\theta'(\alpha\beta - \mathsf{AB})]' d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu}[f''(\alpha\beta - \mathsf{AB}) + f'\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})] d\sigma , \quad (!) \end{aligned} \right.$$

in welchem die *mittlere* Formel hinzugefügt ist nach Analogie der *ersten*.

Desgleichen gelangt man von den Formeln (7.) aus, durch Substitution jener Werthe (1.), zu folgendem Formelsystem:

$$(10.)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} &= -2[f''(\alpha^2 - \mathsf{A}^2) + f'\theta'(2\alpha\mathsf{A})]_s , \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{js} &= -2[f''(\beta^2 - \mathsf{B}^2) + f'\theta'(2\beta\mathsf{B})]_s , \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{js} &= -2[f''(\alpha\beta - \mathsf{AB}) + f'\theta'(\alpha\mathsf{B} + \beta\mathsf{A})]_s ; \end{aligned} \right.$$

hier ist wiederum:

$$(11.)\quad \theta' = \frac{\varepsilon}{R} ,$$

wo R den Krümmungsradius der gegebenen Curve vorstellt, und $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der betreffende Krümmungskreis ein innerer oder äusserer ist. — Somit ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem $W\gamma$. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(12.) θ, θ', f, f', f'' *stetige und* θ'', f''' *abtheilungsweis stetige Functionen von* σ *sind,*

so sind die zweiten Ableitungen des Potentials

$$(13.)\qquad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{dr} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_{(x,\,y)}$$

für jeden von der Curve getrennten Punkt (x, y) *darstellbar durch die Formeln* (9.)

Ferner werden alsdann die sechs Functionen

$$(14.)\qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_a,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_a \ \text{und}\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_j,\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, sechs theils zu $\mathfrak{A}$, *theils zu* $\mathfrak{J}$ *gehörige Fundamentalfunctionen sein. Und endlich werden jene Convergenzwerthe durch die Relationen* (10.) *mit einander verbunden sein.*

Bemerkung. — Nimmt man zur x-Axe eine positive Tangente der Curve, und zur y-Axe die im Berührungspunkte s errichtete innere Normale, so wird für diesen Punkt s das Azimuth $\theta = 0$, mithin [nach (4.) pag. 46]:

$$\alpha = 1\,,\quad \beta = 0\,,\quad \mathsf{A} = 0\,,\quad \mathsf{B} = 1\,;$$

sodass also die Formeln (10.), mit Rücksicht auf (11.), für diesen speciellen Punkt s die Gestalt gewinnen:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{js} = -\,2 f_s''\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{js} = +\,2 f_s''\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{js} = -\,2\left(\frac{\varepsilon f'}{R}\right)_s\,,$$

wo R den Krümmungsradius vorstellt, und $\varepsilon = \pm 1$ ist.

§ 9.

Tabellarische Uebersicht.

Blickt man zurück auf die Theoreme $V\alpha.$, $W\alpha.$, $V\beta.$, $W\beta.$, $V\gamma.$, $W\gamma.$ pag. 46—57, so sieht man, dass die Voraussetzungen, unter denen diese Theoreme aufgestellt sind, durch folgende Tabelle angedeutet werden können:



$V\alpha.$	$(\theta, f).$	$W\alpha.$	$\theta, f.$
$V\beta.$	$\theta, f, (\theta', f').$	$W\beta.$	$\theta, f, f', (\theta', f'').$
$V\gamma.$	$\theta, \theta', f, f', (\theta'', f'').$	$W\gamma.$	$\theta, \theta', f, f', f'', (\theta'', f''').$

In dieser Tabelle sind nämlich diejenigen Functionen, welche *stetig* sein sollen, geradezu hingeschrieben, diejenigen Functionen aber, welche nur *abtheilungsweise stetig* zu sein brauchen, in Klammern beigefügt.

Aus dieser Tabelle erkennt man bereits mit ziemlicher Sicherheit, wie die weiteren Theoreme $V\delta.$, $W\delta.$, $V\varepsilon.$, $W\varepsilon.$, etc. lauten werden.

§ 10.

Ueber eine aus zwei Potentialen V und W zusammengesetzte monogene Function.

Markirt man irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{J}$ einen Punkt $j(x, y)$ und bezeichnet man den von diesem Punkte nach irgend einem Curvenpunkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector mit E, und das Azimuth desselben gegen die x-Axe mit γ, so ist offenbar

$$\text{(1.)} \qquad \operatorname{tang} \gamma = \frac{y - \eta}{x - \xi};$$

woraus durch partielle Differentiation nach x und y die Formeln sich ergeben:

$$\text{(2.)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= -\frac{y - \eta}{E^2} = +\frac{\partial T}{\partial y}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= +\frac{x - \xi}{E^2} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \text{ wo } T = \log \frac{1}{E}. \end{aligned}$$

Ist nun längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass

(3.) θ, f *stetige* Functionen, und dass überdies f' eine *abtheilungsweis stetige* Function ist,

so subordiniren sich die Potentiale

$$\text{(4.)} \qquad V = V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int T f' d\sigma \quad \text{und} \quad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma$$

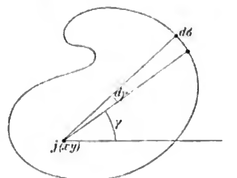
resp. den Theoremen $V\alpha$. pag. 46 und $W\alpha$. pag. 47; so dass also z. B. die beiden Functionen

(5.) $$V_j \quad \text{und} \quad W_j,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein werden.

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt die Function W_j einer gewissen Transformation unterwerfen. Sind γ und $\gamma + d\gamma$ diejenigen Werthe des vorhin definirten Azimuths, welche respective den Bogenlängen σ und $\sigma + d\sigma$ entsprechen (vergl. die beistehende Figur), so wird:

(6.) $$W_j = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_j = \frac{1}{\pi}\int f d\gamma\,.$$



In der That erkennt man leicht, dass $(d\sigma)_j$ und $d\gamma$ unter allen Umständen einander *gleich* sind, einerlei ob der in j befindliche Beobachter die innere oder die äussere Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Aus (6.) folgt sofort:

(7.) $$W_j = \frac{1}{\pi}\int \Big(d(\gamma f) - \gamma df\Big)\,,$$

(8.) $$\text{d. i. } W_j = \frac{1}{\pi}\,[\gamma f] - \frac{1}{\pi}\int \gamma f' d\sigma\,,$$

wo $[\gamma f]$ die Differenz derjenigen Werthe vorstellt, welche das Product γf zu Ende und zu Anfang des Integrationsintervalles besitzt. Denkt man sich also das Azimuth von einem festen Curvenpunkte s_0 aus gerechnet, dessen Azimuth $\gamma = \gamma_0$ ist, so wird $[\gamma f] = (\gamma_0 + 2\pi)f_0 - \gamma_0 f_0 = 2\pi f_0$ sein, wo f_0 den Werth von f in s_0 vorstellt; so dass man also erhält:

(9.) $$W_j = 2f_0 - \frac{1}{\pi}\int \gamma f' d\sigma\,.$$

Dies erscheint befremdlich. Denn hätte man statt s_0 irgend einen andern festen Punkt s_1 gewählt, so würde sich ergeben haben:

(10.) $$W_j = 2f_1 - \frac{1}{\pi}\int \gamma f' d\sigma\,,$$

wo f_1 den Werth von f in s_1 vorstellt. Und man würde also in



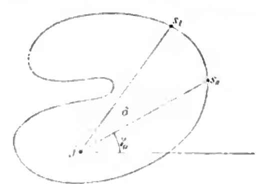
solcher Art für ein und dasselbe W_j zwei von einander verschiedene Werthe (9.) und (10.) erhalten. Doch lässt sich leicht zeigen [vergl. die folgende Erläuterung], dass die beiden in (9.) und (10.) enthaltenen Integrale, obwohl der Form nach identisch, *verschiedene* Werthe haben, und dass mit Rücksicht hierauf die rechten Seiten jener Formeln (9.) und (10.) sich als *gleich gross* ergeben.

Erläuterung. — Wir bezeichnen die Integrale (9.) und (10.) mit U_0 und U_1, geben jenen beiden Formeln also folgende Gestalt:

$$(A.)\qquad W_j = 2f_0 - \frac{1}{\pi} U_0 ,$$

$$(B.)\qquad W_j = 2f_1 - \frac{1}{\pi} U_1 .$$

Das Azimuth γ ist derjenige Winkel, unter welchem der von j nach einem Curvenpunkte hin gelegte Radiusvector gegen die x-Axe geneigt ist, und wird daher um 2π anwachsen, sobald man den Curvenpunkt längs der



Curve einmal herumlaufen lässt. Bezeichnet man also die Bogenlänge dieses Curvenpunktes mit σ, so ist γ eine *nichtperiodische* Function von σ. Sind nun γ_0 und $\gamma_0 + \delta$ die Azimuthe der beiden festen Punkte s_0 und s_1 [vgl. die Figur], so ist das Integral U_0 hinzuerstrecken von γ_0 bis $(\gamma_0 + 2\pi)$, hingegen das Integral U_1 hinzuerstrecken von $(\gamma_0 + \delta)$ bis $(\gamma_0 + \delta + 2\pi)$; sodass man also schreiben kann:

$$U_0 = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} \gamma f' \, d\sigma + \int_{\gamma_0+\delta}^{\gamma_0+2\pi} \gamma f' \, d\sigma ,$$

$$U_1 = \int_{\gamma_0+\delta}^{\gamma_0+2\pi} \gamma f' \, d\sigma + \int_{\gamma_0+2\pi}^{\gamma_0+2\pi+\delta} \gamma f' \, d\sigma .$$

Subtrahirt man diese beiden Formeln von einander, so hebt sich das Integral oben rechts gegen das Integral unten links fort; sodass man erhält:

$$U_1 - U_0 = \int_{\gamma_0+2\pi}^{\gamma_0+\delta+2\pi} \gamma f' \, d\sigma - \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} \gamma f' \, d\sigma$$

Die in dieser letzten Formel enthaltenen Integrale durchlaufen beide *denselben* Bogen $s_0 s_1$; sodass also in beiden *dieselben* Bogenelemente $d\sigma$ und auch *dieselben* Werthe von f' in Betracht kommen. Hingegen bemerkt man, dass das erste mit dem Anfangswerthe $(\gamma_0 + 2\pi)$, das zweite aber mit dem Anfangswerthe γ_0 ausgeht, und dass überhaupt in jedem Punkte des Bogens $s_0 s_1$ bei dem einen und anderen Integral zwei Werthe von γ in Betracht kommen, die um 2π von einander abweichen. Somit geht die letzte Formel über in:

$$U_1 - U_0 = 2\pi \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} f' d\sigma, \text{ d. i.:} = 2\pi \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+\delta} df,$$

$$(C.) \qquad \text{d. i.: } U_1 - U_0 = 2\pi (f_1 - f_0),$$

wo f_0 und f_1, ebenso wie früher, die Werthe von f in s_0 und s_1 vorstellen. Diese Formel (*C.*) aber lässt sofort erkennen, dass die beiden in (*A.*) und (*B.*) für W_j aufgestellten Werthe einander *gleich* sind. — *Q. e. d.*

Offenbar gilt die Formel (9.) für jeden *beliebigen* Punkt $j(x, y)$, falls nur derselbe von der Curve *getrennt* ist. Demgemäss ergeben sich durch Differentiation der Formel (9.) nach x und y die Gleichungen:

$$(11.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \gamma}{\partial x} f' d\sigma, \quad (!)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \gamma}{\partial y} f' d\sigma, \quad (!)$$

wo zur Abkürzung W für W_j gesetzt ist. Diese Gleichungen sind mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar:

$$(12.) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial T}{\partial y} f' d\sigma, \quad (!)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = +\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial T}{\partial x} f' d\sigma. \quad (!)$$

Vergleicht man nun diese Formeln (12.) mit den aus (4.) für das Potential V sich ergebenden Formeln:

$$(13.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\partial T}{\partial x} f' d\sigma, \quad (!)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\partial T}{\partial y} f' d\sigma, \quad (!)$$

so gelangt man sofort zu den Relationen:

$$(14.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial W}{\partial x}. \quad (!)$$



mithin zu der Einsicht, dass der Ausdruck

$$V + iW\,, \quad (i = \sqrt{-1})\,, \tag{15.}$$

innerhalb $\mathfrak{J}$ eine *monogene* Function von $x + iy$ ist.

Analoges ergiebt sich in analoger Weise für jeden Punkt *innerhalb* $\mathfrak{A}$; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Satz. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(16.) θ, f *stetig und* f' *abtheilungsweis stetig sind,*

so wird das aus den beiden Potentialen

$$V = V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int Tf'\,d\sigma \quad \text{und} \quad W = W(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f\,d\sigma \tag{17.}$$

zusammengesetzte Binom

$$V + iW\,, \quad (i = \sqrt{-1})\,, \tag{18.}$$

für jedweden von der Curve getrennten Punkt eine monogene Function von $x + iy$ sein.

Gleichzeitig werden die beiden Functionen

$$V_a + iW_a \quad \text{und} \quad V_j + iW_j\,, \tag{19.}$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, zwei respective zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ gehörige Fundamentalfunctionen sein. — Diese letztere Behauptung ergiebt sich für das Binom $V_j + iW_j$ ohne Weiteres aus dem bei (5.) Bemerkten, und für das Binom $V_a + iW_a$ in analoger Weise.

Zweites Capitel.

Ueber Fundamentalfunctionen mit vorgeschriebenen Randwerthen, namentlich über die Differentialquotienten dieser Fundamentalfunctionen.

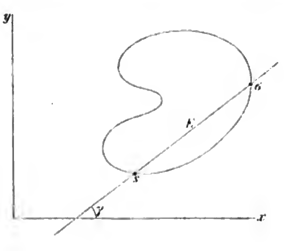
Erst nach Absolvirung einiger vorbereitender Betrachtungen (§ 11 und § 12), werden wir zu unserm eigentlichen Thema gelangen, und (in § 13) dasjenige *Theorem* aufstellen, welches den eigentlichen Höhepunkt dieses Capitels repräsentirt, und von welchem in der Einleitung (pag. 10) bereits die Rede war. Dieses Theorem wird uns sodann Veranlassung geben zu gewissen weiteren Untersuchungen (§ 14 und § 15), namentlich auch zur Untersuchung *monogener* Fundamentalfunctionen.

§ 11.

Vorläufige Betrachtungen über die Azimuthe θ und γ.

Auf der gegebenen Curve seien zwei Punkte markirt mit den Bogenlängen σ und s, deren Coordinaten ξ, η und x, y also die Werthe haben [vgl. pag. 3]:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \xi = \mathfrak{F}(\sigma)\,, \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{F}(s)\,, \\ y = \mathfrak{G}(s)\,. \end{cases}$$



Ferner sei E der gegenseitige Abstand der beiden Punkte, und γ dasjenige Azimuth, unter welchem diese Linie E (fortlaufend gedacht von s nach σ) gegen die x-Axe geneigt ist.

Alsdann sind offenbar E und

γ *Functionen der beiden Bogenlängen σ und s.* Für diese Functionen gelten, unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(2.)\qquad \Xi = \xi - x \quad \text{und} \quad \mathrm{H} = \eta - y$$

die Formeln:

$$(3.)\qquad E^2 = \Xi^2 + \mathrm{H}^2, \quad \cos\gamma = \frac{\Xi}{E}, \quad \sin\gamma = \frac{\mathrm{H}}{E}.$$

Hieraus folgt z. B.:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} &= +\frac{\Xi\eta' - \mathrm{H}\xi'}{E^2}, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial s} &= -\frac{\Xi y' - \mathrm{H}x'}{E^2}, \end{aligned}$$

und weiter:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2} &= +\frac{\Xi\eta'' - \mathrm{H}\xi''}{E^2} - 2\frac{(\Xi\eta' - \mathrm{H}\xi')(\Xi\xi' + \mathrm{H}\eta')}{E^4}, \\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2} &= -\frac{\Xi y'' - \mathrm{H}x''}{E^2} - 2\frac{(\Xi y' - \mathrm{H}x')(\Xi x' + \mathrm{H}y')}{E^4}, \\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s} &= -\frac{x'\eta' - y'\xi'}{E^2} + 2\frac{(\Xi\eta' - \mathrm{H}\xi')(\Xi x' + \mathrm{H}y')}{E^4}, \end{aligned}$$

wo selbstverständlich ξ', η', ξ'', η'' die Ableitungen von ξ, η nach der Bogenlänge σ, und ebenso x', y', x'', y'' die Ableitungen von x, y nach der Bogenlänge s vorstellen.

Lässt man die beiden Bogenlängen σ und s einander *gleich* werden, oder allgemeiner, lässt man die Differenz der beiden Bogenlängen gleich einem ganzen Vielfachen von Σ werden, wo Σ den Umfang der Curve vorstellt, so erfolgt ein *Nullwerden* von E, mithin ein *Unendlichwerden* der Ausdrücke (4.), (5.). Dieses Unendlichwerden ist aber, wie man leicht übersieht, in der Regel nur ein *scheinbares*.

Um näher auf die Sache einzugehen, denken wir uns je zwei *Curvenpunkte* σ und s geometrisch dargestellt durch einen einzigen *idealen Punkt* (σ, s). Dieser letztere soll in irgend einer Hülfsebene liegen, und in Bezug auf ein in dieser Hülfsebene festgesetztes senkrechtes Axensystem zwei Coordinaten σ und s besitzen, die ebenso gross sind, wie die Bogenlängen jener beiden Curvenpunkte. In dieser σs-Ebene wird alsdann eine Function $F(\sigma, s)$ in irgend einem Punkte (σ, s) *stetig* zu nennen sein, sobald sie der bekannten Bedingung genügt, dass all' ihre Werthdifferenzen innerhalb eines

um den Punkt (σ, s) beschriebenen Kreises durch Verkleinerung des Kreisradius unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. Solches festgesetzt, gelten für die Ausdrücke (4.), (5.) folgende Sätze:

Erster Satz. — *Ist die gegebene Curve von solcher Beschaffenheit, dass*

(6.) $\qquad \theta$ *und* θ' *stetige Functionen von* σ *sind,*

so werden

(6a). $$\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \quad und \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

Functionen von (σ, s) *sein, welche in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

Zweiter Satz. — *Ist die gegebene Curve der Art beschaffen, dass*

(7.) $\qquad \theta$, θ' *und* θ'' *stetige Functionen von* σ *sind,*

so werden

(7a.) $$\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \ \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma^2}, \ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \quad und \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma \partial s}$$

Functionen von (σ, s) *sein, welche in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

Allgemeiner Satz. — *Nimmt man an, es seien*

(8.) $\qquad \theta, \theta', \theta'', \theta''', \ldots \theta^{(n)}$ *stetige Functionen von* σ,

so werden sämmtliche Ausdrücke

(8a.) $$\frac{\partial^{p+q} \gamma}{\partial \sigma^p \partial s^q} \qquad (p + q \leqq n)$$

Functionen von (σ, s) *sein, die in der* σs*-Ebene allenthalben stetig sind.*

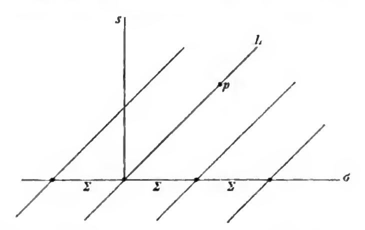
Beweis des ersten Satzes. — Die Grössen γ, $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ sind Functionen von σ und s. Während aber γ eine *nichtperiodische* Function repräsentirt, sind $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$ *periodisch* sowohl nach σ, wie auch nach s. Und zwar ist die Periodenlänge für jedes dieser beiden Argumente $= \Sigma$; wie sich solches z. B. aus den Formeln (4.) sofort ergiebt, falls man nur beachtet, dass ξ, η, ξ', η' periodische Functionen von σ sind [vergl. V., pag. 4, 5], und dass ebenso x, y, x', y' periodische Functionen von s sind. Denkt man sich also die

σs-Ebene parallel ihren beiden Axen in lauter Quadrate, jedes von der Seitenlänge Σ zerlegt, so werden die Werthe, welche $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ oder $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ in *einem* dieser Quadrate besitzt, in jedem *andern* Quadrate von Neuem und in derselben Anordnung sich wiederholen.

Die Formel $\sigma - s =$ Const. repräsentirt in der σs-Ebene ein System paralleler Linien, die gegen die σ-Axe, und ebenso auch gegen die s-Axe unter 45° geneigt sind. Bezeichnet nun M eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so mögen diejenigen unter jenen Parallellinien, welche durch die Formel

$$\sigma - s = M\Sigma$$

dargestellt sind, kurzweg die *Hauptlinien* heissen. Diese Hauptlinien sind *äquidistant*. Eine derselben — sie mag L heissen —



geht durch den Anfangspunkt; und die übrigen schneiden die σ-Axe in Punkten, die in der Entfernung Σ auf einander folgen.

Dass die Functionen $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ in jedwedem Punkte (σ, s), der *nicht* auf einer Hauptlinie liegt, *stetig* sind, unterliegt keinem Zweifel. Denn durch jeden solchen Punkt (σ, s) werden zwei *von einander verschiedene* Curvenpunkte angedeutet sein, also zwei Punkte, deren $E > 0$ ist; so dass sich also in diesem Falle die Stetigkeit jener Functionen auf Grund der Formeln (4.) leicht ergiebt.

Zu untersuchen bleibt also nur noch das Verhalten der Functionen $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ in denjenigen Punkten (σ, s), *die einer Hauptlinie angehören*. Und hierbei können wir uns auf *eine* dieser Hauptlinien z. B. auf L beschränken. Denn die Functionen werden, in Fol-

ihrer Periodicität, auf jeder *andern* Hauptlinie genau dasselbe Verhalten zeigen, wie auf L.

Für die von (σ, s) abhängende Function $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$ gilt nach (4.) und (3.) die Formel:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} = \frac{\Xi \eta' - \mathrm{H} \xi'}{\Xi^2 + \mathrm{H}^2} .$$

Nun sind, zufolge der Voraussetzungen (6.), die sechs Grössen

$$(\beta.) \qquad \begin{array}{lll} \xi = \mathfrak{F}(\sigma) , & \xi' = \mathfrak{F}'(\sigma) , & \xi'' = \mathfrak{F}''(\sigma) , \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma) , & \eta' = \mathfrak{G}'(\sigma) , & \eta'' = \mathfrak{G}''(\sigma) \end{array}$$

stetige *) Functionen von σ. Setzt man also $s - \sigma = \Delta$, so erhält man für die Coordinaten

$$(\gamma.) \qquad \begin{array}{l} x = \mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(\sigma + \Delta) , \\ y = \mathfrak{G}(s) = \mathfrak{G}(\sigma + \Delta) \end{array}$$

nach bekanntem Satze folgende Darstellungen:

$$(\delta.) \qquad \begin{array}{l} x = \mathfrak{F}(\sigma) + \frac{\Delta}{1} \mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) , \\ y = \mathfrak{G}(\sigma) + \frac{\Delta}{1} \mathfrak{G}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) , \end{array}$$

wo ϑ_1, ϑ_2 unbekannte positive echte Brüche vorstellen. Aus $(\beta.)$, $(\delta.)$ folgt durch Subtraction:

$$(\varepsilon.) \qquad \begin{array}{l} \Xi = \xi - x = -\Delta \left(\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2} \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) \right) , \\ \mathrm{H} = \eta - y = -\Delta \left(\mathfrak{G}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2} \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) \right) , \end{array}$$

und hieraus, unter Zuziehung der Formeln $(\beta.)$:

$$(\zeta.) \qquad \Xi \eta' - \mathrm{H} \xi' = \frac{\Delta^2}{2} \left(\mathfrak{F}'(\sigma) \mathfrak{G}''(\sigma + \vartheta_2 \Delta) - \mathfrak{G}'(\sigma) \mathfrak{F}''(\sigma + \vartheta_1 \Delta) \right) .$$

Substituirt man aber diese Werthe $(\varepsilon.)$, $(\zeta.)$ in $(\alpha.)$, und beachtet man dabei die bekannte Relation:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1 , \quad \text{d. i.} \quad (\mathfrak{F}'(\sigma))^2 + (\mathfrak{G}'(\sigma))^2 = 1 , \quad [\text{vgl. } (D). \text{ pag. } 4] ,$$

so hebt sich Δ^2 fort; und man erhält, indem man das zurückbleibende Δ durch seinen eigentlichen Werth $s - \sigma$ ersetzt, die Formel:

*) Man vergl. z. B. die Note pag. 31.

$$(\eta.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}=\frac{\frac{1}{2}\Big(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma_2)-\mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma_1)\Big)}{1+\frac{s-\sigma}{1}\Big(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma_1)+\mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma_2)\Big)+\Big(\frac{s-\sigma}{2}\Big)^2\Big((\mathfrak{F}''(\sigma_1))^2+(\mathfrak{G}''(\sigma_2))^2\Big)},$$

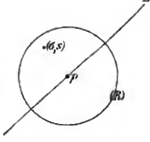
in welcher σ_1 und σ_2 Abbreviaturen sind für $\sigma+\vartheta_1\Delta$ und $\sigma+\vartheta_2\Delta$. Demgemäss ist:

$$(\vartheta.)\quad \begin{aligned}\sigma_1&=\sigma+\vartheta_1(s-\sigma)\,,\\ \sigma_2&=\sigma+\vartheta_2(s-\sigma)\,;\end{aligned}$$

so dass also σ_1 und σ_2 Grössen vorstellen, deren Werthe zwischen σ und s liegen. Mittelst der Formel $(\eta.)$ wollen wir jetzt das Verhalten der Function $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ in irgend einem Punkte p der durch den Anfangspunkt gehenden Hauptlinie L [vgl. die vorhergehende und auch die folgende Figur] näher untersuchen.

Für diesen Punkt p sind die beiden rechtwinkligen Coordinaten σ_p und s_p einander gleich:

$$(\iota.)\quad \sigma_p=s_p\,.$$



Beschreibt man nun um p, als Centrum, einen kleinen Kreis vom Radius R, so gelten für jedweden Punkt (σ, s) *innerhalb* dieses Kreises die Formeln:

$$(\varkappa.)\quad \text{abs}\,(\sigma-\sigma_p)\leqq R\,,\quad \text{abs}\,(s-s_p)\leqq R\,.$$

Ferner ergiebt sich mit Rücksicht auf $(\iota.)$: $s-\sigma=(s-s_p)-(\sigma-\sigma_p)$, also mit Hülfe von $(\varkappa.)$:

$$(\lambda.)\quad \text{abs}\,(s-\sigma)\leqq 2\,R\,.$$

Ferner ist nach $(\vartheta.)$: $(\sigma_1-\sigma_p)=(\sigma-\sigma_p)+\vartheta_1(s-\sigma)$, also mit Rücksicht auf $(\varkappa.)$, $(\lambda.)$:

$$(\mu.)\quad \begin{cases}\text{abs}\,(\sigma_1-\sigma_p)\leqq 3\,R\,; & \text{und ebenso ergiebt sich:}\\ \text{abs}\,(\sigma_2-\sigma_p)\leqq 3\,R\,.\end{cases}$$

All' diese Formeln $(\varkappa.)$, $(\lambda.)$, $(\mu.)$ *gelten für jedweden Punkt* (σ, s) *innerhalb jenes um* p *mit dem Radius* R *beschriebenen Kreises, welch' letzterer mit* (p, R) *bezeichnet sein mag.*

Da nun die Functionen $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, wie bei $(\beta.)$ betont wurde, durchweg *stetig*, mithin auch durchweg *endlich* sind, so wird man, in Anbetracht der Relation $(\lambda.)$:

$$\text{abs}\,(s - \sigma) \leqq 2R\,,$$

durch Verkleinerung des Radius R dafür sorgen können, dass der *Nenner* des Ausdruckes (η.) für alle innerhalb des Kreises (p, R) vorhandenen Punkte (σ, s) beliebig wenig von 1 abweicht.

Sodann wird man ferner, in Anbetracht der Stetigkeit von $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ und in Anbetracht der Relationen ($\varkappa$.), (μ.):

$$\text{abs}\,(\sigma - \sigma_p) \leqq R\,,$$
$$\text{abs}\,(\sigma_1 - \sigma_p) \leqq 3R\,,$$
$$\text{abs}\,(\sigma_2 - \sigma_p) \leqq 3R\,,$$

durch weitere Verkleinerung von R dafür sorgen können, dass der *Zähler* des Ausdruckes (η.) für alle innerhalb des Kreises (p, R) vorhandenen Punkte (σ, s) Schwankungen darbietet, die unterhalb eines beliebig gegebenen Kleinheitsgrades bleiben.

Beides zusammengefasst, ergiebt sich, dass jener Ausdruck (η.) innerhalb des Kreises (p, R) Schwankungen besitzt, die durch Verkleinerung von R beliebig klein gemacht werden können. *Folglich ist die Function* $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ *im Punkte* p *stetig.*

Solches gilt für jedweden Punkt p der Hauptlinie L, und also, in Folge der vorhandenen Periodicität, auch für die Punkte aller übrigen Hauptlinien. Dass andererseits die Function $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ auch stetig ist in all' denjenigen Punkten (σ, s), die *nicht* auf einer Hauptlinie liegen, — darauf ist schon vorhin aufmerksam gemacht worden. Folglich ist die Function $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ auf der σs-Ebene *allenthalben stetig.* Gleiches gilt selbstverständlich von $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten und des allgemeinen Satzes. — Der Beweis des zweiten Satzes ist dem des ersten analog. Es mögen daher hier nur einige Andeutungen ihre Stelle finden.

Aus den Voraussetzungen (7.) des zweiten Satzes ergiebt sich sofort, dass die acht Functionen

$$(\alpha.)\quad \begin{array}{llll} \xi = \mathfrak{F}(\sigma)\,, & \xi' = \mathfrak{F}'(\sigma)\,, & \xi'' = \mathfrak{F}''(\sigma)\,, & \xi''' = \mathfrak{F}'''(\sigma)\,, \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma)\,, & \eta' = \mathfrak{G}'(\sigma)\,, & \eta'' = \mathfrak{G}''(\sigma)\,, & \eta''' = \mathfrak{G}'''(\sigma) \end{array}$$

stetige Functionen sind. Setzt man also $s - \sigma = \Delta$, so ergeben sich z. B. für die Grössen

$$x = \mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(\sigma + \Delta),$$
$$x' = \mathfrak{F}'(s) = \mathfrak{F}'(\sigma + \Delta)$$

die Darstellungen:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} x &= \mathfrak{F}(\sigma) + \frac{\Delta}{1}\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta^2}{2}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^3}{6}\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_1\Delta),\\ x' &= \mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{1}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^2}{2}\mathfrak{F}'''(\sigma + \Theta_1\Delta), \end{aligned}$$

wo ϑ_1, Θ_1 positive echte Brüche vorstellen. Demgemäss wird:

$$(\gamma.)\qquad \Xi = \xi - x = -\Delta\left(\mathfrak{F}'(\sigma) + \frac{\Delta}{2}\mathfrak{F}''(\sigma) + \frac{\Delta^2}{6}\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_1\Delta)\right).$$

Substituirt man jetzt die Werthe (α.), (β.), (γ.), sowie auch die mit (β.), (γ.) analogen Werthe der Grössen y, y', H, in den Formeln (5.), und beachtet man dabei die Relation

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1, \quad \text{d. i.} \quad (\mathfrak{F}'(\sigma))^2 + (\mathfrak{G}'(\sigma))^2 = 1,$$

so erhält man z. B.

$$(\delta.)\qquad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2} = \frac{U + U_1\Delta + U_2\Delta^2 \cdots + U_5\Delta^5}{1 + W_1\Delta + W_2\Delta^2 \cdots + W_8\Delta^8},$$

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s} = \frac{V + V_1\Delta + V_2\Delta^2 \cdots + V_4\Delta^4}{1 + W_1\Delta + W_2\Delta^2 \cdots + W_8\Delta^8},$$

wo die U, V, W Grössen vorstellen, die durchweg *endlich* bleiben; so dass also die absoluten Werthe dieser U, V, W durchweg $< M$ sind, wo M eine bestimmte endliche Constante vorstellt. Ueberdies erhält man z. B., was die Formel (δ.) betrifft, für das *erste Glied* des Zählers den Werth:

$$(\zeta.)\qquad \begin{aligned} U = &-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma) - \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma)\right)\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{F}''(\sigma) + \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{G}''(\sigma)\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\mathfrak{F}'(\sigma)\mathfrak{G}'''(\sigma + \vartheta_2\Delta) - \mathfrak{G}'(\sigma)\mathfrak{F}'''(\sigma + \vartheta_1\Delta)\right), \end{aligned}$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 unbekannte positive echte Brüche vorstellen, von denen der erstere identisch ist mit dem in (β.).

Markirt man nun, ebenso wie vorhin, in der σs-Ebene auf der Hauptlinie L einen Punkt p, und beschreibt man um p einen kleinen Kreis vom Radius R, so kann man durch Verkleinerung von R dafür sorgen, dass die Differenz $\Delta = s - \sigma$ für alle innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte beliebig klein wird, dass mithin der Ausdruck (δ.) für all' diese Punkte beliebig wenig von U abweicht.

Sodann aber kann man durch weitere Verkleinerung von R dafür sorgen, dass die Schwankungen dieses U (ζ.) für alle Punkte innerhalb jenes Kreises beliebig klein werden. Folglich ist die durch (δ.) dargestellte Function $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}$ eine Function von (σ, s), welche im Punkte p *stetig* ist. U. s. f.

In solcher Art gelangt man zur Constatirung des *zweiten* Satzes, und in ähnlicher Art auch zur Constatirung des in (8.), (8a.) angegebenen *allgemeinen* Satzes.

Beiläufige Betrachtungen. — Die von s nach σ gehende Secante (Fig. pag. 63) verwandelt sich, sobald man s nach σ rücken lässt, in die in σ an die Curve gelegte *Tangente*. Mit andern Worten: der Winkel γ verwandelt sich für $E = 0$ in das Azimuth θ der genannten Tangente. Demgemäss steht zu vermuthen, dass auch die Ableitungen $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial s}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\partial s}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}$, etc. für $E = 0$ in einfache Beziehungen treten werden zu den Ableitungen $\theta' = \frac{d\theta}{d\sigma}$, $\theta'' = \frac{d^2\theta}{d\sigma^2}$, etc. Um hierauf näher einzugehen, notiren wir zuvörderst die aus (3.) und (2.) pag. 64 entspringenden Formeln:

$$(A.)\qquad \begin{aligned} E\cos\gamma &= \xi - x\ , \\ E\sin\gamma &= \eta - y\ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach σ:

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma}\cos\gamma - E\sin\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \xi' = \cos\theta\ ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma}\sin\gamma + E\cos\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \eta' = \sin\theta\ , \quad [\text{vgl. } (C.) \text{ pag. } 3],$$

oder, falls man diese Gleichungen nach $\frac{\partial E}{\partial\sigma}$ und $\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}$ auflöst:

$$(B.)\qquad E\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \sin(\theta-\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial\sigma} = \cos(\theta-\gamma)\ .$$

In analoger Weise ergeben sich aus (A.), falls man nicht nach σ, sondern nach s differenzirt, die analogen Formeln:

$$(C.)\qquad E\frac{\partial\gamma}{\partial s} = -\sin(t-\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial s} = -\cos(t-\gamma)\ ,$$

wo t das Azimuth der im Punkte s an die Curve gelegten Tangente vorstellt.

Differenzirt man jetzt die *erste* der beiden Formeln (*B.*) nochmals nach σ, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die *zweite*:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)+E\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}=\frac{\partial(\theta-\gamma)}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)\,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(D.)\qquad \frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\cos(\theta-\gamma)=E\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,.$$

Hieraus folgt, falls man abermals, und zwar einmal nach σ, das andere Mal nach s differenzirt, und dabei die Gleichungen (*B.*), (*C.*) *rechter* Hand berücksichtigt,

$$(E.)\qquad \frac{\partial^2(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma^2}\cos(\theta-\gamma)-\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\,\frac{\partial(\theta-\gamma)}{\partial\sigma}\sin(\theta-\gamma)=$$

$$=+\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\cos(\theta-\gamma)+E\frac{\partial^3\gamma}{\partial\sigma^3}\,,$$

$$(F.)\qquad \frac{\partial^2(-2\gamma)}{\partial\sigma\,\partial s}\cos(\theta-\gamma)-\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}\,\frac{\partial(-\gamma)}{\partial s}\sin(\theta-\gamma)=$$

$$=-\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\cos(t-\gamma)+E\frac{\partial^3\gamma}{\partial\sigma^2\,\partial s}\,;$$

wobei, was die Ableitung der letzten Formel betrifft, zu beachten ist, dass θ nur von σ abhängt, nicht aber von s.

Lässt man jetzt die beiden Punkte s und σ miteinander coincidiren, also $\gamma=\theta=t$ und $E=0$ werden, so gewinnen die Formeln (*D.*), (*E.*), (*F.*) die einfachere Gestalt:

$$(G.)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma}&=0\,,\\ \frac{\partial^2(\theta-2\gamma)}{\partial\sigma^2}&=\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,,\\ \frac{\partial^2(-2\gamma)}{\partial\sigma\,\partial s}&=-\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,,\end{aligned}\right\}\ \text{für } E=0\,;$$

und hieraus folgt sofort:

$$(H.)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}&=\frac{1}{2}\,\frac{d\theta}{d\sigma}=\frac{1}{2}\,\theta'\,,\\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}&=\frac{1}{3}\,\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}=\frac{1}{3}\,\theta''\,,\\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial s}&=\frac{1}{6}\,\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}=\frac{1}{6}\,\theta''\,,\end{aligned}\right\}\ \text{für } E=0\,.$$

In wie weit diese beiläufigen Betrachtungen, und namentlich die Formeln (*II.*) *zuverlässig* sind, wird man mittelst der vorhin aufgestellten Sätze (pag. 65) leicht zu beurtheilen im Stande sein.

§ 12.

Einige Hülfssätze.

Es sei A eine gegebene positive Constante. Ferner sei:

$$(1.)\qquad J(s)=\int_0^A \varphi(\sigma)\,F(\sigma,s)\,d\sigma \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F(\sigma,s)}{\partial s}=G(\sigma,s)\,;$$

und zwar mögen die Functionen $\varphi(\sigma)$, $F(\sigma,s)$, $G(\sigma,s)$ *periodisch*†) *sein, der Art, dass jede derselben ungeändert bleibt, sobald man* σ *oder* s *um die Constante* Σ *anwachsen lässt. Ueberdies sei vorausgesetzt, dass* $\varphi(\sigma)$ *längs der* σ*-Axe, und* $F(\sigma,s)$, $G(\sigma,s)$ *in der* σs*-Ebene überall stetig sind. Alsdann gelten folgende Sätze:*

Erster Satz. — *Die durch* (1.) *definirte Function* $J(s)$ *besitzt für jedwedes* s *einen bestimmten Differentialquotienten. Und dieser Differentialquotient ist darstellbar durch die Formel:*

$$(2.)\qquad \frac{dJ(s)}{ds}=\int_0^A \varphi(\sigma)\,G(\sigma,s)\,d\sigma\ .$$

Zweiter Satz. — *Der soeben genannte Differentialquotient ist eine durchweg stetige Function von* s.

Beweis des ersten Satzes. — Nach (1.) gilt für zwei beliebige Argumente s und s_1 die Formel:

$$(A.)\qquad \frac{J(s_1)-J(s)}{s_1-s}=\int_0^A \varphi(\sigma)\,\frac{F(\sigma,s_1)-F(\sigma,s)}{s_1-s}\,d\sigma\ .$$

Beachten wir nun, dass $F(\sigma,s)$ und $G(\sigma,s)$ nach unserer Voraussetzung *stetige* Functionen von s sind, und in der in (1.) angegebenen Beziehung zu einander stehen, so ergiebt sich nach bekanntem Satze:

$$\frac{F(\sigma,s_1)-F(\sigma,s)}{s_1-s}=G(\sigma,s^*)\,,$$

wo s^* einen unbekannten Mittelwerth zwischen s und s_1 vorstellt, der Art, dass entweder $s \leq s^* \leq s_1$ oder $s \geq s^* \geq s_1$ ist. Demgemäss kann man die Formel (*A.*) auch so schreiben:

†) Absichtlich beschränken wir uns nämlich bei Aufstellung dieser Hülfssätze auf solche Fälle, die weiterhin wirklich gebraucht werden.



$$\frac{J(s_1)-J(s)}{s_1-s} = \int_0^A \varphi(\sigma)\, G(\sigma, s^*) d\sigma \;,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$(B.)\qquad \frac{J(s_1)-J(s)}{s_1-s} - \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s) d\sigma = \int_0^A \varphi(\sigma) [G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)] d\sigma \;.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(C.)\qquad \text{abs}\left(\frac{J(s_1)-J(s)}{s_1-s} - \int_0^A \varphi(\sigma) G(\sigma, s) d\sigma\right) \leqq \mathsf{M}\int_0^A \text{abs}\,[G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)]\, d\sigma \;,$$

wo M den absolut grössten Werth der Function $\varphi(\sigma)$ vorstellt.

Versteht man nun unter ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, und unterwirft man, bei festgehaltenem s, das Argument s_1 der Bedingung

$$(D.)\qquad \text{abs}\,(s_1 - s) \leqq K \;,$$

wo K eine positive Constante sein soll, so wird man durch gehörige Verkleinerung dieser Constante K dafür sorgen können, dass die rechte Seite der Formel ($C.$) für sämmtliche der Bedingung ($D.$) entsprechenden Werthe von s_1 kleiner als ε bleibt. Denkt man sich diese (bis jetzt noch unbewiesene) Behauptung als richtig constatirt, so ergiebt sich alsdann aus der Formel ($C.$) sofort, dass die Function $J(s)$ im Punkte s einen Differentialquotienten besitzt, und dass der Werth dieses Differentialquotienten durch das in ($C.$) auf der linken Seite stehende Integral dargestellt ist. Kurz, es ergiebt sich alsdann aus jener Formel ($C.$) die Richtigkeit des hier zu beweisenden ersten Satzes.

Um nun jene Behauptung als richtig zu constatiren, bemerken wir zuvörderst, dass die periodische Function $G(\sigma, s)$, zufolge unserer Voraussetzungen, in der σs-Ebene *allenthalben stetig* ist. Nach dem Heine-Lüroth'schen Satze muss daher eine positive Constante R von solcher Kleinheit existiren, dass die Werthdifferenz der Function $G(\sigma, s)$ für jedwedes R-Punktpaar †)

$$< \frac{\varepsilon}{\mathsf{M}A}$$

†) Unter einem *R-Punktpaar* verstehe ich irgend zwei Punkte (σ', s') und (σ'', s''), deren gegenseitiger Abstand $\leqq R$ ist. Man erhält also eine anschauliche Vorstellung eines solchen R-Punktpaares, wenn man sich zwei Punkte denkt, die

ist. Nehmen wir jetzt die so definirte Constante R an Stelle von K in der Bedingung ($D.$), und beachten wir, dass s^* stets zwischen s und s_1 liegt, so haben wir es alsdann nur noch mit solchen Argumenten s, s_1 und s^* zu thun, die den Formeln entsprechen:

$$\text{abs}\,(s_1 - s) \leqq R\,,$$

$$\text{abs}\,(s^* - s) \leqq R\,.$$

Aus der letzten Formel folgt sofort, dass die beiden Punkte (σ, s) und (σ, s^*), welchen Werth man dabei dem σ auch zuertheilen mag, stets ein R-Punktpaar bilden, dass mithin die Werthdifferenz der Function $G(\sigma, s)$ für diese beiden Punkte (σ, s) und (σ, s^*) stets $< \frac{\varepsilon}{\mathsf{M}A}$ ist. Um die Hauptsache hervorzuheben: Nimmt man für K die vorhin definirte Constante R, so wird stets die Relation stattfinden:

$$\text{abs}\,[G(\sigma, s^*) - G(\sigma, s)] < \frac{\varepsilon}{\mathsf{M}A}\,,$$

und es wird daher alsdann die rechte Seite der Formel ($C.$) stets $< \varepsilon$ sein. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Es ist nachzuweisen, dass die Function

$$(L.) \qquad U(s) = \int_0^A \varphi(\sigma)G(\sigma, s)d\sigma$$

eine *stetige* Function von s ist.

Nun ergiebt sich aus ($L.$) ohne Weiteres:

$$(M.) \qquad U(s_1) - U(s) = \int_0^A \varphi(\sigma)\,[G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)]\,d\sigma\,,$$

mithin:

$$(N.) \qquad \text{abs}\,[U(s_1) - U(s)] \leqq \mathsf{M}\int_0^A \text{abs}\,[G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)]\,d\sigma\,,$$

wo wiederum M den absolut grössten Werth der Function $\varphi(\sigma)$ vorstellt.

---

durch einen biegsamen Faden von der Länge R an einander gefesselt, im Uebrigen aber von willkürlicher Lage sind. — Unter der *Werthdifferenz* der Function $G(\sigma, s)$ für ein solches R-Punktpaar ist, was wohl kaum noch der Erwähnung bedarf, die Differenz derjenigen beiden Werthe zu verstehen, welche die Function $G(\sigma, s)$ in dem einen und dem andern Punkte dieses Paares besitzt.



Ist nun ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad, und unterwirft man, bei festgehaltenem s, das Argument s_1 der Bedingung:

$$\text{abs}(s_1 - s) \leqq K,$$

so kann man, ähnlich wie vorhin, diese Constante K so klein machen, dass die Differenz $G(\sigma, s_1) - G(\sigma, s)$, welchen Werth man dabei dem σ auch zuertheilen mag, ihrem absoluten Betrage nach stets $< \frac{\varepsilon}{M.A}$ bleibt, und dass also die rechte Seite der Formel (N.) stets $< \varepsilon$ bleibt. — *Q. e. d.*

Dritter Satz. — *Es seien zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, die auf der x-Axe in Erstreckung eines gegebenen Intervalls ab stetig sind. Ausserdem sei bekannt, dass die Function $\varphi(x)$ in jedem Punkte innerhalb ab den Differentialquotienten von $f(x)$ repräsentirt. — Alsdann wird solches auch der Fall sein in den beiden Endpunkten des Intervalls, d. i. in a und in b.*

Beweis. — Markirt man irgendwo *innerhalb* ab einen Punkt a_1, und sodann irgendwo *innerhalb* aa_1 einen Punkt x, so muss, zufolge der gemachten Voraussetzungen,

a $\quad\xi\quad$ x $\quad a_1\quad$ b

innerhalb ax ein Punkt ξ existiren, welcher der Formel entspricht:

$$(p.) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(\xi);$$

wie sich solches aus bekannten Sätzen*) leicht ergiebt.

Es sei nun ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad, und man denke sich, was zufolge der gemachten Voraussetzungen stets möglich ist, den Punkt a_1 so nahe an a gelegen, dass die Schwankung der Function $\varphi(x)$ in Erstreckung des Intervalls aa_1 kleiner als ε ist. Alsdann geht die Formel (p.) über in:

$$(q.) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(a) + \Theta\varepsilon,$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch vorstellt. Diese für jeden Punkt x *innerhalb* aa_1 gültige Formel (q.) zeigt aber sofort, dass $\varphi(a)$ der Differentialquotient von $f(x)$ im Punkte a ist. — *Q. e. d.*

*) Man vgl. z. B. das Werk von Tannery: *Introduction a la Théorie des Fonctions*, Paris 1886, pag. 232.

§ 13.

Ein wichtiges Theorem, das durch die Methode des arithmetischen Mittels für die Ableitungen der Fundamentalfunctionen sich ergiebt.

Wir beginnen mit einem bereits früher bewiesenen Satze [vgl. Abh. I, pag. 77 — 79, sowie auch die dortige zweite Bemerkung auf pag. 115]. Beschränken wir uns dabei, was nur der Einfachheit willen geschieht, auf den Fall, dass die Curve *keine* Ecken hat, so lautet jener Satz folgendermassen:

Hauptsatz. — *Ist längs der gegebenen Curve eine Function der Bogenlänge $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(1.) *θ und f stetige Functionen von σ sind, und dass θ' überall $\geqq 0$ ist,*

so existiren stets zwei den Werthen f entsprechende Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, d. h. zwei Fundamentalfunctionen Φ und Ψ dieser Gebiete, deren Randwerthe mit jenen Werthen f identisch sind. Diese Functionen sind wirklich construirbar. Und zwar ist hinsichtlich ihrer Construction Dreierlei zu bemerken:

I. — *Denkt man sich von f aus der Reihe nach die Functionen gebildet:*

$$(2.)\quad \begin{aligned} f_s^{(1)} &= \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_s\,, \\ f_s^{(2)} &= \frac{1}{\pi}\int f^{(1)}(d\sigma)_s\,, \\ f_s^{(3)} &= \frac{1}{\pi}\int f^{(2)}(d\sigma)_s\,, \end{aligned}$$

etc. etc.,

so werden diese $f_s^{(n)}$ für $n = \infty$ gegen eine bestimmte endliche Constante C convergiren.

II. — Setzt man sodann:

$$(3.)\quad \begin{aligned} \xi &= +(C-f)+(C-f^{(1)})+(C-f^{(2)})++\cdots\cdot, \\ \eta &= -(C-f)+(C-f^{(1)})-(C-f^{(2)})+-\cdots\cdot, \end{aligned}$$

so werden diese Reihen stets convergent, und die durch sie definirten Functionen ξ, η stetige Functionen der Bogenlänge sein).*

*) In Betreff der Formeln (2.), (3.) sei Folgendes bemerkt: Sind auf der ge-



III. — *Mittelst der Constante C und der Functionen ξ, η sind nun endlich jene Fundamentalfunctionen Φ und Ψ für jeden Punkt a* **innerhalb** *$\mathfrak{A}$, und für jeden Punkt j* **innerhalb** *$\mathfrak{J}$ folgendermassen darstellbar:*

$$\text{(4.)} \qquad \Phi_a = C + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_a \,, \qquad \Psi_j = C + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_j \,.$$

Es werden also z. B. für jedweden Curvenpunkt s die Convergenzwerthe Φ_{as} und Ψ_{js} mit dem in s vorgeschriebenem Werthe f_s **identisch sein.**

Bemerkung. — Dass dieser Satz bei unsern gegenwärtigen Betrachtungen d. h. für die von uns *determinirten* Curven (pag. 4) **ein absolut strenger ist**, geht hervor aus unseren früheren Erörterungen (pag. 22—25).

Aus den Formeln pag. 24 ergiebt sich mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Voraussetzungen (1.) sofort:

$$\text{(5.)} \qquad \int (d\sigma)_s = \pi \,,$$

sodass man also die Formeln (2.) auch so schreiben kann:

$$\text{(6.)} \qquad \begin{array}{ll|c|c}
 & & \text{I.} & \text{II.} \\
C - f_s^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f)(d\sigma)_s \,, & & +1 & +1 \\
C - f_s^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(1)})(d\sigma)_s \,, & & +1 & -1 \\
C - f_s^{(3)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(2)})(d\sigma)_s \,, & & +1 & +1 \\
C - f_s^{(4)} = \frac{1}{\pi}\int (C - f^{(3)})(d\sigma)_s \,, & & +1 & -1 \\
\text{etc.} \quad \text{etc.} & & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

---

gebenen Curve irgend zwei Punkte mit den Bogenlängen σ und s markirt, so bezeichnen wir die Werthe, welche die Function f in diesen beiden Punkten besitzt, mit $f(\sigma)$ und $f(s)$, oder auch mit f_σ und f_s. Und häufig werden wir dabei statt f_σ auch das *nackte* f schreiben. Ebenso verfahren wir bei allen andern Functionen der Bogenlänge, bei $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc., bei ξ, η, etc. Es ist also z. B.

$$\begin{cases} f_\sigma = f(\sigma) = f \,, \\ f_s = f(s) \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_\sigma = \xi(\sigma) = \xi \,, \\ \xi_s = \xi(s) \,. \end{cases}$$

Demgemäss sind in (2.) unter f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. die Werthe dieser Functionen im Punkte σ, d. i. an der Stelle des Curvenelementes $d\sigma$ zu verstehen; während die daselbst *linker* Hand befindlichen f_s, $f_s^{(1)}$, $f_s^{(2)}$, etc. dem Punkte s zugehören.

wo C dieselbe Constante sein soll, wie in (3.) und (4.). Multiplicirt man diese Gleichungen einmal mit den Factoren I., das andere Mal mit den Factoren II., und addirt jedesmal, so erhält man, mit Rücksicht auf (3.), die erste und zweite der folgenden beiden Formeln:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \xi_s - (C - f_s) &= + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_s \,, \\ \eta_s + (C - f_s) &= - \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_s \,. \end{aligned}$$

Zieht man nun von s aus zwei Strahlen nach den Punkten σ und $\sigma + d\sigma$, und bezeichnet man die Azimuthe dieser beiden Strahlen gegen die x-Axe mit γ und $\gamma + d\gamma$, so ist offenbar: $(d\sigma)_s = d\gamma$, oder genauer ausgedrückt:

$$(d\sigma)_s = \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\, d\sigma \,,$$

sodass man also die Formeln (7.) auch so schreiben kann:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \xi_s - (C - f_s) &= + \frac{1}{\pi}\int \xi \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\, d\sigma \,, \\ \eta_s + (C - f_s) &= - \frac{1}{\pi}\int \eta \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\, d\sigma \,. \end{aligned}$$

Lassen wir jetzt zu den Voraussetzungen (1.) noch die hinzutreten, dass θ' und θ'', ebenso wie θ selber, *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sein sollen, so werden (zweiter Satz pag. 65) die Grössen

$$(9.)\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\,,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial s}\,,\quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\,,\quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\,,\quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial s}$$

Functionen von (σ, s) sein, die in der σs-Ebene allenthalben *stetig* sind. Beachten wir aber dies, und beachten wir ausserdem [vgl. (3.)], dass ξ und η *stetige* Functionen von σ sind, so ergiebt sich, auf Grund der Sätze pag. 73, aus den Formeln (8.) Dreierlei, nämlich erstens, dass die Functionen

$$\xi_s - (C - f_s) \quad \text{und} \quad \eta_s + (C - f_s)$$

nach der Bogenlänge s differenzirbar sind, ferner zweitens, dass diese Differentialquotienten die Werthe haben:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} &= + \frac{1}{\pi}\int \xi \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial s}\, d\sigma \,, \\ \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds} &= - \frac{1}{\pi}\int \eta \frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial s}\, d\sigma \,, \end{aligned}$$



und endlich drittens, dass diese Differentialquotienten *stetige* Functionen von s sind. Also folgender

Erster Zusatz. — *Hält man fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des Hauptsatzes* (pag. 77), *indem man zu den dortigen Voraussetzungen noch die hinzufügt, dass*

(11.) *θ' und θ'', ebenso wie θ selber, stetige Functionen der Bogenlänge σ sein sollen,*

so wird, als Folge hiervon, zu der schon früher vorhandenen Stetigkeit von ξ, η noch die Existenz und Stetigkeit der Differentialquotienten):*

$$\frac{d(\xi+f)}{d\sigma} \quad und \quad \frac{d(\eta-f)}{d\sigma} \tag{12.}$$

hinzutreten. Dabei aber bleibt die Existenz und Stetigkeit von $\frac{d\xi}{d\sigma}$ und $\frac{d\eta}{d\sigma}$ ebenso fraglich, wie die Existenz und Stetigkeit von $\frac{df}{d\sigma}$.

Fügt man jetzt zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, dass der Differentialquotient $f' = \frac{df}{d\sigma}$ *existirt*, und dass derselbe eine *stetige* Function von σ ist, so ergiebt sich auf Grund des Satzes (12.) sofort, dass $\frac{d\xi}{d\sigma}$ und $\frac{d\eta}{d\sigma}$ ebenfalls existiren, und ebenfalls stetige Functionen von σ sind; sodass man also alsdann den Formeln (10.) die Gestalt geben darf:

$$\frac{d(\xi_s+f_s)}{ds} = +\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)d\sigma - \frac{1}{\pi}\int\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,,$$

$$\frac{d(\eta_s-f_s)}{ds} = -\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\eta\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,.$$

Diese Formeln aber reduciren sich, weil die Grössen

$$\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s},\quad \eta\frac{\partial\gamma}{\partial s},\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\eta\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right),$$

ebenso wie ξ, η, $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$ und die Ausdrücke (9.), periodische und stetige Functionen von σ sind, auf folgende:

*) Vgl. die Note pag. 77, 78.

$$(13.)\quad \begin{aligned} \frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} &= -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,, \\ \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds} &= +\frac{1}{\pi}\int \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

An diese Formeln (13.) schliessen sich analoge Folgerungen wie vorhin an die Formeln (8.). In der That ergiebt sich aus den Formeln (13.), und zwar wiederum auf Grund der Sätze pag. 73, Dreierlei, nämlich erstens, dass die Ausdrücke

$$\frac{d(\xi_s + f_s)}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d(\eta_s - f_s)}{ds}$$

nach der Bogenlänge s differenzirbar sind; ferner zweitens, dass diese Differentialquotienten die Werthe haben:

$$(14.)\quad \begin{aligned} \frac{d^2(\xi_s + f_s)}{ds^2} &= -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\,d\sigma\,, \\ \frac{d^2(\eta_s - f_s)}{ds^2} &= +\frac{1}{\pi}\int \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\,d\sigma\,; \end{aligned}$$

und endlich drittens, dass diese Differentialquotienten *stetige* Functionen von s sind. Also folgender

Zweiter Zusatz. — *Fügt man zu den im Hauptsatze und im ersten Zusatze gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, dass*

(15.) *der Differentialquotient* $f' = \frac{df}{d\sigma}$ *existirt, und dass derselbe eine stetige Function von* σ *ist,*

so tritt, als Folge hiervon, zur Existenz und Stetigkeit von ξ, η *auch noch die Existenz und Stetigkeit von*

$$(16.)\quad \frac{d\xi}{d\sigma}\,,\ \frac{d\eta}{d\sigma}\,,\ \frac{d^2(\xi + f)}{d\sigma^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2(\eta - f)}{d\sigma^2}$$

hinzu. Dabei aber bleibt die Existenz von $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$ *und* $\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$ *ebenso fraglich, wie die von* $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$.

Fügt man schliesslich zu den bis jetzt gemachten Voraussetzungen (1.), (11.), (15.) noch die hinzu, dass der Differentialquotient $f'' = \frac{d^2f}{d\sigma^2}$ *existiren*, und eine *abtheilungsweis stetige* Function von σ sein soll, so hat man alsdann in Betreff der Functionen θ und f im Ganzen folgende Voraussetzungen:

$$(P.)\quad \begin{cases} \theta,\ \theta',\ \theta'' \text{ stetig, und } \theta' \text{ überall } \geqq 0\,, \\ f,\ f' \text{ stetig, und } f'' \text{ abtheilungweise stetig;} \end{cases}$$

und in Betreff der Functionen ξ, η folgende Resultate:

(*R.*) ξ, η, ξ', η' stetig, und ξ'' η'' abtheilungsweis stetig*).

Aus diesen Resultaten (*R.*) folgt nun aber sofort, dass die in (1.) genannten Fundamentalfunctionen

$$\Phi_a = C + \frac{1}{\pi}\int \xi (d\sigma)_a ,$$

$$\Psi_j = C + \frac{1}{\pi}\int \eta (d\sigma)_j$$

dem Theorem $W\beta.$, (pag. 49) sich subordiniren, so dass man also zu folgendem wichtigen Satze gelangt:

Theorem**). — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(17.) *θ, θ', θ'' und f, f' stetige Functionen von σ sind, dass ferner f'' eine abtheilungsweis stetige Function von σ ist, und dass endlich θ' überall $\geqq 0$ ist,*

so werden die jenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ nicht allein existiren, sondern zugleich auch von solcher Beschaffenheit sein, dass die vier Ausdrücke

(18.) $$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_a , \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_j , \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_j ,$$

inclusive ihrer Convergenzwerthe, wiederum vier theils zu $\mathfrak{A}$ theils zu $\mathfrak{J}$ gehörige Fundamentalfunctionen repräsentiren.

Uebrigens kann man diesem Theorem, welches die Grundlage der weiteren Untersuchungen bildet, wie man leicht übersieht, auch folgende, vielleicht noch etwas durchsichtigere Fassung geben:

Andere Form des Theorems. — *Sind die Voraussetzungen (17.) erfüllt, so existiren drei Fundamentalfunctionen Φ, Φ_1, Φ_2 des Gebietes $\mathfrak{A}$, von denen die erste die vorgeschriebenen Randwerthe f*

---

*) In der That ergeben sich diese Resultate ohne Weiteres aus dem letzten Zusatze, falls man nur beachtet, dass die Differentiationen nach σ augenblicklich durch *Accente* angedeutet sind.

**) Dieses wichtige Theorem wurde bereits vor zehn Jahren vom Verf. ohne Beweis mitgetheilt in den Ber. d. Kgl. Sächs. G. d. W., 1878, pag. 50 u. 52. Man vgl. auch die Math. Ann., Bd. 16, pag. 428.

besitzt, während gleichzeitig für jedweden von der Curve getrennten Punkt $a(x, y)$ *die Relationen stattfinden:*

$$(19.)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_2 . \quad (!)$$

Desgleichen werden alsdann drei Fundamentalfunctionen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 *des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *existiren, die für jedweden von der Curve getrennten Punkt* $j(x, y)$ *den Relationen entsprechen*

$$(20.)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_1 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_2 , \quad (!)$$

und von denen die erste, nämlich Ψ, *die vorgeschriebenen Randwerthe* f *besitzt.*

Die Formeln (19.), (20.) beziehen sich, wie durch das Zeichen (!) angedeutet ist, nur auf solche Punkte, die von der Curve durch irgend welchen, wenn auch noch so kleinen, Zwischenraum *getrennt* sind. Und es bleibt also bei dem vorstehenden Theorem die Existenz und Beschaffenheit der Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ für solche Punkte, die *auf* der Curve liegen, völlig dahingestellt.

Uebrigens lässt sich leicht zeigen, dass die genannten Ableitungen, wenn auch die Voraussetzungen (17.) erfüllt sind, in einzelnen Punkten der gegebenen Curve *nicht* existiren. Ist z. B. die Curve ein Kreis, und denkt man sich an diesen Kreis eine Tangente L gelegt, parallel der x-Axe, so wird die Function Ψ (die Fundamentalfunction des *innern* Gebietes) längs der Linie L nur in einem einzigen Punkte, nämlich nur im Berührungspunkte definirt sein. Folglich wird der Differentialquotient $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ in diesem Berührungspunkte *nicht* existiren; so dass also dieses $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, auf den Berührungspunkt angewendet, ein leeres Zeichen sein würde, ohne irgend welchen Sinn. U. s. w.

§ 14.

Weitere Sätze über die Ableitungen der Fundamentalfunctionen.

Die durch die letzten Worte des vorigen Paragraphs angeregten Fragen finden, insoweit sie das innere Gebiet $\mathfrak{J}$ betreffen, ihre Beantwortung durch folgende Sätze:



Erster Satz. — *Es mag vorausgesetzt sein, dass für das von der gegebenen Curve umschlossene Gebiet* $\mathfrak{J}$

(1.) *drei Fundamentalfunctionen* U, U_1, U_2 *existiren, welche in jedwedem Punkte* (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ *den Relationen entsprechen:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 . \quad (!)$$

Alsdann wird für jeden Punkt p innerhalb $\mathfrak{J}$ *und für jede von p ausgehende Richtung r die Formel stattfinden:*

$$\frac{dU}{dr} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma , \tag{2.}$$

wo γ *das Azimuth der Richtung r gegen die x-Axe vorstellt.*

Und diese Formel (2.) *wird auch dann noch gültig sein, wenn p am Rande von* $\mathfrak{J}$ *liegt, vorausgesetzt, dass man zur Richtung r ein dem Gebiete* $\mathfrak{J}$ *angehörendes Linienelement pq wählt, welches mit dem Rande von* $\mathfrak{J}$ *nur allein den Punkt p gemein hat. Dabei bleibt es übrigens gleichgültig, ob dieses Linienelement pq in p mit dem Rande irgend welchen Winkel macht, oder ob es den Rand daselbst tangirt.*

Zweiter Satz. — *Fügt man zur Voraussetzung* (1.) *noch die hinzu, dass*

(3.) θ *und* θ' *stetige Functionen der Bogenlänge* σ *sind,*

so wird die Function U in jedwedem Randpunkte p einen Differentialquotienten nach der Bogenlänge besitzen. Und zwar wird derselbe den Werth haben:

$$\frac{dU}{d\sigma} = U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta , \tag{4.}$$

wo θ *das Azimuth der in p an die Curve gelegten Tangente gegen die x-Axe vorstellt.*

Beweis des ersten Satzes. — Für *innere* Punkte p bedarf die Richtigkeit des Satzes keiner Erläuterung. Von hier aus aber gelangt man alsdann zur Constatirung des Satzes für irgend einen *Rand*punkt p durch Anwendung des auf pag. 76 bewiesenen Hülfssatzes.

Beweis des zweiten Satzes. — Für die Randcurve von $\mathfrak{J}$ gelten die Gleichungen [(*B.*), (*C.*) pag. 3]:

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{F}(\sigma) , \\ \eta = \mathfrak{G}(\sigma) , \end{cases} \qquad (\beta.) \quad \begin{cases} \xi' = \cos\theta , \\ \eta' = \sin\theta ; \end{cases}$$

so dass also ξ, η und θ gegebene Functionen von σ sind. Setzt man aus diesen Functionen, unter Hinzunahme irgend einer positiven Constante A, die beiden Ausdrücke zusammen:

$$(\gamma.)\qquad \begin{cases} x = \xi - A \sin\theta \ , \\ y = \eta + A \cos\theta \ , \end{cases}$$

so sind die so definirten Grössen x, y gleichfalls gegebene Functionen von σ. Ebenso wie nun die beiden Formeln (α.) die simultanen Gleichungen der *Randcurve* vorstellen, ebenso werden die beiden Formeln (γ.) die simultanen Gleichungen einer gewissen *Parallelcurve* sein, nämlich einer Curve, die, innerhalb $\mathfrak{J}$ liegend, jene Randcurve im constanten Abstande A begleitet. Aus (γ.) und mit Rücksicht auf (β.) ergiebt sich:

$$(\delta.)\qquad \begin{cases} dx = (1 - A\theta')\cos\theta\, d\sigma \ , \\ dy = (1 - A\theta')\sin\theta\, d\sigma \ , \quad \text{mithin:} \quad dx : dy = \cos\theta : \sin\theta \ ; \end{cases}$$

wodurch bestätigt wird, dass die neue Curve der Randcurve parallel ist.

Nach unserer Voraussetzung (3.) sind θ, θ' *stetig*, mithin auch durchweg *endlich*. Demgemäss wird man die positive Constante A so klein machen können, dass die Differenz $(1 - A\theta')$ durchweg > 0 ist. Alsdann aber erhält man aus (δ.) für das dem Randelement $d\sigma$ correspondirende Element ds der Parallelcurve die Formel:

$$(\varepsilon.)\qquad ds = (1 - A\theta')\, d\sigma \ .$$

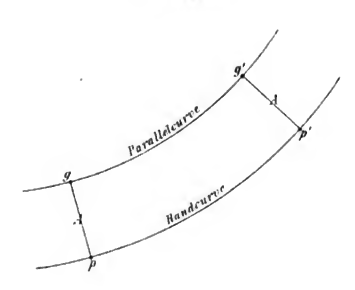
Errichten wir nun (vgl. die folgende Figur) in irgend zwei Randpunkten p und p' die jene Parallelcurve in den Punkten g und g' erreichenden Normalen pg und $p'g'$, und bezeichnen wir sodann irgend ein Element der gebrochenen Linie $pgg'p'$ mit ds, so ist zufolge des ersten Satzes:

$$\frac{dU}{ds} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma \ ,$$

wo γ das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe vorstellt. Integrirt man diese Formel über sämmtliche Elemente ds jener gebrochenen Linie, so folgt *):

*) Es ist im Auge zu behalten, dass U, U_1, U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *stetig* sind.





$$U' - U = \int_{pgg'p'} (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\, ds \ ,$$

wo U und U' die Werthe in p und p' vorstellen. Die den Perpendikeln $(pg) = A$ und $(g'p') = A$ entsprechenden Integraltheile sind, einzeln genommen, $\leqq 2MA$, falls man nämlich unter M den absolut grössten Werth der Functionen U, U_1, U_2 in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ versteht. Somit folgt:

$$U' - U = \Theta \cdot 4MA + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\, ds \ ,$$

wo Θ einen echten Bruch vorstellt, und wo die horizontalen Ueberstreichungen hervorheben sollen, dass die betreffenden Werthe der Parallelcurve angehören. Die letzte Formel ist mit Rücksicht auf (ε.) auch so darstellbar:

$$U' - U = \Theta \cdot 4MA + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\,(1 - A\theta')\, d\sigma \ ,$$

also, mit Rücksicht auf die für M gegebene Definition, auch so:

$$U' - U = \Theta \cdot 4MA + \Theta_1\, 2mMA(pp') + \int_{gg'} (\bar{U}_1 \cos\gamma + \bar{U}_2 \sin\gamma)\, d\sigma \ ,$$

wo m den absolut grössten Werth von θ', und (pp') die *Länge* der Randstrecke pp' bezeichnet, während Θ_1 wiederum einen echten Bruch vorstellt.

Subtrahirt man von der letzten Formel das über die Randstrecke pp' erstreckte Integral*):

$$(\zeta.) \qquad J = \int_{pp'} (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\, d\sigma \ ,$$

*) Das θ soll hier das Azimuth des Randelementes $d\sigma$ gegen die x-Axe vorstellen.

und beachtet man dabei, dass die dem Rande und der Parallelcurve zugehörigen Azimuthe θ und γ in je zwei einander correspondirenden Punkten *gleich gross* sind, so erhält man:

$$(\eta.) \quad (U'-U)-J=4MA\left(\Theta+\Theta_1\frac{m(pp')}{2}\right)+\int_{gg'}\left((\overline{U}_1-U_1)\cos\theta+(\overline{U}_2-U_2)\sin\theta\right)d\sigma,$$

wo U_1 und $\overline{U}_1$ die Werthe der Function U_1 in je zwei correspondirenden Punkten der Randcurve und der Parallelcurve vorstellen, und Analoges gilt von U_2 und $\overline{U}_2$.

Sind p und p' gegeben, so haben in (η.) die auf der *linken* Seite stehenden U, U', J völlig bestimmte feste Werthe, während die *rechte* Seite der Formel alsdann noch eine Constante A enthält, die wir nach Belieben verkleinern dürfen. Ist nun irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben, so können wir durch Verkleinerung von A zunächst dafür sorgen, dass der *erste* Theil der rechten Seite $< \frac{\varepsilon}{2}$ wird, sodann aber durch weitere Verkleinerung von A dafür sorgen, dass der *zweite* Theil der rechten Seite (d. i. das Integral) ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ wird†). Somit ergiebt sich, dass die *linke* Seite der Formel (η.) nothwendig $= 0$ ist. Wir erhalten daher $U' - U = J$, oder mit Rückblick auf (ζ.):

$$(\vartheta.) \qquad U' - U = \int_{pp'} (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\, d\sigma \;.$$

Nachdem diese Formel constatirt ist für jede beliebige Randstrecke pp', wollen wir jetzt irgend einen Kleinheitsgrad ε uns gegeben denken, und vom Randpunkte p aus (vgl. die folgende Figur) eine Randstrecke pq auftragen von solcher Kleinheit, dass die Schwankungen der Function

$$(\iota.) \qquad U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta$$

längs pq weniger als ε betragen. Bringen wir alsdann die Formel (ϑ.) auf einen *beliebigen Theil* pp' dieser Strecke pq in Anwendung, so erhalten wir sofort:

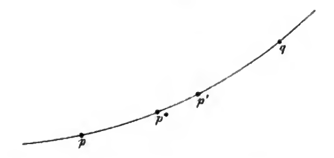
$$U' - U = (U_1^* \cos\theta^* + U_2^* \sin\theta^*) \int_{pp'} d\sigma$$

d. i.

$$(\varkappa.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} = U_1^* \cos\theta^* + U_2^* \sin\theta^* \;,$$

---

†) Vgl. die Note pag. 85.



wo die mit einem Stern versehenen Buchstaben die Werthe der betreffenden Functionen in einem unbekannten Randpunkte p^* zwischen p und p' vorstellen, während (pp') die Länge der Strecke pp' bezeichnet. Zufolge der Festsetzung (ι.) weicht der in ($\varkappa$.) auf der rechten Seite vorhandene zu p^* gehörige Werth von dem analogen zu p gehörigen Werthe $U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta$ um weniger als ε ab. *Somit* folgt aus ($\varkappa$.) sofort:

$$(\lambda.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} = (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta) + \Theta\varepsilon \ ,$$

wo Θ einen echten Bruch bezeichnet. Ist also irgend ein Kleinheitsgrad ε und überdies der Punkt p gegeben, so kann q so nahe an p gelegt werden, dass für jedweden der Randstrecke pq angehörigen Punkt p' die Formel stattfindet:

$$(\mu.) \qquad \text{abs}\left(\frac{U' - U}{(pp')} - (U_1 \cos\theta + U_2 \sin\theta)\right) < \varepsilon \ . \quad - \quad Q. e. d.$$

Zu den soeben bewiesenen Sätzen fügen wir noch folgenden hinzu, der von hervorragender Wichtigkeit ist für unsere weiteren Untersuchungen.

Dritter Satz. — *Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

$$(5.) \qquad \theta,\ \theta' \ \textit{stetige Functionen der Bogenlänge}\ \sigma\ \textit{sind.}$$

Ueberdies sei vorausgesetzt, dass für das von dieser Curve umschlossene Gebiet $\mathfrak{J}$ drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 existiren, die in jedwedem Punkte (x, y) innerhalb $\mathfrak{J}$ den Formeln entsprechen:

$$(6.) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \ . \quad (!)$$

Markirt man nun einen beliebigen Punkt p des Gebietes $\mathfrak{J}$ — einerlei ob derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegt — und

versteht man unter ε einen willkürlich gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man um p, als Centrum, stets einen Kreis von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{J}$ gehörigen und innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte p' die Formel stattfindet:

$$\text{abs}\left(\frac{U'-U}{(pp')} - (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\right) < \varepsilon\,, \tag{7.}$$

wo (pp') die Länge der von p und p' begrenzten geraden Linie, und γ das Azimuth dieser Linie gegen die x-Axe vorstellt. Dabei bezeichnet U' den Werth in p', während U selber, sowie auch U_1 und U_2, die Werthe der betreffenden Functionen in p vorstellen.

Beweis des Satzes für innere Punkte. — Liegt p *innerhalb* $\mathfrak{J}$, so kann der Kreis gleich von Anfang so klein gedacht werden, dass er ebenfalls völlig *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt. Sodann aber können wir durch weitere Verkleinerung des Kreisradius dafür sorgen, dass die Schwankungen der Functionen

$$U,\ U_1,\ U_2 \tag{a.}$$

innerhalb des Kreises durchweg $< \frac{\varepsilon}{2}$ sind, wo ε den gegebenen Kleinheitsgrad vorstellt. Markiren wir jetzt innerhalb des Kreises einen beliebigen Punkt p', und bezeichnen wir die gerade Linie pp' mit r, und irgend ein Element derselben mit dr, so ist nach dem ersten Satze (pag. 84):

$$\frac{dU}{dr} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma\,,$$

wo γ das Azimuth der Linie $r = (pp')$ vorstellt. Hieraus folgt durch Integration über alle Elemente dr dieser Linie:

$$U' - U = \int_{pp'} (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\, dr\,,$$

d. i.

$$U' - U = (U_1^* \cos\gamma + U_2^* \sin\gamma) \int_{pp'} dr\,,$$

d. i.

$$\frac{U'-U}{(pp')} = U_1^* \cos\gamma + U_2^* \sin\gamma\,,$$

wo U und U' die Werthe von U in p und p' vorstellen, während die mit einem Stern versehenen Buchstaben die Werthe der betreffenden Functionen in einem unbekannten Punkte p^* zwischen p

und p' repräsentiren. Zufolge der Festsetzung (*a*.) ist nun aber die letzte Formel auch so darstellbar:

$$(b.) \qquad \frac{U' - U}{(pp')} = (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma) + \Theta\varepsilon\ ,$$

wo alsdann U_1 und U_2 die Werthe in p bezeichnen, und Θ ein echter Bruch ist. — *Q. e. d.*

Beweis des Satzes für die Randpunkte. — Liegt der zu betrachtende Punkt p *am Rande* von $\mathfrak{J}$, so beschreibe man, nachdem zuvor ein beliebiger Kleinheitsgrad

$$(A.) \qquad \varepsilon_0 < 1$$

gegeben ist, um p, als Centrum, einen Kreis von solcher Kleinheit, dass die Schwankungen der Functionen U, U_1, U_2 innerhalb dieses Kreises

$$(B.) \qquad < \frac{M\varepsilon_0}{4}$$

sind, wo M (ebenso wie früher) den absolut grössten Werth von U, U_1, U_2 in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ vorstellen soll. Sodann sorge man durch noch weitere Verkleinerung des Kreisradius dafür, dass der innerhalb des Kreises befindliche Theil des *Randes**) aus einem einzigen Stück besteht, und auch dafür, dass die Schwankungen von ϑ für diesen Theil des Randes $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind; so dass also sämmtliche Tangenten dieses Randtheiles in ihren Richtungen um weniger als

$$(C.) \qquad \frac{\varepsilon_0}{2}$$

von einander abweichen.

Innerhalb des so definirten Kreises markire man nun einen *beliebigen* zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkt p'. In Betreff der von p und p' begrenzten geraden Linie $r = (pp')$ sind alsdann sehr verschiedene Fälle denkbar. Entweder wird sie, ausser p selber, keinen weitern Punkt mit dem Rande gemein haben. Oder sie wird den Rand zwischen p und p' irgend welche Anzahl von Malen schneiden resp. berühren. Dabei kann sie möglicherweise auch den Punkt p' mit dem Rande gemein haben; denn es kann ja jener innerhalb des

*) Unter dem *Rande* ist stets der Rand von $\mathfrak{J}$, das ist die von Hause aus gegebene geschlossene Curve, zu verstehen.

Kreises markirte, zu $\mathfrak{J}$ gehörige Punkt p' möglicherweise ein Randpunkt von $\mathfrak{J}$ sein. All' diese Fälle zusammenfassend, bezeichnen wir mit q den *letzten* Punkt, den die Linie $r = (pp')$, von p aus gerechnet, mit dem Rande gemein hat, und ferner mit $s = (pp')$ diejenige *Curve*, welche von p bis q *längs des Randes* fortgeht, sodann aber von q aus *geradlinig* nach p' geht. Aus dieser Definition der Curve $s = (pp')$ ergiebt sich mit Rücksicht auf $(C.)$, dass die einzelnen Elemente ds dieser Curve gegen die gerade Linie $r = (pp')$ unter Winkeln geneigt sind, die durchweg $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind. Bezeichnet man also den Neigungswinkel eines solchen Elementes ds gegen die Linie r mit 2δ, so ist stets:

$$(D.) \qquad \text{abs}\,\delta < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4}\,; \quad [\text{vgl. } (A.)]\,.$$

Zur Erläuterung des soeben Gesagten dürfte es angemessen sein, im Ganzen zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Die gerade Linie $r = (pp')$ hat, ausser p selber, keinen weiteren Punkt mit dem Rande gemein. Alsdann wird jener Punkt q identisch sein mit p selber, folglich die Curve s *identisch* sein mit r; so dass also in diesem Falle jene mit 2δ bezeichneten Neigungswinkel durchweg $= 0$ sind:

$$(\alpha.) \qquad \delta = 0\,.$$

Zweiter Fall: Die gerade Linie $r = (pp')$ hat, ausser p selber, noch irgend welche Anzahl anderer Punkte mit dem Rande gemein. Alsdann wird, von p aus gerechnet, der *letzte* dieser Punkte mit q zu bezeichnen sein. Und die Curve s wird in diesem Falle also aus zwei Theilen s_1 und s_2 zusammengesetzt sein:

$$s_1 = (pq), \qquad s_2 = (qp');$$

der Art, dass s_1 durch die *Randstrecke* (pq), s_2 aber durch die *gerade Linie* (qp') dargestellt ist. Die Linie r geht von p aus, und durch q hindurch, während die Curve s_1 ebenfalls von p nach q geht. Folglich wird die Linie r parallel sein mit einer gewissen *Tangente* der Curve s_1. Zufolge $(C.)$ wird nun jedwedes Element ds_1, seiner Richtung nach, von dieser Tangente, d. i. von der Richtung der Linie r um weniger als $\frac{\varepsilon_0}{2}$ abweichen. Andererseits aber wird jedwedes Element ds_2 in die gerade Linie $r = (pqp')$ hineinfallen, also mit dieser Linie r den Winkel 0 machen. Somit sehen wir, dass *sämmtliche* Elemente ds (sowohl die ds_1, wie auch die ds_2) gegen die Linie r unter Winkeln geneigt sind, die $< \frac{\varepsilon_0}{2}$ sind. Bezeichnen wir also diese Neigungswinkel mit 2δ, so ergiebt sich:

$$(\beta.) \qquad \operatorname{abs} \delta < \frac{\varepsilon_0}{4} \ .$$

Dem hier betrachteten zweiten Falle subsumirt sich offenbar auch z. B. *der* Fall, dass p' ein *Randpunkt* von $\mathfrak{Z}$ ist. In diesem letzteren Falle gestalten sich die Dinge nur dadurch ein wenig specieller, dass q identisch wird mit p', dass mithin s_2 verschwindet, und s_1 identisch wird mit s.

Zusammenfassung. — Die erhaltenen Resultate (α.) und (β.) zeigen, dass die oben angegebene Formel (D.) ganz allgemein gilt. — *Q. e. d.*

Für jedes Element ds der Curve $s = (pp')$ gilt, zufolge des ersten und zweiten Satzes (pag. 84), die Formel:

$$(E.) \qquad \frac{dU}{ds} = U_1 \cos(\gamma + 2\delta) + U_2 \sin(\gamma + 2\delta) \ ,$$

falls man nämlich unter $(\gamma + 2\delta)$ das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe versteht. Dabei mag γ selber das Azimuth der geraden Linie $r = (pp')$ gegen jene Axe vorstellen; so dass also 2δ, in Uebereinstimmung mit unsern bei (D.) gemachten Bezeichnungen, den Neigungswinkel des Elementes ds gegen die Linie r repräsentirt. Integrirt man die Formel (E.) über alle Elemente ds der Curve $s = (pp')$, so folgt:

$$U' - U = \int_{s=(pp')} [U_1 \cos(\gamma + 2\delta) + U_2 \sin(\gamma + 2\delta)]\, ds \ ,$$

d. i.

$$(F.) \qquad U' - U = [U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) + U_2^* \sin(\gamma + 2\delta^*)]\, s \ .$$

Hier bezeichnet s die *Länge* der Curve $s = (pp')$; während U_1^*, U_2^*, $2\delta^*$ die Werthe von U_1, U_2, 2δ in einem unbekannten Punkte p^* der Curve s vorstellen. Ueberdies repräsentiren U und U' die Werthe der Function U in p und p'.

Nun ist identisch:

$$(G.) \quad U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma + U_1^* [\cos(\gamma + 2\delta^*) - \cos\gamma] + (U_1^* - U_1)\cos\gamma,$$

d. i.

$$(H.) \quad U_1^* \cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1 \cos\gamma - 2\, U_1^* \sin\delta^* \sin(\gamma + \delta^*) + (U_1^* - U_1)\cos\gamma \ ,$$

wo U_1 den Werth von U_1 in p vorstellen soll. Beachtet man jetzt, dass nach (D.)

$$\operatorname{abs} \delta^* < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4} \ ,$$

mithin auch

$$(x.)\qquad \text{abs}\,(\sin\delta^*) < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{1}{4}$$

ist, beachtet man ferner, dass (nach der Definition von M)

$$(y.)\qquad \text{abs}\; U_1^* \leqq M\;,$$

und beachtet man endlich, dass nach ($B.$)

$$(z.)\qquad \text{abs}\,(U_1^* - U_1) < \frac{M\varepsilon_0}{4}$$

ist, so kann man die Formel ($H.$) auch so schreiben:

$$U_1^*\cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1\cos\gamma + \vartheta\,\frac{M\varepsilon_0}{2} + \vartheta'\,\frac{M\varepsilon_0}{4}\;,$$

oder auch so:

$$(J_1.)\qquad U_1^*\cos(\gamma + 2\delta^*) = U_1\cos\gamma + \Theta_1 M\varepsilon_0\;,$$

wo ϑ, ϑ', Θ_1 echte Brüche vorstellen. — Ebenso ergiebt sich

$$(J_2.)\qquad U_2^*\sin(\gamma + 2\delta^*) = U_2\sin\gamma + \Theta_2 M\varepsilon_0\;.$$

Substituirt man aber diese Werthe ($J_1.$), ($J_2.$) in ($F.$), so folgt mit Rücksicht auf ($A.$):

$$(K.)\qquad \frac{U' - U}{s} = (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma) + 2\Theta M\varepsilon_0 = 4\,\mathrm{H}\,M\;,$$

wo H und Θ, ebenso wie Θ_1 und Θ_2, echte Brüche vorstellen.

Nun ist nach der Definition von 2δ:

$$ds = \frac{dr}{\cos 2\delta}\;,$$

wo dr die senkrechte Projection des Elementes ds auf die gerade Linie $r = (pp')$ vorstellt. Hieraus folgt durch Integration über alle Elemente ds der Curve $s = (pp')$:

$$s = \frac{1}{\cos 2\delta^*}\,r\;,$$

wo s und r die *Längen* der Curve s und der Linie r vorstellen, während $2\delta^*$ den Werth von 2δ in einem unbekannten Punkte p^* der Curve s bezeichnet. Somit folgt:

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{\cos 2\delta^*} = 1 + \frac{1 - \cos 2\delta^*}{\cos 2\delta^*}$$

d. i.

$$\frac{s}{r} = 1 + \frac{2\sin^2\delta^*}{1 - 2\sin^2\delta^*}\;.$$



Nach (x.) ist aber:

$$2\sin^2\delta^* < \frac{\varepsilon_0}{8} < \frac{1}{8}, \quad \text{mithin: } 1 - 2\sin^2\delta^* > 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

mithin:

$$\frac{2\sin^2\delta^*}{1 - 2\sin^2\delta^*} < \frac{\varepsilon_0}{8}\,\frac{8}{7} = \frac{\varepsilon_0}{7}.$$

Somit folgt:

$$\frac{s}{r} = 1 + \Theta'\frac{\varepsilon_0}{7}.$$

Multiplicirt man diese Formel mit der Formel (K.), und macht man dabei, was die in jener Formel (K.) auf der *rechten* Seite stehenden beiden Ausdrücke anbelangt, sowohl von dem *einen* wie auch von dem *andern* Gebrauch, so erhält man sofort:

$$(L.)\qquad \frac{U' - U}{r} = (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma) + 2\Theta M\varepsilon_0 + \Theta'\frac{\varepsilon_0}{7}4\mathrm{H}M,$$

wo Θ, Θ', und H echte Brüche sind.

Hieraus aber ergiebt sich schliesslich:

$$(M.)\qquad \text{abs}\left(\frac{U' - U}{r} - (U_1\cos\gamma + U_2\sin\gamma)\right) < 3M\varepsilon_0.$$

Diese Formel gilt, ihrer Ableitung nach, für jedweden innerhalb des Kreises liegenden und zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkt p'. Demgemäss ist der verlangte Beweis geführt, falls man nur das hier gewählte ε_0 so klein sich denkt, dass $3M\varepsilon_0 < \varepsilon$ ist.

§ 15.

Ueber monogene Fundamentalfunctionen.

Der Uebersichtlichkeit willen mögen die Sätze, um die es sich hier handelt, vorangestellt, und die Beweise derselben erst hinterher gegeben werden.

Erster Satz. — *Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

(1.) θ *und* θ' *stetige Functionen der Bogenlänge* σ *sind.*

Ferner sei vorausgesetzt, dass für das von dieser Curve umschlossene Gebiet $\mathfrak{J}$ *drei Fundamentalfunctionen* U, U_1, U_2 *existiren, die in jedwedem Punkte* (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ *den Formeln entsprechen:*

(2.) $$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 . \quad (!)$$

Denkt man sich alsdann in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ irgend eine in sich zurücklaufende Curve s construirt, so wird das über diese Curve s erstreckte Integral

(3.) $$\int (U_1 dy - U_2 dx) \text{ stets } = 0 \text{ sein*}) .$$

Zweiter Satz. — *Bildet man ferner, nachdem innerhalb $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt (x_0, y_0) markirt ist, das Integral*

(4.) $$V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (U_1 dy - U_2 dx) ,$$

und denkt man sich dabei die Integrationscurve auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt, so wird die so definirte Function $V = V(x, y)$ nicht nur in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig, sondern überdies auch eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein. Auch wird diese Function V in jedwedem Punkte innerhalb $\mathfrak{J}$ den Formeln entsprechen:

(5.) $$\frac{\partial V}{\partial x} = - U_2 , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = U_1 ; \quad (!)$$

Formeln, die mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar sind:

(6.) $$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial y} , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} . \quad (!)$$

Dritter Satz. — *Setzt man jetzt:*

(7.) $$W = U + iV \quad \text{und} \quad z = x + iy , \quad (i = \sqrt{-1}) ,$$

so wird man, falls innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ irgend ein Punkt z markirt, und überdies irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, um diesen Punkt z, als Centrum, stets eine Kreisperipherie von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{J}$ gehörigen und innerhalb dieser Peripherie befindlichen Punkte z' die Formel stattfindet:

---

*) Selbstverständlich ist die in Rede stehende Curve der Art zu denken, dass das Integral (3.) einen bestimmten Sinn hat. Man kann daher, um den Satz völlig strenge zu machen, und zugleich ohne Beeinträchtigung der weiterhin anzustellenden Betrachtungen, festsetzen, dass jene Curve ein Polygon sein solle, dessen einzelne Seiten entweder lauter *gerade Linien* und *Kreisbogen* sind, oder aber überdies auch noch aus irgend welchen *Strecken der gegebenen Randcurve* bestehen. Analoges ist zu bemerken mit Bezug auf das Integral (4.).



$$(8.) \qquad \text{mod}\left(\frac{W' - W}{z' - z} - (U_1 - iU_2)\right) < \varepsilon\,.$$

Dabei bezeichnet W' den Werth in z'; während W selber, sowie auch U_1 und U_2, die Werthe der betreffenden Functionen in z vorstellen.

Hieraus folgt sofort, dass das Binom $(U_1 - iU_2)$ in dem betrachteten Punkte z den Differentialquotienten von W nach z vorstellt:

$$(9.) \qquad \frac{dW}{dz} = U_1 - iU_2\,,$$

und dass also $\frac{dW}{dz}$, ebenso wie W selber, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist).*

Vierter Satz. — *Ueberdies ergiebt sich aus (8.), dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ in jedwedem Punkte z, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$, oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegen, von der Wahl des bei seiner Bildung in Anwendung gebrachten Nachbarpunktes $z + dz$ unabhängig, und dass also die Function W nicht nur in jedem inneren Punkte, sondern ebenso auch in jedem Randpunkte als monogen zu bezeichnen ist.*

Fünfter Satz. — *Endlich ergiebt sich aus (8.), dass die Convergenz des Differenzen-Quotienten der Function W gegen den im Punkte z vorhandenen Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ eine von allen Seiten her gleichmässige ist, oder mit anderen Worten, dass die Entstehungsweise des Differentialquotienten $\frac{dW}{dz}$ in jedwedem Punkte z des Gebietes $\mathfrak{J}$ eine von allen Seiten her äquiconvergente ist; wobei es keinen Unterschied macht, ob der betrachtete Punkt z innerhalb $\mathfrak{J}$, oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegt.*

Bemerkung zum vierten und fünften Satze. — Ist der Punkt z ein *Randpunkt* von $\mathfrak{J}$, so hat man sich, was die »Nachbarpunkte $z + dz$« und das »von allen Seiten her« betrifft, selbstverständlich auf solche Nachbarpunkte und auf solche Seiten zu beschränken, für welche die Function W wirklich *definirt* ist, also sich zu beschränken auf das Innere und den Rand des Gebietes $\mathfrak{J}$.

---

*) Es sind nämlich U, U_1, U_2 und V Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$. Gleiches gilt daher, auf Grund der Formeln (7.) und (9.) auch von W und $\frac{dW}{dz}$.

Beweis des ersten Satzes. — Setzt man zuvörderst voraus, dass die geschlossene Curve s vollständig *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt, so erhält man nach einer bekannten GREEN'schen Formel:

$$\int \frac{dU}{dn}\, ds = 0 \;,$$

wo n die innere Normale des Elementes ds vorstellt. Nach dem ersten Satze pag. 84 ist aber $\frac{dU}{dn} = U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma$, wo γ das Azimuth der Normale n gegen die x-Axe bezeichnet. Somit ergiebt sich:

$$\int (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma)\, ds = 0 \;,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int [U_1 \sin(\gamma - 90^0) - U_2 \cos(\gamma - 90^0)]\, ds = 0 \;.$$

Die Differenz $(\gamma - 90^0)$ repräsentirt aber das Azimuth des Elementes ds gegen die x-Axe. Bezeichnet man also die Componenten dieses Elementes ds nach den Coordinatenaxen mit dx und dy, so ist $ds \cos(\gamma - 90^0) = dx$ und $ds \sin(\gamma - 90^0) = dy$, wodurch die vorstehende Formel die Gestalt gewinnt:

$$\int (U_1\, dy - U_2\, dx) = 0 \;.$$

Dass nun schliesslich diese Formel auch dann noch gültig bleibt, wenn einzelne Punkte oder auch irgend welche Strecken der Curve s in den Rand von $\mathfrak{J}$ hineinfallen, erkennt man leicht, falls man nur beachtet, dass U_1 und U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ stetig sind. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Aus dem soeben bewiesenen ersten Satze folgt sofort, dass die durch die Formel

$$(\alpha.) \qquad V = \int_{x_0 y_0}^{x y} (U_1\, dy - U_2\, dx)$$

definirte Function $V = V(x, y)$ *in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig ist*, und dass sie überdies in jedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{J}$ den Formeln entspricht:

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -U_2 \;, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = +U_1 \;. \quad (!)$$



Nach unserer Voraussetzung sind aber U_1, U_2 Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$. Folglich werden z. B. die Ableitungen

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y}$$

innerhalb $\mathfrak{J}$ nicht nur überall existiren, sondern *innerhalb* $\mathfrak{J}$ auch überall stetig sein. Gleiches gilt daher nach (β.) von den Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

auch ergiebt sich aus (β.), unter Rücksichtnahme auf (2.), dass der Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ *innerhalb* $\mathfrak{J}$ überall $= 0$ ist. Folglich ist V eine *Fundamentalfunction* des Gebietes $\mathfrak{J}$. Ueberdies sind die Gleichungen (β.) mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (!) \text{ — } Q.\ e.\ d.$$

Beweis des dritten Satzes. — Nach unserer Voraussetzung sind U, U_1, U_2 Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$, die den Relationen entsprechen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2. \quad (!)$$

Genau dasselbe gilt aber, auf Grund des soeben bewiesenen zweiten Satzes, auch von den Functionen V, $-U_2$, U_1. In der That sind diese Functionen V, $-U_2$, U_1, zufolge jenes Satzes, Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ und den Formeln

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -U_2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = U_1 \quad (!)$$

entsprechend.

Demgemäss ist der Satz pag. 88 auf U, U_1, U_2 und ebenso auch auf V, $-U_2$, U_1 ohne Weiteres anwendbar. Denkt man sich also irgend einen Punkt p des Gebietes $\mathfrak{J}$ markirt, und versteht man überdies unter ε_0 einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man um p (als Centrum) stets einen Kreis von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle innerhalb dieses Kreises liegende und zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Punkte p' die Formeln stattfinden:

$$(A.)\qquad \frac{U'-U}{(pp')} - (U_1 \cos\gamma + U_2 \sin\gamma) = \Theta_1 \varepsilon_0 ,$$

$$(B.)\qquad \frac{V'-V}{(pp')} - (-U_2 \cos\gamma + U_1 \sin\gamma) = \Theta_2 \varepsilon_0 ,$$

wo γ das Azimuth der geraden Linie (pp') gegen die x-Axe vorstellt; während Θ_1, Θ_2 echte Brüche bezeichnen.

Setzt man jetzt:

$$W = U + iV , \qquad z = x + iy ,$$

$$W' = U' + iV' , \qquad z' = x' + iy' , \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

und betrachtet man dabei (x, y) und (x', y') als die Coordinaten der beiden Punkte p und p', so erhält man

$$x' - x = (pp') \cos\gamma ,$$

$$y' - y = (pp') \sin\gamma ,$$

mithin:

$$(C.)\qquad z' - z = (pp') e^{i\gamma} .$$

Multiplicirt man jetzt die Formeln $(A.)$, $(B.)$ mit 1, i und addirt, so folgt:

$$\frac{W'-W}{(pp')} - (U_1 - iU_2)e^{i\gamma} = \varepsilon_0(\Theta_1 + i\Theta_2) ,$$

oder, falls man für (pp') den aus $(C.)$ entspringenden Werth substituirt:

$$\frac{W'-W}{z'-z} - (U_1 - iU_2) = \varepsilon_0 (\Theta_1 + i\Theta_2)e^{-i\gamma} ,$$

also (weil γ seiner Definition nach *reell* ist):

$$(D.)\qquad \mathrm{mod}\left(\frac{W'-W}{z'-z} - (U_1 - iU_2)\right) < 2\varepsilon_0 .$$

Demgemäss ist der verlangte Beweis geführt, falls man nur das hier gewählte ε_0 sich so eingerichtet denkt, dass $2\varepsilon_0 < \varepsilon$ ist.

Der Beweis des vierten und fünften Satzes dürfte schon mitgegeben sein durch die blosse Aussprache dieser Sätze.



Drittes Capitel.

Ueber die Green'sche Function und über die Theorie der conformen Abbildung.

Nach Absolvirung einiger Hülfssätze (§§ 16, 17), werden wir (in den §§ 18 — 21) die *Green'sche Function*, und sodann in (§ 22) die *Theorie der conformen Abbildung* einer genaueren Untersuchung unterwerfen.

Dabei werden uns ausser den *Stetigkeitsfragen*, die mit Hülfe der beiden vorhergehenden Capitel leicht zu absolviren sind, auch Fragen über das *Nullwerden* resp. *Nichtnullwerden* gegebener Functionen entgegentreten, deren Beantwortung wesentlich *neue* Hülfsmittel und Methoden erheischt. Und jene vorangeschickten Hülfssätze (§§ 16, 17) sollen dazu dienen, um die Darlegung dieser Methoden etwas einheitlicher und übersichtlicher zu machen.

§ 16.

Geometrische Sätze.

Die gegebene geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass

(1.) $\quad$ *θ, θ', θ'' stetige Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass überdies θ' überall > 0 ist*[*]).

Ferner sei R_0 der kleinste Krümmungsradius der Curve. Alsdann gelten folgende Sätze:

---

[*]) Hieraus folgt z. B., dass die Curve überall convex ist, jedoch der Art, dass sie auch geradlinige Strecken enthalten kann. Vgl. auch die ausführlichere Note auf pag. 113.

Erster Satz. — *Denkt man sich zur gegebenen Curve eine innere Parallelcurve construirt, deren constanter Abstand von jener* $< R_0$ *ist, und die Bogenlängen zweier einander correspondirender Punkte dieser beiden Curven mit* σ *und* s *bezeichnet, so wird* s *eine eindeutige und stetige Function von* σ, *und ebenso auch umgekehrt* σ *eine eindeutige und stetige Function von* s *sein.*

Zweiter Satz. — *Repräsentirt* A *irgend eine positive Constante, die* $< R_0$ *ist, und construirt man irgend einen die gegebene Curve auf ihrer inneren Seite berührenden Kreis vom Radius* A, *so wird dieser Kreis, ausser seinem Berührungspunkte, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben.*

Dritter Satz. — *Es sei* q *der Berührungspunkt und* C *der Mittelpunkt des soeben construirten Kreises vom Radius* A. *Denkt man sich alsdann um* C *einen etwas grössren Kreis vom Radius* $A + \alpha$ *construirt, so wird dieser letztere die gegebene Curve in zwei zu beiden Seiten von* q *liegenden Punkten schneiden, sonst aber keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben, falls man nur den Radius* $A + \alpha$ *der Bedingung unterwirft:*

$$A < A + \alpha < \varrho^* , \tag{2.}$$

wo ϱ^* *eine passend zu wählende Constante vorstellt.*

Auch wird man durch weitere Verkleinerung von ϱ^* *dafür sorgen können, dass diese beiden Schnittpunkte dem festen Punkte* q *beliebig nahe liegen.*

Beweis des ersten Satzes. — Die gegebene Curve wird, zufolge der Voraussetzungen (1.), von sämmtlichen Krümmungskreisen auf ihrer *innern* Seite berührt. Demgemäss ist der in der Formel ($E.$) pag. 4 enthaltene Factor ε im gegenwärtigen Falle $= + 1$; sodass also jene Formel die Gestalt annimmt:

$$\theta' = \frac{1}{R} . \tag{α.}$$

Hieraus folgt sofort $\theta' \leq \frac{1}{R_0}$, mithin:

$$1 - A\theta' \geqq 1 - \frac{A}{R_0} , \tag{β.}$$

falls man nämlich unter R_0 den *kleinsten* Krümmungsradius der gegebenen Curve, und unter A irgend welche positive Constante versteht.

Construirt man jetzt zur gegebenen Curve irgend eine innere Parallelcurve im constanten Abstande A, und setzt man voraus, dass dieser Abstand $A < R_0$ sei, so ergiebt sich aus (β.)

$$(\gamma.)\qquad 1 - A\theta' > 0\,.$$

Und mit Rücksicht auf diese Relation (γ.) ergiebt sich nun weiter aus (ε.) pag. 85, dass zwischen den Bogenlängen σ und s zweier auf den beiden Curven einander correspondirenden Punkte die Gleichung stattfindet:

$$(\delta.)\qquad ds = (1 - A\theta')d\sigma\,.$$

Hieraus aber folgt sofort, dass s eine *eindeutige* und *stetige* Function von σ ist.

Ferner ergiebt sich aus (δ.), unter Rücksichtnahme auf (γ.), dass jedem Wachsen von σ ein Wachsen von s, und umgekehrt jedem Wachsen von s ein Wachsen von σ entspricht. Denkt man sich also die gegenseitige Beziehung zwischen σ und s geometrisch durch eine Curve dargestellt, indem man die σ zu Abscissen, die s zu Ordinaten nimmt, so wird diese Curve in unaufhörlichem Steigen (niemals im Fallen oder in einem Parallelbleiben zur Abscissenaxe) begriffen sein. Und hieraus folgt, dass, ebenso wie s eine *eindeutige* und *stetige* Function von σ ist, ebenso auch umgekehrt σ eine *eindeutige* und *stetige* Function von s repräsentirt. — *Q. e. d.*

Den Beweis des zweiten Satzes muss ich einstweilen schuldig bleiben*). Doch dürfte die unmittelbare geometrische Anschauung so sehr für diesen Satz sprechen, dass man wohl, auch ohne Beweis, die Richtigkeit desselben kaum bezweifeln wird.

Beweis des dritten Satzes. — Nimmt man C zum Anfangspunkt und Cq zur x-Axe des Coordinatensystems, und bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Curvenpunktes σ mit ξ, η, so gilt für den von C nach dem Punkt σ laufenden Radius-vector ϱ die Formel:

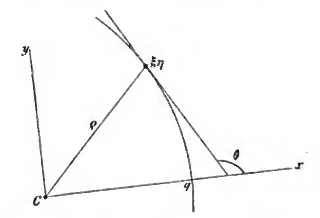
$$(A.)\qquad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,.$$

Beachtet man nun die Relationen [vgl. (C.) pag. 3]:

$$(B.)\quad \begin{cases} \xi' = \cos\theta\,, \\ \eta' = \sin\theta\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi'' = -\theta'\sin\theta\,, \\ \eta'' = +\theta'\cos\theta\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi''' = -\theta'^2\cos\theta - \theta''\sin\theta\,, \\ \eta''' = -\theta'^2\sin\theta + \theta''\cos\theta\,, \end{cases}$$

*) Ich werde den inzwischen (nämlich während des Druckes dieser Abhandlung) von mir gefundenen Beweis im *Anhange* mittheilen.





so ergiebt sich aus den Voraussetzungen (1.) und mit Rücksicht auf (*A*.) sofort, dass

$$\xi, \xi', \xi'', \xi''', \quad \eta, \eta', \eta'', \eta''', \quad \varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$$

stetige Functionen von σ sind. Setzt man also

(*C*.) $$\varrho = \Phi(\sigma), \quad \text{mithin } \varrho' = \Phi'(\sigma),$$

und denkt man sich der Bequemlichkeit willen die Bogenlänge σ von q aus gerechnet, so erhält man nach bekanntem Satze:

(*D*.) $$\varrho' = \Phi'(0) + \frac{\sigma}{1}\Phi''(0) + \frac{\sigma^2}{1\cdot 2}\Phi'''(\Theta\sigma),$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch vorstellt.

Bringt man jetzt die theils aus (*A*.), (*B*.), (*C*.), anderntheils aber auch aus pag. 4, (*E*.) und pag. 101, (α.) entspringenden Formeln:

$$\begin{cases} \xi' = \cos\theta, \\ \eta' = \sin\theta, \\ \dfrac{1}{R} = \xi'\eta'' - \eta'\xi'', \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(\sigma) = \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \Phi'(\sigma) = \varrho' = \dfrac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\varrho}, \\ \Phi''(\sigma) = \varrho'' = \dfrac{(\xi'^2 + \eta'^2) + (\xi\xi'' + \eta\eta'')}{\varrho} - \dfrac{(\xi\xi' + \eta\eta')^2}{\varrho^3} \end{cases}$$

speciell auf den Punkt q in Anwendung, und beachtet man dabei, dass die diesem Punkte q zugehörigen σ, ξ, η, θ die Werthe haben:

$$\sigma_q = 0, \qquad \xi_q = A, \qquad \eta_q = 0, \qquad \theta_q = 90^\circ,$$

so erhält man:

$$\begin{cases} \xi_q' = 0, \\ \eta_q' = 1, \\ \dfrac{1}{R_q} = -\xi_q'', \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(0) = \varrho_q = A, \\ \Phi'(0) = \varrho_q' = 0, \\ \Phi''(0) = \varrho_q'' = \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{R_q}; \end{cases}$$

so dass also die Formel (*D*.) übergeht in:



$$(E.)\qquad \varrho' = \frac{\sigma}{1}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R_q}\right) + \frac{\sigma^2}{1\,.\,2}\,\Phi'''(\Theta\sigma)\;.$$

Diese Formel ist, falls man den absolut grössten Werth der stetigen Function $\varrho''' = \Phi'''(\sigma)$ mit M bezeichnet, auch so darstellbar:

$$(F.)\qquad \varrho' = \sigma\,(L + \Theta_1\,\sigma M)\,,\quad \text{wo } L = \frac{1}{A} - \frac{1}{R_q} \text{ ist}\,,$$

während Θ_1 wiederum einen echten Bruch vorstellt.

Nach unsern Voraussetzungen ist:

$$A < R_0 \leqq R_q\;.$$

Folglich ist die in (*F.*) enthaltene Constante L unter allen Umständen > 0. Folglich werden wir auf der gegebenen Curve zu beiden Seiten des Punktes $\sigma = 0$ (d. i. des Punktes q) zwei Punkte $\sigma = -\delta$ und $\sigma = +\delta$ markiren, und dabei δ so klein machen können, dass der in (*F.*) in den Klammern enthaltene Ausdruck längs der von diesen beiden Punkten $\sigma = -\delta$ und $\sigma = +\delta$ begrenzten Curvenstrecke durchweg > 0 bleibt. Alsdann aber wird, falls man δ als positiv sich vorstellt, und die Punkte $\sigma = -\delta$, $\sigma = 0$, $\sigma = +\delta$ kurzweg mit Δ_1, q, Δ bezeichnet, der Werth von ϱ'

$$\begin{cases}\text{längs der Curvenstrecke } \Delta_1\,q \text{ (excl. } q\text{) durchweg} < 0,\\ \text{und längs der Strecke } q\,\Delta \text{ (excl. } q\text{) durchweg} > 0\end{cases}$$

sein, wie solches aus (*F.*) ohne Weiteres sich ergiebt. Folglich wird der Werth von ϱ selber

$$(G.)\qquad \begin{cases}\text{längs der Strecke } \Delta_1 q \textit{ unaufhörlich abnehmen},\\ \text{und längs der Strecke } q\Delta \textit{ unaufhörlich wachsen}.\end{cases}$$

Nun soll der um C mit dem Radius $(Cq) = A$ beschriebene und die Curve in q berührende (in den betreffenden Figuren *nicht* gezeichnete) Kreis den Voraussetzungen des hier zu beweisenden dritten Satzes entsprechen. D. h. sein Radius A soll $< R_0$ sein, wo R_0 den kleinsten Krümmungsradius der Curve vorstellt. Zufolge des zweiten Satzes (pag. 101) wird daher dieser Kreis, ausser seinem Berührungspunkte q, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein haben. Bezeichnet man also die zur Strecke $\Delta_1 q \Delta$ complementare Curvenstrecke mit $\Delta\Delta^*\Delta_1$ (der Art, dass beide Strecken zusammengenommen die ganze gegebene Curve ausmachen), so werden die dieser complementaren Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ zugehörigen Radii-

vectores ϱ durchweg $> A$ sein. Oder mit andern Worten: bezeichnet man das *Minimum* der der Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ zugehörigen Radiivectores mit ϱ^*, so ist $\varrho^* > A$, mithin:

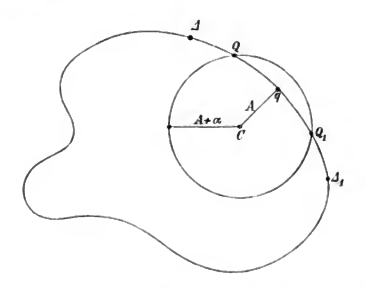
(*H.*) $$A < \varrho^* .$$

Denkt man sich jetzt eine neue Constante α der Art gewählt, dass

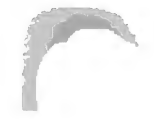
(*J.*) $$A < A + \alpha < \varrho^*$$

ist, und um C, als Centrum, eine Kreisperipherie vom Radius $A + \alpha$ beschrieben, so wird jene Curvenstrecke $\Delta\Delta^*\Delta_1$ *völlig ausserhalb* dieser Peripherie liegen. Andererseits aber wird der Punkt q, dessen Radiusvector $(Cq) = A$, mithin, nach (*J.*), $< A + \alpha$ ist, *innerhalb* dieser Peripherie sich befinden. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (*G.*), dass die Curvenstrecke $\Delta_1 q$ die Peripherie *einmal durchschneidet*, dass sie aber, abgesehen von diesem einen Schnittpunkte, keinen weiteren Punkt mit der Peripherie gemein hat, und dass überdies genau dasselbe auch von der Curvenstrecke $q\Delta$ gilt.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass die um C mit dem Radius $A + \alpha$ beschriebene Peripherie die gegebene Curve in *zwei* zu beiden Seiten von q gelegenen Punkten schneidet. und dass sie, ausser diesen beiden Schnittpunkten, keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein hat.



Auch kann man durch weitere Verkleinerung des Radius $A + \alpha$ jene beiden Schnittpunkte, welche in vorstehender Figur mit Q, Q_1 bezeichnet sind, beliebig nahe an q heranbringen. Denn wenn man



α gegen Null convergiren lässt, so werden Q und Q_1 unendlich nahe an q heranrücken; wie sich solches mit Rücksicht auf $(G.)$ leicht ergiebt. U. s. w.

§ 17.

Aufstellung einiger Hülfssätze.

Erster Hülfssatz. — *Längs der gegebenen Curve sei eine Function der Bogenlänge* $\Phi = \Phi(\sigma)$ *vorgeschrieben, und zwar sei vorausgesetzt dass*

$$\text{(1.)}\qquad \theta,\ \theta' \text{ und } \Phi \text{ stetige Functionen von } \sigma \text{ sind, und dass } \Phi \text{ durchweg } \geqq 0 \text{ ist.}$$

Ferner sei q irgend ein Punkt der Curve, und (qp) irgend ein Stück der in q errichteten innern Normale. Endlich sei qQ eine von q aus auf der gegebenen Curve abgeschnittene Strecke, und

$$\text{(2.)}\qquad J = \frac{1}{2\pi}\int_{qQ} \Phi \frac{\cos\omega}{E}\, d\sigma$$

ein über alle Elemente $d\sigma$ der Curvenstrecke qQ ausgedehntes Integral. Dabei bezeichne Φ den Werth der Function Φ im Element $d\sigma$, ferner E den Abstand dieses Elementes vom Punkte p, endlich ω den Winkel von E gegen pq. Vgl. die folgende Figur.

Versteht man alsdann unter ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, so wird man — und zwar ohne über die Länge von (qp) irgend welche Kenntniss zu haben — durch ein näheres Heranschieben von Q gegen den festen Punkt q stets dafür sorgen können, dass

$$\text{(3.)}\qquad \text{abs}\, J < \frac{\Phi_q + \varepsilon}{4}$$

wird, wo Φ_q den Werth von Φ im Punkte q vorstellt.

Zweiter Hülfssatz. — *Wort für Wort dasselbe gilt auch dann, wenn man unter (qp) ein beliebiges Stück der in q errichteten äussern Normale versteht.*

Beweis des ersten Satzes. — Nimmt man q zum Anfangspunkte, die positive Tangente in q zur x-Axe, und die innere Normale qp zur y-Axe, und bezeichnet man die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ mit ξ, η, so ist [vgl. die folgende Figur]:

$$(A.)\qquad \cos\omega = \frac{(pq)-\eta}{E}\,, \quad \text{und zugleich:} \quad d\sigma = \frac{d\xi}{\cos\theta}\,,$$

wo $d\xi$ die Projection des Elementes $d\sigma$ auf die x-Axe vorstellt, während θ das Azimuth von $d\sigma$ gegen diese Axe bezeichnet. Dabei mag die Curvenstrecke qQ gleich von Anfang an so klein gedacht werden, dass θ längs dieser Strecke zwischen -60^0 und $+60^0$, mithin $\cos\theta$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ bleibt. Alsdann wird zufolge der Voraussetzung (1.) die Function

$$\frac{\Phi}{\cos\theta} \quad \text{längs der Curvenstrecke } qQ \text{ durchweg } \geqq 0$$

sein. — Substituirt man nun die Werthe (A.) in (2.), so folgt:

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{qQ} \frac{\Phi}{\cos\theta}\,\frac{(pq)-\eta}{E^2}\,d\xi\,,$$

mithin:

$$\operatorname{abs} J \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{qQ}\left(\operatorname{abs}\frac{\Phi}{\cos\theta}\right)\left(\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2}\right)d\xi\,,$$

oder, falls man den grössten Werth jener positiven Function $\frac{\Phi}{\cos\theta}$ längs der Strecke qQ mit G bezeichnet:

$$(B.)\qquad \operatorname{abs} J \leqq \frac{1}{2\pi}\,GY\,, \quad \text{wo } Y = \int_{qQ}\left(\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2}\right)d\xi\,.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{(pq)-\eta}{E^2} = \left(\frac{R}{E}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} - \frac{\eta}{E^2}\,,$$

wo R den Abstand des Elementes $d\xi$ von p vorstellen soll (vgl. die folgende Figur). Dieser Abstand R ist aber die dritte Seite eines Dreiecks, dessen beide andern Seiten E und η sind, also*):

$$R \leqq E + \operatorname{abs}\eta\,.$$

Somit folgt:

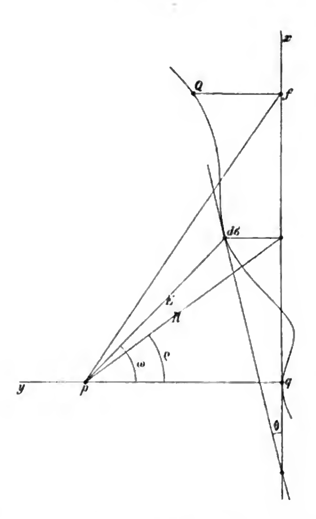
$$\operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} \leqq \left(1+\frac{\operatorname{abs}\eta}{E}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} + \frac{\operatorname{abs}\eta}{E^2}\,,$$

oder, weil $E \geqq \xi$, mithin $\frac{1}{E} \leqq \frac{1}{\xi}$ ist:

$$(C.)\qquad \operatorname{abs}\frac{(pq)-\eta}{E^2} \leqq \left(1+\frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi}\right)^2\frac{(pq)}{R^2} + \frac{\operatorname{abs}\eta}{\xi^2}\,.$$

*) Es ist zu beachten, dass ξ für alle Elemente $d\sigma$ der Curvenstrecke qQ positiv ist, dass hingegen η für einige dieser Elemente positiv, für andere negativ sein kann.





Zufolge der Voraussetzungen (1.) sind ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ. Rechnet man daher diese Bogenlänge von q aus, und bezeichnet man den absolut grössten Werth jener sechs Functionen längs der ganzen gegebenen Curve mit M, so erhält man [vgl. etwa die analogen Betrachtungen auf pag. 103] die Formeln:

$$\begin{cases} \xi = \xi_q + \sigma \xi_q' + \sigma^2 \Theta_1 M , \\ \eta = \eta_q + \sigma \eta_q' + \sigma^2 \Theta_2 M , \end{cases}$$

wo Θ_1, Θ_2 echte Brüche sind. Es ist aber $\xi_q = \eta_q = \theta_q = 0$, mithin:

$$\begin{cases} \xi_q = 0 , \\ \eta_q = 0 , \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_q' = \cos \theta_q = 1 , \\ \eta_q' = \sin \theta_q = 0 ; \end{cases}$$

so dass also jene Formeln die Gestalt gewinnen:

$$\begin{cases} \xi = \sigma + \sigma^2 \Theta_1 M , \\ \eta = \qquad \sigma^2 \Theta_2 M . \end{cases}$$

Somit folgt, falls man den *absoluten* Werth von Θ_2 mit $\Theta\Theta$ bezeichnet:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\text{abs}\,\eta}{\xi} = \frac{\sigma\Theta^2 M}{1+\sigma\Theta_1 M}\,, \quad\text{und}\quad \frac{\text{abs}\,\eta}{\xi^2} = \frac{\Theta^2 M}{(1+\sigma\Theta_1 M)^2}\,.$$

Da wir die Bogenlänge σ von q aus gerechnet haben, so sind die Punkte q und Q respective mit $\sigma = 0$ und $\sigma = \delta$ zu bezeichnen, wo alsdann δ die *Länge* der betrachteten Curvenstrecke qQ repräsentirt. Denken wir uns nun Q so nahe an q herangeschoben, dass $\delta < \frac{1}{2M}$ ist, so gilt für die Bogenlänge σ irgend eines zur Curvenstrecke qQ gehörigen Punktes (ξ, η) stets die Formel: $\sigma \leq \delta < \frac{1}{2M}$, d. i. die Formel:

$$(\beta.)\qquad \sigma M \leq \delta M < \frac{1}{2}\;;$$

wodurch die Relationen $(\alpha.)$ übergehen in:

$$(\gamma.)\qquad \frac{\text{abs}\,\eta}{\xi} < \frac{\delta M}{1-\frac{1}{2}} = 2\delta M\,, \quad\text{und}\quad \frac{\text{abs}\,\eta}{\xi^2} < \frac{M}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4M$$

Mit Rücksicht auf diese Relationen $(\gamma.)$ ergiebt sich aus $(C.)$:

$$(D.)\qquad \text{abs}\,\frac{(pq)-\eta}{E^2} < (1+2\delta M)^2\,\frac{(pq)}{R^2} + 4M\,,$$

also mit Rücksicht auf $(\beta.)$ *a fortiori* [*]):

$$(E.)\qquad \text{abs}\,\frac{(pq)-\eta}{E^2} < (1+6\delta M)\,\frac{(pq)}{R^2} + 4M\,.$$

Demgemäss erhält man für das in $(B.)$ angegebene (stets positive) Integral Y die Formel:

$$(F.)\qquad Y < (1+6\delta M)\int_{qQ}\frac{(pq)d\xi}{R^2} + 4M\int_{qQ} d\xi\,.$$

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel von R gegen pq mit ϱ, so ist (vgl. die vorhergehende Figur):

$$\xi = (pq)\,\text{tang}\,\varrho\,,\quad\text{mithin:}\quad d\xi = (pq)\,\frac{d\varrho}{\cos^2\varrho}\,,\quad\text{und:}\quad R = \frac{(pq)}{\cos\varrho}\,,$$

mithin:

$$\frac{(pq)\,d\xi}{R^2} = d\varrho\;;$$

wodurch die Formel $(F.)$ übergeht in:

*) Es ist nämlich nach $(\beta.)$: $2\delta M < 1$, mithin: $(2\delta M)^2 < 2\delta M$.



$$(G.)\qquad Y < (1 + 6\delta M)\int_{qQ} d\varrho + 4M\int_{qQ} d\xi \;.$$

Von diesen beiden Integralen ist offenbar das *erste* gleich dem Winkel (qpf), und das *zweite* gleich der Länge (qf), wo f den Fusspunkt des von Q aus auf die x-Axe herabgelassenen Perpendikels vorstellt (vgl. die Figur). Folglich ist das *erste* $< \frac{\pi}{2}$, und das *zweite* $\leq \delta$, wo δ nach wie vor die Länge der Curvenstrecke qQ vorstellt. Demgemäss ergiebt sich aus $(G.)$:

$$Y < (1 + 6\delta M)\frac{\pi}{2} + 4\delta M \;,$$

$$(H.)\qquad \text{d. i.}\qquad Y < \frac{\pi}{2} + (3\pi + 4)\,\delta M \;.$$

Dies in $(B.)$ substituirt, erhält man:

$$(J.)\qquad \operatorname{abs} J < \left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi + 4}{2\pi}\,\delta M\right) G \;,$$

oder, falls man $G = \Phi_q + (G - \Phi_q)$ schreibt, indem man dabei unter Φ_q den Werth von Φ im Punkte q versteht:

$$(K.)\qquad \operatorname{abs} J < \frac{\Phi_q}{4} + \left(\frac{3\pi + 4}{2\pi}\,\delta M \Phi_q\right) + (G - \Phi_q)\left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi + 4}{2\pi}\,\delta M\right) \;.$$

Was die *drei* hier auf der rechten Seite stehenden Glieder betrifft, so kann man, falls irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, durch Verkleinerung der Länge δ der Curvenstrecke qQ zunächst dafür sorgen, dass das *vorletzte* Glied $< \frac{\varepsilon}{8}$ wird. Sodann aber kann man, weil G den grössten Werth der stetigen Function $\frac{\Phi}{\cos\theta}$ längs jener Curvenstrecke, Φ_q aber den Werth dieser Function in q vorstellt, durch weitere Verkleinerung von δ den Factor $(G - \Phi_q)$ des *letzten* Gliedes beliebig klein machen, und in solcher Weise dafür sorgen, dass der Werth dieses *letzten* Gliedes ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{8}$ wird. Solches ausgeführt, ist alsdann:

$$(L.)\qquad \operatorname{abs} J < \frac{\Phi_q}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\Phi_q + \varepsilon}{4} \;. \text{ — } Q.\ e.\ d.$$

Der Beweis des zweiten Hülfssatzes ergiebt sich in ganz analoger Weise, und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung.

Dritter Hülfssatz. — *Eine gegebene Function $\Omega = \Omega(x, y)$ sei* **stetig** *in ganzer Erstreckung einer in der xy-Ebene um den Punkt C mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{K}$. Ferner mag der* **kleinste** *Werth, den Ω längs einer um C mit dem Radius $r \leqq R$ beschriebenen Kreisperipherie besitzt, mit $\Omega_0(r)$ bezeichnet sein.*

Alsdann wird dieses $\Omega_0(r)$ eine Function von r sein, die in Erstreckung des Intervalls $(0, R)$ **stetig** *ist.*

Beweis. — Es sei ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad. Wir denken uns das Intervall $(0, R)$ aufgetragen auf irgend einer geraden Linie, die etwa die r-Axe heissen mag. Sind nun $\Omega_0(r)$ und $\Omega_0(r + \varrho)$ die Werthe der Function Ω_0 in irgend zwei dem Intervall $(0, R)$ zugehörigen Punkten r und $r + \varrho$, und denken wir uns dabei ϱ der Bedingung unterworfen:

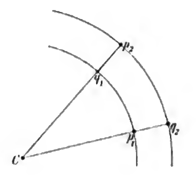
$$(\alpha.) \qquad \text{abs}\, \varrho \leqq \alpha \;,$$

wo α eine positive Constante vorstellen soll, so haben wir nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$(\beta.) \qquad \text{abs}\, [\Omega_0(r + \varrho) - \Omega_0(r)] \;,$$

falls man die Constante α hinreichend klein sich vorstellt, stets $< \varepsilon$ bleiben wird, welche Lage man jenen beiden der Bedingung $(\alpha.)$ unterworfenen Punkten r und $r + \varrho$ in Erstreckung des Intervalls $(0, R)$ auch immer zuertheilen mag.

Wir werden zeigen, dass solches in der That der Fall ist, und dass α die erforderliche Kleinheit besitzt, sobald man α so einrichtet, dass die Werthdifferenz der gegebenen auf $\mathfrak{K}$ stetigen Function $\Omega = \Omega(x, y)$ für jedwedes zu $\mathfrak{K}$ gehörige α-Punktpaar*) $< \varepsilon$ ist.



Zu diesem Zwecke beschreiben wir um das Centrum C zwei Kreisperipherien mit den Radien r und $r + \varrho$. Auf der *erstern* Peripherie werden sich alsdann ein Punkt oder auch mehrere Punkte befinden, in denen die Function Ω den dieser Peripherie zugehörigen *kleinsten* Werth $\Omega_0(r)$ annimmt. Irgend einer von diesen Punkten mag p_1 heissen. Desgleichen

*) Vgl. die Note pag. 74.

mag p_2 irgend einer von denjenigen Punkten der *zweiten* mit dem Radius $(r + \varrho)$ beschriebenen Peripherie vorstellen, in denen Ω den *kleinsten* dieser zweiten Peripherie zugehörigen Werth $\Omega_0(r + \varrho)$ besitzt. Ueberdies markiren wir noch zwei weitere respective zur *ersten* und *zweiten* Peripherie gehörige Punkte q_1 und q_2, und zwar der Art, dass p_1 und q_2 auf *demselben* Radius, und andererseits p_2 und q_1 ebenfalls auf *gleichem* Radius liegen. Vgl. die vorstehende Figur.

Nach (α.) ist aber abs $\varrho \leqq \alpha$. Folglich bilden die Punkte p_1 und q_2 ein α-Punktpaar, ebenso p_2 und q_1. Denken wir uns also die Constante α so klein gewählt, dass die Werthdifferenz der Function $\Omega = \Omega(x, y)$ für jedwedes zu $\mathfrak{K}$ gehörige α-Punktpaar $< \varepsilon$ ist, und bezeichnen wir die Werthe dieser Function in den vier Punkten p_1, p_2, q_1, q_2 kurzweg mit P_1, P_2, Q_1, Q_2, so ist:

$$(\gamma.) \qquad Q_1 = P_2 + \vartheta\varepsilon \quad \text{und} \quad Q_2 = P_1 + \Theta\varepsilon \; ,$$

wo ϑ und Θ wirkliche echte Brüche*) vorstellen. Ueberdies aber finden, weil P_1 und P_2 die Minimalwerthe der Function Ω für die *erste* und *zweite* Peripherie vorstellen, die Relationen statt:

$$P_1 \leqq Q_1 \quad \text{und} \quad P_2 \leqq Q_2 \; .$$

Substituiren wir hier für Q_1 und Q_2 die Ausdrücke (γ.), so erhalten wir:

$$P_1 \leqq P_2 + \vartheta\varepsilon \quad \text{und} \quad P_2 \leqq P_1 + \Theta\varepsilon \; .$$

Und hieraus folgt sofort:

$$P_1 - \vartheta\varepsilon \leqq P_2 \leqq P_1 + \Theta\varepsilon \; ,$$

also, weil ϑ, Θ wirkliche echte Brüche sind:

$$P_1 - \varepsilon < P_2 < P_1 + \varepsilon \; ,$$

mithin:

$$-\varepsilon < P_2 - P_1 < +\varepsilon \; ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\delta.) \qquad \text{abs}\,(P_2 - P_1) < \varepsilon \; .$$

Diese Formel (δ.) aber ist, weil P_1 und P_2 respective mit $\Omega_0(r)$ und $\Omega_0(r + \varrho)$ identisch sind, auch so darstellbar:

$$(\varepsilon.) \qquad \text{abs}\,[\Omega_0(r + \varrho) - \Omega_0(r)] < \varepsilon \; . \; - \; Q. \, e. \, d.$$

*) Ich nenne ϑ einen *wirklichen* echten Bruch, sobald abs ϑ nicht $\leqq 1$, sondern geradezu < 1 ist.

Vierter Hülfssatz. — *Es sei $\mathfrak{H}$ die Fläche eines* ***Halbkreises*** *vom Radius R, und C ihr Centrum, d. i. der Halbirungspunkt des die Fläche auf der einen Seite begrenzenden Durchmessers. Ferner sei $\Omega = \Omega(x, y)$ eine gegebene Function, die in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{H}$* ***stetig*** *ist. Denkt man sich ferner um C eine Kreisperipherie vom Radius $r \leqq R$ beschrieben, so mag der* ***kleinste*** *Werth, den Ω längs des zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Theiles dieser Peripherie besitzt, mit $\Omega_0^-(r)$ bezeichnet sein.*

Alsdann wird dieses $\Omega_0(r)$ eine Function von r sein, die in Erstreckung des Intervalls $(0, R)$ ***stetig*** *ist.*

Der Beweis dieses letzten Satzes ist offenbar ganz analog mit dem des vorhergehenden, eine weitere Erläuterung also unnöthig.

§ 18.

Untersuchung der Green'schen Function am Rande ihres Gebietes. Die sich zunächst darbietende Methode.

Die gegebene Randcurve des Gebietes $\mathfrak{J}$ mag von solcher Beschaffenheit sein, dass

(1.) θ, θ', θ'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass überdies θ' überall $\geqq 0$ ist*).

Ist nun *innerhalb* $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt c gegeben, so werden zufolge des Theorems pag. 82 drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, von denen die erste am *Rande* von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig ist mit $\log \frac{1}{r}$, wo r den von c aus nach dem Rande hinlaufenden Radiusvector vorstellt; während gleichzeitig für jeden Punkt (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ die Relationen stattfinden:

$$(2.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \,. \quad (!)$$

*) Hieraus folgt z. B., dass die Curve *überall convex* ist, jedoch der Art, dass sie auch geradlinige Strecken enthalten kann.

Demgemäss werden sämmtliche Krümmungskreise die Curve auf ihrer *innern* Seite berühren; und es wird also z. B. der in der Formel $(E.)$ pag. 4 enthaltene Factor ε durchweg $= +1$ sein, jene Formel also die Gestalt annehmen:

$$R = \frac{1}{\theta'} \,.$$

Hieraus aber folgt, weil θ', zufolge der Voraussetzungen (1.), überall *stetig*, mithin auch überall *endlich* ist, dass der Krümmungsradius R überall > 0 ist.





Diese Function U pflegt man alsdann die dem Punkte c entsprechende *Green'sche Function*, und jenen Punkt c den *Centralpunkt* dieser Function zu nennen. Mehr im Sinne GREEN's würde es allerdings sein, als GREEN'sche Function nicht das U selber, sondern den Ausdruck

$$\Omega = \left(\log \frac{1}{r}\right) - U = -(U + \log r) \tag{3.}$$

zu bezeichnen, wo U den Werth der Function U in irgend einem Punkte (x, y), und r den Abstand dieses Punktes (x, y) von c vorstellen soll. Wie dem auch sei, — wir werden *beide* Functionen untersuchen, sowohl U wie Ω, und dabei vorzugsweise die Differentialquotienten

$$F = \frac{dU}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{d\Omega}{d\nu} \tag{4.}$$

ins Auge fassen, wo ν die innere Normale der Randcurve vorstellen soll.

Aus der für U gegebenen Definition folgt sofort, dass Ω eine Function von (x, y) ist, die *am Rande* dieses Gebietes $\mathfrak{J}$ überall verschwindet, die ferner in jedwedem Punkte *innerhalb* des Gebietes > 0, und speciell im Punkte c positiv unendlich ist. Auch wird Ω für jedweden Theil des Gebietes $\mathfrak{J}$, der den Punkt c *nicht* enthält, als eine *Fundamentalfunction* zu bezeichnen sein.

Erläuterung. — Man denke sich um c, als Centrum, eine völlig innerhalb $\mathfrak{J}$ liegende äusserst kleine Kreisfläche construirt, und den nach Absonderung dieser Kreisfläche noch übrig bleibenden Theil des Gebietes $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J}_{\sigma\varkappa}$ bezeichnet, indem man dabei unter σ und $\varkappa$ die beiden Randcurven dieses Theiles $\mathfrak{J}_{\sigma\varkappa}$, nämlich unter σ den ursprünglich gegebenen Rand des Gebietes $\mathfrak{J}$, andererseits aber unter $\varkappa$ die soeben construirte kleine Kreisperipherie versteht. Alsdann wird die in (3.) angegebene Function Ω offenbar, ebenso wie U selber, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}_{\sigma\varkappa}$ sein.

Zufolge des ersten Satzes Abh. I, pag. 20 sind daher der grösste und der kleinste Werth, die Ω in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}_{\sigma\varkappa}$ besitzt, nothwendiger Weise *auf den Randcurven* dieses Gebietes, und *nur allein* auf diesen Randcurven anzutreffen. Hieraus aber ergiebt sich, weil Ω auf σ überall $= 0$, und auf $\varkappa$ überall ausserordentlich gross ist, Zweierlei, nämlich erstens, dass der kleinste Werth von Ω in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}_{\sigma\varkappa}$ die 0 ist, und zweitens, dass Ω in jedem Punkte *innerhalb* dieses Gebietes > 0 ist. Diese Resultate aber übertragen sich, wie man sofort übersieht, mit Leichtigkeit auf $\mathfrak{J}$ selber. — *Q. e. d.*

Denkt man sich auf der gegebenen Curve irgend eine *innere Normale* ν errichtet, die so kurz ist, dass sie den gegebenen Centralpunkt c nicht erreichen kann, und bezeichnet man einen *beliebigen* Punkt dieser Normale mit p, ferner den Fusspunkt derselben mit q, so werden die Functionen

$$F_p = \frac{dU_p}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi_p = \frac{d\Omega_p}{d\nu} \tag{5α.}$$

längs der Normale ν (inclusive ihres Fusspunktes q) *stetig* sein. Und lässt man jetzt die Normale ν (sammt ihres Fusspunktes q) längs der gegebenen Curve fortwandern, so werden hierbei die Functionen

$$F_q = \frac{dU_q}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu} \tag{5β.}$$

Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändern.

Diese Sätze ergeben sich, soweit sie auf F Bezug haben, leicht mittelst der aus dem ersten Satze pag. 84 entspringenden Formeln:

$$F_p = \frac{dU_p}{d\nu} = (U_1)_p \cos\gamma + (U_2)_p \sin\gamma \ ,$$

$$F_q = \frac{dU_q}{d\nu} = (U_1)_q \cos\gamma + (U_2)_q \sin\gamma \ ,$$

wo die zugefügten Indices p und q die Werthe der betreffenden Functionen in den Punkten p und q andeuten, während γ das Azimuth der Normale ν gegen die x-Axe vorstellt. Denn einerseits sind U_1 und U_2 (als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ stetig; und andererseits wird γ, falls man die Normale ν längs der Curve fortwandern lässt, zufolge der Voraussetzungen (1.) sich Schritt für Schritt in stetiger Weise ändern.

Sobald aber die in Rede stehenden Sätze für F bewiesen sind, ergiebt sich sodann, auf Grund der Formel (3.), ihr Beweis auch für die Function Φ, falls man nur beachtet, dass die Normale ν so kurz gedacht werden soll, dass sie den gegebenen Centralpunkt c niemals erreicht.

Uebrigens sind die Sätze ($5\alpha.$, $\beta.$) einer etwas allgemeineren Fassung fähig. Bezeichnet man nämlich das von der gegebenen Curve σ und einer inneren Parallelcurve s begrenzte *ringförmige Gebiet* mit $\mathfrak{J}_{\sigma s}$, so ergiebt sich leicht*), dass die Functionen

$$F = \frac{dU}{d\nu} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{d\Omega}{d\nu} \tag{5γ.}$$

*) Etwa unter Anwendung des ersten Satzes pag. 101.

in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}_0$, *eindeutig und stetig* sind, falls man nur den gegenseitigen Abstand jener beiden Curven σ und s hinreichend klein macht.

Wir wenden uns jetzt zu Betrachtungen anderer Art. Da die Function Ω, wie schon bemerkt wurde (pag. 114), im Randpunkte q verschwindet, in allen übrigen Punkten der Normale ν aber > 0 ist, so erkennen wir sofort, *dass der Ausdruck*

$$\Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu} \quad \textit{stets} \quad \geqq 0 \tag{6.}$$

sein muss.

Schliessen zu wollen, dass er geradezu > 0 sei, würde offenbar voreilig sein. Denn es könnten ja z. B. die Werthe von Ω, als Ordinaten auf die Ebene des Gebietes $\mathfrak{J}$ senkrecht aufgesetzt gedacht, über der Linie ν eine Curve liefern, welche die Linie ν im Punkte q *berührt*, sonst aber durchweg oberhalb ν bleibt. Und alsdann würde der Differentialquotient (6.) nicht > 0, sondern $= 0$ sein.

Es handelt sich nun um die ebenso wichtige wie schwierige Frage, ob in der für alle Randpunkte q geltenden Formel (6.) *das zweifelhafte Zeichen $\geq$ wirklich zu belassen sei, oder ob man vielleicht berechtigt ist, dasselbe durch das kategorische $>$ zu ersetzen.*

Da U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist, so ergeben sich, auf Grund bekannter Green'scher Sätze, für irgend einen Punkt j innerhalb $\mathfrak{J}$ folgende Formeln:

$$2\pi U_j = \int \left(U \frac{dT^j}{d\nu} - T^j \frac{dU}{d\nu} \right) d\sigma \,, \quad \text{[vgl. (40 ε.) } L. u. N. P. \text{ pag. 19]} \,, \tag{7.}$$

$$0 = \int \left(T^c \frac{dT^j}{d\nu} - T^j \frac{dT^c}{d\nu} \right) d\sigma \,, \quad \text{[vgl. (42 δ.) } L. u. N. P. \text{ pag. 21] *)} \,, \tag{8.}$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $d\sigma$ der Randcurve. Dabei dient T als Abbreviatur für $\log \frac{1}{r}$, wo r den gegenseitigen Abstand zweier Punkte vorstellt; insbesondere beziehen sich T^j und T^c auf die Abstände $(j \rightarrow d\sigma)$ und $(c \rightarrow d\sigma)$, wo c den gegebenen Centralpunkt vorstellen soll. Um die Gleichung (7.) mit voller Strenge

*) Diese klein gedruckten Citate beziehen sich auf das Werk des Verfassers: »*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*«. Leipzig, bei Teubner. 1877.

abzuleiten, hat man zuvörderst statt der eigentlichen Randcurve σ eine *innere Parallelcurve* anzuwenden. Aus der so erhaltenen Formel ergiebt sich alsdann die Gleichung (7.), sobald man den Abstand dieser Parallelcurve von der Randcurve zu 0 herabsinken lässt, und dabei Rücksicht nimmt auf den Satz (5γ.). — Beachtet man, dass U am Rande $= \log \frac{1}{r}$, d. i. $= T^c$ ist, so erhält man aus (7.) und (8.) durch Subtraction sofort:

$$(9.)\qquad 2\pi U_j = \int \frac{d(T^c - U)}{d\nu} T^j d\sigma \ .$$

Andererseits ergeben sich in analoger Weise für irgend einen Punkt a ausserhalb $\mathfrak{J}$ die Formeln:

$$(10.)\quad 2\pi T_a{}^c = -\int\left(T^c \frac{dT^a}{d\nu} - T^a \frac{dT^c}{d\nu}\right) d\sigma\ , \quad \text{[vgl. (12}\varepsilon\text{.) } L.\ u.\ N.\ P. \text{ pag. 21]}\ ,$$

$$(11.)\quad 0 = -\int\left(U \frac{dT^a}{d\nu} - T^a \frac{dU}{d\nu}\right) d\sigma\ , \quad \text{[vgl. (10}\delta\text{.) } L.\ u.\ N.\ P. \text{ pag. 19]*)}\ ,$$

wo T^a und T^c respective den Abständen ($a \rightarrowtail d\sigma$) und ($c \rightarrowtail d\sigma$) zugehören, während T^c_a auf den Abstand ($c \rightarrowtail a$) sich bezieht. Aus (10.) und (11.) folgt durch Subtraction:

$$(12.)\qquad 2\pi T_a{}^c = \int \frac{d(T^c - U)}{d\nu} T^a d\sigma \ .$$

Nun ist $T^c - U = \left(\log \frac{1}{r}\right) - U = \Omega$ [vgl. (3.)]; so dass also die beiden Formeln (9.) und (12.) die Gestalt gewinnen:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} U_j &= \int \left(\frac{1}{2\pi}\frac{d\Omega}{d\nu}\right) T^j d\sigma\ ,\\ T_a{}^c &= \int \left(\frac{1}{2\pi}\frac{d\Omega}{d\nu}\right) T^a d\sigma\ .\end{aligned}$$

Demgemäss können U_j und T^c_a als Potentiale angesehen werden, die respective auf j und a ausgeübt werden von *ein und derselben* Curvenbelegung, deren Dichtigkeit η den Werth hat:

$$(14.)\qquad \eta = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Omega}{d\nu}\ .$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$, mithin

*) Auch diese Citate beziehen sich auf das genannte Werk.

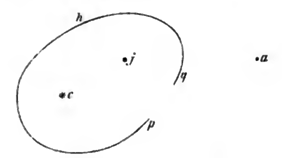


auch η seien längs irgend eines *Elementes* pq der gegebenen Randcurve überall $= 0$, und die aus einer solchen Annahme sich ergebenden Consequenzen entwickeln.

Die beiden Potentiale (13.):

(15.) $$U_j \quad \text{und} \quad T_a^c$$

werden alsdann von der Belegung der *ungeschlossenen* Curve qhp herrühren, mithin zusammengenommen eine Function bilden, die



durch die Oeffnung pq hindurch *stetig* ist. Hieran wird nichts geändert, sobald man von beiden Potentialen das von dem festen Punkte c herrührende Potential T^c in Abzug bringt; so dass also die beiden Ausdrücke

(16.) $$U_j - T_j^c \quad \text{und} \quad T_a^c - T_a^c$$

zusammengenommen wiederum eine Function repräsentiren, die durch jene Oeffnung pq hindurch *stetig* ist. Da nun aber von diesen beiden Ausdrücken (16.) der *zweite* identisch verschwindet, so ergiebt sich hieraus nach bekanntem Satze, dass der *erstere* ebenfalls verschwindet, und zwar für sämmtliche Punkte j; was mit der Natur dieses Ausdruckes in offenbarem Widerspruch steht. Wir sehen somit, dass die gemachte Annahme *unhaltbar* ist, und gelangen daher zu folgendem Satze:

Der in (6.) *genannte Differentialquotient*:

(17.) $$\Phi_q = \frac{d\Omega_q}{d\nu}$$

kann niemals in sämmtlichen Punkten eines Randelementes verschwinden, wie klein man sich dieses Element auch denken möge *). —

Ob aber dieser Differentialquotient nicht vielleicht in *einzelnen* Punkten des Randes verschwinden kann, — diese Frage scheint

*) Dieses Resultat ist schon *früher* vom Verf. abgeleitet worden. Vgl. das in den beiden vorhergehenden Noten genannte Werk, pag. 77.

bisher noch niemals in Angriff genommen, und überhaupt mit grossen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Um so mehr dürfte es gerechtfertigt sein, wenn ich die beiden folgenden Paragraphe dazu verwende, um die von mir in dieser Richtung angestellten Untersuchungen in sorgfältiger Weise darzulegen.

Beiläufig sei bemerkt, dass man durch die in diesem Paragraph dargelegte Methode z. B. auch zu folgendem Satze gelangen kann:

Satz. *) — *Ist längs der gegebenen geschlossenen Curve eine Function $f = f(\sigma)$ vorgeschrieben, und setzt man voraus, dass*

(α.) *θ, θ', θ'' und f, f' stetig sind, dass ferner f'' abtheilungsweise stetig ist, und dass endlich θ' überall $\geqq 0$ ist,*

so werden die den Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ nicht allein existiren, sondern auch mit den früher (Theorem pag. 82) angegebenen Eigenschaften behaftet sein.

Gleichzeitig werden alsdann sämmtliche Werthe, welche Φ und Ψ in Erstreckung von $\mathfrak{A}$, resp. in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ besitzen, abgesehen von einer additiven Constante, darstellbar sein als die Potentiale ein und derselben Curvenbelegung auf äussere, resp. auf innere Punkte.

Es werden nämlich folgende Formeln gelten:

$$(\beta.)\qquad \Phi_x = \Gamma + \int T_x \delta\, d\sigma\ , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A})\ ,$$
$$\Psi_x = \Gamma + \int T_x \delta\, d\sigma\ , \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{J})\ ,$$

wo $T_x = \log \frac{1}{E_x}$ ist, und E_x den Abstand des Elementes $d\sigma$ vom Punkte x vorstellt, während Γ eine bestimmte endliche Constante, nämlich den Werth von Φ im Unendlichen repräsentirt, [vgl. Abh. I, pag. 22 (4.)].

Dabei bezeichnet, was besonders zu betonen ist, δ eine längs der Curve stetige Function. Auch ist der Werth dieser Function darstellbar durch die Formel:

$$(\gamma.)\qquad \delta = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\Phi - \Psi)}{d\nu}\ ,$$

wo ν die innere Normale der Curve vorstellt.

---

*) Vgl. den von mir im Jahre 1878 in den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. publicirten Aufsatz, insbesondere den III. und IV. Fundamentalsatz, daselbst pag. 52 und 54.



§ 19.

Fortsetzung. Die Methode der berührenden Kreisfläche.

Für diesen und den folgenden Paragraph wird es, zur Vereinfachung der Darstellung, gut sein, folgenden Hülfssatz voranzuschicken:

Hülfssatz. — *Es seien* [vgl. die folgende Figur] BCD *und* HCH_1 *zwei aufeinander senkrechte Durchmesser einer um* C *mit dem Radius* A *beschriebenen Kreisperipherie. Ferner sei* p *ein auf dem Radius* CD *gelegener Punkt, dessen Centraldistanz* $= r$ *ist. Ueberdies mögen auf der Peripherie zu beiden Seiten von* D *zwei Punkte* N *und* N_1 *in solcher Weise markirt sein, dass* N, p, H_1 *in gerader Linie, und andererseits* N_1, p, H *ebenfalls in gerader Linie liegen. Endlich sei* S *ein längs der Peripherie herumlaufender Punkt, und* E *der von Augenblick zu Augenblick sich ändernde Abstand dieses Punktes* S *vom festen Punkte* p.

Alsdann wird die von E *abhängende Function*

$$(\alpha.)\qquad f = f(E) = \frac{1}{2\pi A r}\left(\frac{A^2 + r^2}{E^2} - \frac{(A^2 - r^2)^2}{E^4}\right)$$

in dem Augenblicke $= 0$ *sein, in welchem* S *in* N *sich befindet, sodann* > 0 *sein, während* S*, von* N *aus, längs der Peripherie über* B *nach* N_1 *geht, wieder* $= 0$ *werden, sobald* B *in* N_1 *anlangt, und endlich* < 0 *sein, während* S*, seine Wanderung längs der Peripherie fortsetzend, von* N_1 *über* D *nach* N *geht. Oder genauer ausgedrückt: Es wird diese Function* f *längs der Strecke* NBN_1 *positiv, längs der Strecke* N_1DN *negativ sein, und im Ganzen nur zwei Nullpunkte haben, die in* N *und* N_1 *liegen. Insbesondere wird ihr Werth längs des Halbkreises* HBH_1 *durchweg*

$$(\beta.)\qquad \geqq \frac{r}{16\pi A^3}$$

sein.

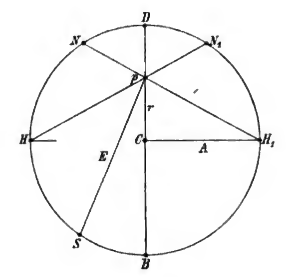
Dabei mag noch bemerkt sein, dass man die negative Strecke N_1DN *durch Vergrösserung von* r *beliebig klein machen kann; wie solches aus der für die Punkte* N, N_1 *angegebenen Construction sofort sich ergiebt.*

Beweis. — Aus der Formel (α.) folgt sofort, dass die Function $f = f(E)$ nur für *einen einzigen* Werth von E verschwindet. Dieser Werth lautet:

$$E = \frac{A^2 - r^2}{\sqrt{A^2 + r^2}} = \frac{(A - r)(A + r)}{\sqrt{A^2 + r^2}},$$

und ist daher [vgl. die Figur] auch so darstellbar:

$$E = \frac{(pD)(pB)}{(pH_1)},$$



oder auch so:

$$E = (pN) = (pN_1) .$$

Folglich repräsentiren N und N_1 die beiden *einzigen* Lagen des peripherischen Punktes S, für welche f verschwindet. Folglich hat f längs NBN_1 *constantes* Vorzeichen, und ebenso längs N_1DN. Dass aber ersteres $+$, und letzteres $-$ ist, erkennt man sofort aus den in B und D, d. i. für $E = A + r$ und $E = A - r$ sich ergebenden Werthen:

$$\begin{cases} \text{Werth in } B: & f(A + r) = + \dfrac{1}{\pi(A + r)^2}, \\ \text{Werth in } D: & f(A - r) = - \dfrac{1}{\pi(A - r)^2}. \end{cases}$$

Um schliesslich die Behauptung (β.) zu beweisen, bemerken wir, dass für alle Punkte S des Halbkreises HBH_1 die Relation stattfindet:

$$(\varrho.) \qquad A \leqq E \leqq 2A ,$$

dass mithin die Function

$$f = \frac{(A^2 + r^2)E^2 - (A^2 - r^2)^2}{2\pi A r E^4}$$

für die Punkte S des genannten Halbkreises der Formel entspricht:



$$f \geqq \frac{(A^2 + r^2) A^2 - (A^2 - r^2)^2}{2 \pi A r E^4} = \frac{r^2(3 A^2 - r^2)}{2 \pi A r E^4} .$$

Diese Formel aber kann, mit abermaliger Rücksicht auf (ϱ.), auch so geschrieben werden:

$$f \geqq \frac{r^2(3 A^2 - r^2)}{2 \pi A r (2 A)^4} ,$$

oder, weil $r^2 \leqq A^2$, mithin $3 A^2 - r^2 \geqq 2 A^2$ ist, auch so:

$$f \geqq \frac{r^2 \cdot 2 A^2}{2 \pi A r (2 A)^4} = \frac{r}{16 \pi A^3} . \text{ — } Q.\ e.\ d.$$

Dies vorangeschickt, gehen wir jetzt über zu unserm eigentlichen Thema, indem wir dabei festhalten an den Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphs. Aus jenen Voraussetzungen folgt [vgl. die Note pag. 113], dass der *kleinste* Krümmungsradius R_0 der gegebenen Curve stets > 0 ist. Bezeichnet man ferner den *kürzesten* Abstand des gegebenen Centralpunktes c von der Curve mit $2 P_0$, so wird P_0 ebenfalls > 0 sein (weil c *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegen soll). Bezeichnet nun A eine den Formeln:

$$(1.) \qquad 0 < A < R_0 \quad \text{und} \quad 0 < A < P_0$$

unterworfene, sonst aber beliebig gewählte Constante, und denkt man sich einen Kreis $\mathfrak{K}$ vom Radius A construirt, der die gegebene Curve in irgend einem Punkte q von Innen berührt, so wird die Peripherie dieses Kreises, ausser dem Punkte q, keinen weiteren Punkt mit der gegebenen Curve gemein haben [Zweiter Satz pag. 101]. Demgemäss wird die *Fläche* dieses Kreises $\mathfrak{K}$ ein *Theil* des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein.

Ueberdies erkennt man leicht, dass der gegebene Centralpunkt c *ausserhalb* des Kreises $\mathfrak{K}$ liegt. Denn befände sich c *innerhalb* $\mathfrak{K}$, oder *am Rande* von $\mathfrak{K}$, so würde der Abstand $(cq) \leqq 2 A$, also, nach (1.), $< 2 P_0$ sein. Es würde also in diesem Falle der Punkt c vom Curvenpunkte q einen Abstand haben, der $< 2 P_0$ ist; während doch $2 P_0$ den *kürzesten* Abstand jenes Punktes c von der Curve vorstellen soll.

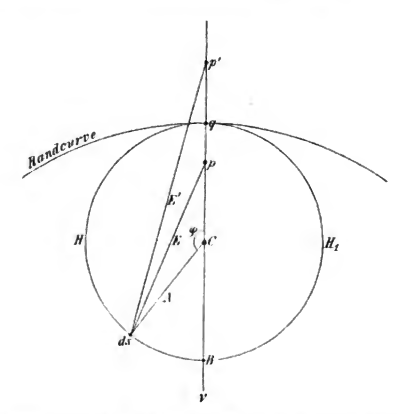
Da nun die Fläche $\mathfrak{K}$ ein *Theil* von $\mathfrak{J}$ ist, und der Punkt c *ausserhalb* $\mathfrak{K}$ liegt, so ergiebt sich hieraus sofort, dass die Functionen U und Ω *Fundamentalfunctionen des Gebietes* $\mathfrak{K}$ sind. Markirt man daher irgend einen Punkt p *innerhalb* $\mathfrak{K}$, und zugleich auch irgend einen Punkt p' *ausserhalb* $\mathfrak{K}$, so gelten die Formeln:

$$(2.)\qquad 0 = \int \frac{d\Omega}{dn}\, ds\,, \qquad \text{[vgl. } L.\ u.\ N.P. \text{ (40}\delta\text{.) pag. 19],}$$

$$(3.)\qquad 2\pi\,\Omega_p = \int \left(\Omega\frac{dT}{dn} - T\frac{d\Omega}{dn}\right) ds\,, \qquad \text{[vgl. } L.\ u.\ N.P. \text{ (40}\varepsilon\text{.) pag. 19],}$$

$$(4.)\qquad 0 = \int \left(\Omega\frac{dT'}{dn} - T'\frac{d\Omega}{dn}\right) ds\,, \qquad \text{[vgl. } L.\ u.\ N.P. \text{ (40}\delta\text{.) pag. 19]*),}$$

wo die Integration hinläuft über alle Randelemente ds des Kreises $\mathfrak{K}$, und wo n die innere Normale des Elementes ds repräsentirt. Dabei bezeichnet Ω_p den Werth von Ω in p; während T und T' respective den Entfernungen ($p \rightarrowtail ds$) und ($p' \rightarrowtail ds$) angehören. All' diese Formeln (2.), (3.), (4.) ergeben sich, ebenso wie die auf pag. 116 besprochenen, mit absoluter Strenge durch Anwendung der auch damals benutzten Parallelcurven. (Vgl. pag. 117.)



Es mögen nun die beiden Punkte p und p' in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Centrum C heissen soll, zu einander *conjugirt* sein; sodass also z. B. zwischen ihren Centraldistanzen r und r' die Relation stattfindet

$$(5.)\qquad rr' = A^2\,.$$

Ueberdies liege p auf dem Radius Cq, mithin p' auf der Verlänge-

*) Diese Citate beziehen sich auf das in der Note pag. 116 genannte Werk.

rung dieses Radius. Bezeichnet man alsdann die Abstände eines Elementes ds von den drei Punkten C, p, p' respective mit A, E, E', so sind, zufolge (5.), die beiden Dreiecke EAr und $E'r'A$ einander ähnlich; woraus folgt:

$$\frac{E}{E'} = \frac{A}{r'} = \frac{r}{A}. \tag{6.}$$

Somit ergiebt sich:

$$\log\frac{1}{E'} - \log\frac{1}{E} = \log\frac{r}{A},$$

d. i.

$$T' - T = \log\frac{r}{A}. \tag{7.}$$

Bezeichnet man ferner in jenen beiden Dreiecken den den Seiten E und E' gegenüberliegenden Winkel mit φ, so ist:

$$\begin{aligned} E^2 &= A^2 + r^2 - 2Ar\cos\varphi, \\ E'^2 &= A^2 + r'^2 - 2Ar'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{8.}$$

Und mit Rücksicht hierauf ergeben sich, falls man die *innere* Normale des Elementes ds mit n bezeichnet, folgende Formeln:

$$\frac{dT}{dn} = -\frac{d\log E}{dn} = \frac{\partial \log E}{\partial A} = \frac{A - r\cos\varphi}{E^2},$$

$$\frac{dT'}{dn} = -\frac{d\log E'}{dn} = \frac{\partial \log E'}{\partial A} = \frac{A - r'\cos\varphi}{E'^2},$$

Formeln, die man mit Rücksicht auf (6.) auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dn} &= \frac{A - r\cos\varphi}{E^2}\,\frac{A^2}{A^2}, \\ \frac{dT'}{dn} &= \frac{A - r'\cos\varphi}{E^2}\,\frac{r^2}{A^2}. \end{aligned} \tag{9.}$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{A(r^2 - A^2) - r(rr' - A^2)\cos\varphi}{A^2E^2},$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{r^2 - A^2}{AE^2}. \tag{10.}$$

Subtrahirt man jetzt die beiden Formeln (3.), (4.) von einander, so erhält man mit Rücksicht auf (7.) und (10.):

$$- 2\pi \Omega_p = \int \Omega \frac{r^2 - A^2}{AE^2} ds - \left(\log \frac{r}{A}\right) \int \frac{d\Omega}{dn} ds ,$$

also mit Rücksicht auf (2.):

$$(11.) \qquad - \Omega_p = \int \Omega \frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2} ds ,$$

eine Formel, die sich ohne Weiteres nach r differenziren lässt.

Aus (8.) folgt sofort:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2}\right) = \frac{2Ar - (A^2 + r^2)\cos\varphi}{\pi E^4} ,$$

oder, falls hier für $\cos\varphi$ der aus (8.) entspringende Werth substituirt wird:

$$(12.) \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 - A^2}{2\pi A E^2}\right) = \frac{1}{2\pi A r}\left(\frac{A^2 + r^2}{E^2} - \frac{(A^2 - r^2)^2}{E^4}\right), \quad \text{d. i.} = f ,$$

wo f die in (α.) pag. 120 besprochene Function repräsentirt. Differenzirt man also die Formel (11.) nach r, so erhält man:

$$(13.) \qquad - \frac{d\Omega_p}{dr} = \int \Omega f ds ,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(14.) \qquad - \frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{qHB} \Omega f ds + \int_{BH_1q} \Omega ds ,$$

wo alsdann das eine Integral über den Halbkreis qHB, das andere über den Halbkreis BH_1q hinerstreckt zu denken ist [vgl. die vorhergehende Figur].

Diese Formel (13.) oder (14.) gilt offenbar (wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht) nicht nur für die Function Ω, sondern ganz allgemein für *jedwede* Fundamentalfunction der Kreisfläche $\mathfrak{K}$. Sie wird also z. B. richtig bleiben, wenn man in ihr statt Ω eine *Constante*, etwa die Zahl 1, nimmt. Somit folgt:

$$0 = \int_{qHB} f ds + \int_{BH_1q} f ds .$$

Hieraus aber folgt, weil f lediglich von E abhängt, mithin diese beiden Integrale einander *gleich* sind, dass jedes derselben *einzeln* $= 0$ ist; sodass man also die Formeln erhält:

$$\int_{qHB} f ds = 0 \quad \text{und} \quad \int_{BH_1q} f ds = 0 .$$

Und mit Rücksicht hierauf kann man die Formel (14.) auch so schreiben:

$$(15.)\qquad -\frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{qHB} (\Omega - k) f\, ds + \int_{BH_1q} (\Omega - k_1) f\, ds\ ,$$

wo k und k_1 *willkürlich zu wählende Constanten* vorstellen.

Bezeichnet man jetzt [vgl. die vorhergehende Figur] die im Punkte q auf der gegebenen Curve errichtete innere Normale qCB kurzweg mit ν, und beachtet man, dass die zu untersuchende Function Φ_p [pag. 115] die Bedeutung hat:

$$(16.)\qquad \Phi_p = \frac{d\Omega_p}{d\nu} = -\frac{d\Omega_p}{dr}\ ,$$

so folgt aus (15.):

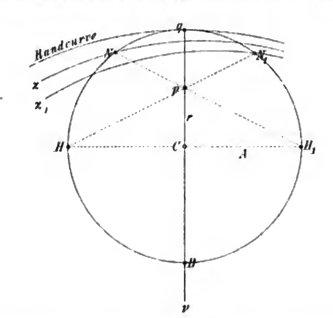
$$(17.)\qquad \Phi_p = \int_{qHB} (\Omega - k) f\, ds + \int_{BH_1q} (\Omega - k_1) f\, ds\ .$$

Um von dieser Formel (17.) Nutzen zu ziehen, wollen wir (vgl. die folgende Figur) die Niveaucurven

$$(18.)\qquad \Omega = \text{Const.}$$

ins Auge fassen. Offenbar werden wir diese das ganze Gebiet $\mathfrak{J}$ erfüllenden Niveaucurven dadurch erhalten, dass wir die Const. von 0 zu $+\infty$ wachsen lassen. Und zwar wird die Curve $\Omega = \text{Const.}$, falls wir die Const. zuerst $= 0$ machen, sodann allmählich wachsen, und schliesslich $= +\infty$ werden lassen, zuerst identisch sein mit der Randcurve, sodann sich ein wenig verkleinern und mit dieser Randcurve nahezu parallel werden, hierauf sich mehr und mehr zusammenziehen, und schliesslich zu dem gegebenen Centralpunkte c zusammenschrumpfen.

Denken wir uns nun den Centralabstand r des Punktes p sehr wenig kleiner als den Kreisradius A, mithin p sehr nahe an q, so werden auch die [mittelst der punktirten Linien sich bestimmenden] Punkte N und N_1 sehr nahe an q liegen; es werden daher in diesem Falle die durch N und N_1 gehenden Niveaucurven $\varkappa$ und $\varkappa_1$ dem Rande von $\mathfrak{J}$ sehr nahe liegen, und mit diesem Rande nahezu parallel sein; sodass also z. B. der Halbkreis qHB von der Curve $\varkappa$ nur in dem *einen* Punkte N, und ebenso der Halbkreis BH_1q von der Curve $\varkappa_1$ nur in dem *einen* Punkte N_1 geschnitten wird. Bezeichnet also k den constanten Werth von Ω längs der Niveaucurve $\varkappa$, so



wird $(\Omega - k)$ längs des Kreisbogens qN durchweg *negativ*, und längs des Kreisbogens NHB durchweg *positiv* sein. Genau dasselbe gilt aber, zufolge unseres Hülfssatzes*) pag. 120, auch von der Function f. *Folglich ist das Product* $(\Omega - k)f$ *längs des ganzen Halbkreises* qHB *überall positiv.* Analoges gilt offenbar von dem Producte $(\Omega - k_1)f$ mit Bezug auf den *andern* Halbkreis BH_1q, falls nämlich k_1 den constanten Werth der Function Ω längs der Niveaucurve x_1 vorstellt.

Denkt man sich also in der Formel (17.) den dortigen Constanten k und k_1 die soeben definirten Werthe zuertheilt, so wird jedes der dortigen beiden Integrale eine Summe von lauter *positiven* Gliedern sein, mithin *verkleinert* werden, sobald man irgend welchen Theil dieser Glieder fortlässt, also z. B. *verkleinert* werden, sobald man die dortigen Integrationen nicht über die Halbkreise

$$qHB \quad \text{und} \quad BH_1q\,,$$

sondern nur über die Kreisquadranten

$$HB \quad \text{und} \quad BH_1$$

sich hinerstrecken lässt. Somit ergiebt sich aus (17.):

$$\Phi_p \gtreqless \int_{HB} (\Omega - k) f\,ds + \int_{BH_1} (\Omega - k_1) f\,ds\,. \tag{18.}$$

Bezeichnet man daher den *kleinsten* Werth von Ω längs des Halbkreises HBH_1 mit Ω_0, und beachtet man, dass f, zufolge des Hülfssatzes

---

*) Die Bezeichnungen in jenem Hülfssatze sind genau dieselben wie hier, nur mit dem Unterschiede, dass der Punkt q dort mit D benannt ist.

pag. 120, längs dieses Halbkreises HBH_1 überall *positiv* ist, so erhält man *a fortiori:*

$$(19.)\qquad \Phi_p \geqq (\Omega_0 - k)\int_{HB} f\,ds + (\Omega_0 - k_1)\int_{BH_1} f\,ds\,.$$

Nach (β.) pag. 120 ist aber:

$$\begin{cases} \int_{HB} f\,ds \geqq \frac{r}{16\pi A^3}\int_{HB} ds = \frac{r}{16\pi A^3}\,\frac{\pi A}{2}\,, \\ \text{und } \int_{BH_1} f\,ds \quad \text{ebenfalls} \quad \geqq \frac{r}{16\pi A^3}\,\frac{\pi A}{2}\,. \end{cases}$$

Somit folgt:

$$(20.)\qquad \Phi_p \geqq \Big((\Omega_0 - k) + (\Omega_0 - k_1)\Big)\,\frac{r}{32 A^2}$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(21.)\qquad \Phi_p - \Big(2\,\Omega_0 - k - k_1\Big)\,\frac{r}{32 A^2} \geqq 0\,.$$

Diese Formel wird, ihrer Entstehung zufolge, gültig sein nicht nur für das *augenblicklich betrachtete* r, sondern auch für jedes grössere r, falls nur dasselbe $< A$ bleibt. Sie wird also, falls man dieses augenblickliche r mit a bezeichnet, gültig sein für jedwedes der Bedingung $a \leqq r < A$ entsprechende Argument r. Bezeichnet man daher die linke Seite dieser Formel (21.) mit $F(r)$, so ist:

$$(22.)\qquad F(r) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq r < A\,.$$

Dabei ist $F(r)$ eine *in ganzer Erstreckung des Intervalls* $a \ldots A$ *stetige* Function. Denn einerseits sind k, k_1 und Φ_p Functionen von r, die einer derartigen Stetigkeit sich erfreuen, wie solches theils aus der Bedeutung von k, k_1, theils aus dem Satze (5α.) pag. 115 hervorgeht. Und andererseits ist Ω_0 (der Mininalwerth von Ω längs des Halbkreises HBH_1), ebenso wie der Radius A, eine *Constante*.

Mit Rücksicht auf diese Stetigkeit der Function $F(r)$ folgt nun aus der Formel (22.) sofort, dass

$$(23.)\qquad F(A) \geqq 0$$

ist. Denn wollte man annehmen, es sei $F(A) < 0$, so müssten, in Anbetracht der soeben besprochenen Stetigkeit von $F(r)$, in unmittelbarer Nähe von A Argumente $r < A$ existiren, für welche $F(r)$ ebenfalls < 0 wäre; was mit (22.) in Widerspruch steht.

Die in solcher Weise constatirte Formel (23.) nimmt nun, falls man für $F(A)$ seine eigentliche Bedeutung eintreten lässt, die Gestalt an:

$$(24.)\qquad \Phi_q - 2\Omega_0 \frac{A}{32 A^2} \geqq 0\,, \quad \text{d. i.} \quad \Phi_q \geqq \frac{\Omega_0}{16 A}\,.$$

Denn für $r = A$ geht Φ_p in Φ_q über, während k und k_1 hierbei zu 0 werden.

Nun war aber q ein beliebiger Randpunkt. Und wir ersehen also aus (24.), *dass Φ in jedwedem Randpunkte > 0 ist; womit die auf pag.* 116 *aufgeworfene Frage beantwortet ist.*

Indessen lässt die Methode, durch welche wir hier zu diesem Resultate gelangt sind, Manches zu wünschen übrig, insofern als uns vorläufig noch die Mittel fehlen dürften, um das Operiren mit Niveaucurven mit wirklicher Strenge zu vereinen; wie denn z. B. auch die vorhin (pag. 126) ausgesprochene Behauptung, dass der Halbkreis qHB von der Niveaucurve $\varkappa$ immer nur in *einem einzigen* Punkte geschnitten wird, ohne wirklichen Beweis geblieben ist.

Immerhin dürfte die hier exponirte Methode eine passende Einleitung sein für diejenige *wirklich strenge*, aber auch *complicirtere* Methode, von welcher der folgende Paragraph handeln soll.

§ 20.

Fortsetzung. Methode der übergreifenden Kreisfläche.

Wir halten fest an den Bezeichnungen und Voraussetzungen der beiden vorhergehenden Paragraphe, und denken uns also z. B. die gegebene Curve von solcher Beschaffenheit [vgl. (1.) pag. 113], dass

(1.) θ, θ' θ'' *stetige* Functionen der Bogenlänge σ sind, und dass ausserdem θ' überall $\geqq 0$ ist.

Es sei nun R_0 der *kleinste* Krümmungsradius der Curve, ferner sei $2P_0$ der *kürzeste* Abstand des innerhalb $\mathfrak{J}$ gegebenen Centralpunktes c von dieser Curve, endlich sei A irgend eine den beiden Bedingungen

$$(2.)\qquad 0 < A < R_0 \quad \text{und} \quad 0 < A < P_0$$

entsprechende Constante. Denkt man sich alsdann einen Kreis $\mathfrak{K}$ vom Radius A construirt, der die gegebene Curve in irgend einem

Punkte q von Innen berührt, so wird der Centralpunkt c *ausserhalb* der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ liegen, mithin

$$(3.)\qquad A < (Cc)$$

sein, wo C das Centrum der Fläche $\mathfrak{K}$ vorstellt. Auch wird alsdann diese Fläche $\mathfrak{K}$ ein Theil von $\mathfrak{J}$ sein. Und zwar wird die Peripherie der Fläche $\mathfrak{K}$, ausser dem Berührungspunkte q, *keinen weiteren* Punkt mit dem Rande von $\mathfrak{J}$, d. i. mit der gegebenen Curve gemein haben.

Diese bereits früher (pag. 122) constatirten einfachen Sätze bilden das Fundament der jetzt anzustellenden Betrachtungen. Denken wir uns um das Centrum C des mit dem Radius A beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ einen zweiten Kreis $\mathfrak{K}^*$ vom Radius $A + \alpha^*$ beschrieben, und dabei $(A + \alpha^*)$ der Bedingung unterworfen:

$$(4.)\qquad A < A + \alpha^* < (Cc)\ ,$$

so wird offenbar der Centralpunkt c nicht nur ausserhalb $\mathfrak{K}$, sondern auch ausserhalb $\mathfrak{K}^*$ liegen.

Gleichzeitig aber wollen wir die neue Constante α^* so klein uns denken, dass die Peripherie $\mathfrak{K}^*$ die gegebene Curve in *zwei* zu beiden Seiten von q gelegenen Punkten schneidet, sonst aber *keine weiteren* Punkte mit der Curve gemein hat, und dass Gleiches auch gilt von jedweder um C beschriebenen Peripherie, deren Radius $(A + \alpha)$ der Relation entspricht

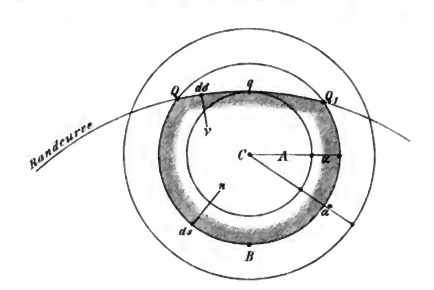
$$(5.)\qquad A < A + \alpha \leqq A + \alpha^*\ .$$

Dass eine derartige Bestimmungsweise der Constante $(A + \alpha^*)$, bei den von uns gemachten Voraussetzungen (1.), stets möglich ist, ergiebt sich sofort aus dem dritten Satze pag. 101. Denn es wird zu diesem Zwecke nur erforderlich sein, dieses $(A + \alpha^*) < \varrho^*$ zu machen, wo ϱ^* die dort besprochene Constante vorstellt.

Bezeichnet man den innerhalb der Peripherie $(A + \alpha)$ befindlichen Theil des Gebietes $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{K}_\alpha$, so wird $\mathfrak{K}_\alpha$ theils von jener Peripherie selber, theils von einer gewissen Strecke QqQ_1 der gegebenen Curve begrenzt, und in Q und Q_1 mit zwei Ecken versehen sein. Dieses Gebiet $\mathfrak{K}_\alpha$ ist in beistehender Figur durch Schraffirung hervorgehoben. Die aus (4.), (5.) entspringende Formel

$$(6.)\qquad A < A + \alpha \leqq A + \alpha^* < (Cc)$$

zeigt, dass der Centralpunkt c stets *ausserhalb* $\mathfrak{K}_\alpha$ liegt. Demgemäss



sind also U und Ω *Fundamentalfunctionen* des Gebietes $\mathfrak{K}_a$. Ist mithin p irgend ein Punkt *innerhalb* $\mathfrak{K}_a$, und p' ein beliebiger Punkt *ausserhalb* $\mathfrak{K}_a$, so ergeben sich folgende mit (2.), (3.), (4.) pag. 123 analoge Formeln:

$$(7.)\qquad 0 = \int \frac{d\Omega}{dn}\, ds + \int \frac{d\Omega}{d\nu}\, d\sigma\ ,$$

$$(8.)\qquad 2\pi\,\Omega_p = \int \left(\Omega \frac{dT}{dn} - T \frac{d\Omega}{dn}\right) ds + \int \left(\Omega \frac{dT}{d\nu} - T \frac{d\Omega}{d\nu}\right) d\sigma\ ,$$

$$(9.)\qquad 0 = \int \left(\Omega \frac{dT'}{dn} - T' \frac{d\Omega}{dn}\right) ds + \int \left(\Omega \frac{dT'}{d\nu} - T' \frac{d\Omega}{d\nu}\right) d\sigma\ ,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der das Gebiet $\mathfrak{K}_a$ begrenzenden Kreisbogenstrecke QBQ_1 [vgl. die Figur], und über alle Elemente $d\sigma$ der zur gegebenen Curve gehörigen Strecke Q_1qQ. Dabei bezeichnen n und ν die auf ds und $d\sigma$ errichteten, in das Innere von $\mathfrak{K}_a$ hineinlaufenden Normalen. Ferner haben T und T' die Bedeutungen:

$$(10.)\qquad T = \log\frac{1}{E}\ ,\quad T' = \log\frac{1}{E'}\ ,$$

wo E und E' die Abstände der beiden Punkte p und p' von ds, respective von $d\sigma$ vorstellen.

Subtrahirt man die beiden Formeln (8.) und (9.) von einander, und beachtet man dabei, dass die Function Ω längs des Randes von $\mathfrak{J}$, also z. B. auch längs der Curvenstrecke Q_1qQ überall $= 0$ ist, so folgt:

$$(11.)\qquad -2\pi\,\Omega_p = \int \left(\Omega\left(\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn}\right) - (T' - T)\frac{d\Omega}{dn}\right) ds - \int (T' - T)\frac{d\Omega}{d\nu}\, d\sigma\,.$$



Lässt man nun, ebenso wie im vorhergehenden Paragraph, den Punkt p auf den Radius Cq fallen, und nimmt man für p' den zu p in Bezug auf die Peripherie $(A + \alpha)$ *conjugirten* Punkt [vgl. die folgende Figur], so werden die damals in (7.), (10.) pag. 124 gefundenen Formeln Gültigkeit haben für alle Elemente ds des Kreisbogens QBQ_1, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle des dortigen A gegenwärtig $(A + \alpha)$ zu stehen kommt; so dass man also erhält:

$$T' - T = \log \frac{r}{A + \alpha},$$

$$\frac{dT'}{dn} - \frac{dT}{dn} = \frac{r^2 - (A + \alpha)^2}{(A + \alpha)E^2},$$

wo r den Centralabstand (Cp) des Punktes p vorstellt, während E den Abstand dieses Punktes vom Elemente ds bezeichnet. Demgemäss folgt aus (11.):

$$-2\pi\Omega_p =$$
$$= \int \Omega \frac{r^2 - (A + \alpha)^2}{(A + \alpha)E^2} ds - \left(\log \frac{r}{A + \alpha}\right) \int \frac{d\Omega}{dn} ds - \int (T' - T) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma,$$

oder, falls man das *zweite* dieser drei Integrale durch den aus (7). entspringenden Werth ersetzt, und zugleich die Formeln (10.) beachtet,

$$(12.) \qquad -2\pi\Omega_p =$$
$$= \int \Omega \frac{r^2 - (A + \alpha)^2}{(A + \alpha)E^2} ds + \int \left(\log \frac{r}{A + \alpha} + \log E' - \log E\right) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma.$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung:

$$(13.) \qquad f = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 - (A + \alpha)^2}{2\pi(A + \alpha)E^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi(A + \alpha)r} \left(\frac{(A + \alpha)^2 + r^2}{E^2} - \frac{[(A + \alpha)^2 - r^2]^2}{E^4}\right),$$

[vgl. die analoge Formel (12.) pag. 125], so ergiebt sich aus (12.) durch Differentiation nach r:

$$(14.) \quad -\frac{d\Omega_p}{dr} = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi} \int_{Q_1qQ} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{E'} \frac{dE'}{dr} - \frac{1}{E} \frac{dE}{dr}\right) \frac{d\Omega}{d\nu} d\sigma,$$

wo der grösseren Deutlichkeit willen die Integrationswege durch Indices markirt sind.

Nun haben wir [vgl. (5a.) pag. 115] unter Φ_p den Differentialquotienten von Ω_p nach der durch p gehenden Normale ν verstanden. Demgemäss ist [vgl. etwa die nächstfolgende Figur]:

$$\Phi_p = \frac{d\Omega_p}{dr} = -\frac{d\Omega_p}{dr} .$$

Somit folgt aus (14.):

$$(15.)\quad \Phi_p = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{E'}\frac{dE'}{dr} - \frac{1}{E}\frac{dE}{dr}\right)\Phi d\sigma ,$$

wo im letzten Integral Φ den Werth dieser Function im Elemente $d\sigma$ vorstellt. Hieraus ergiebt sich leicht [vgl. die nachfolgende Erläuterung]:

$$(16.)\quad \Phi_p = \int_{QBQ_1} \Omega f ds + \frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\left(\frac{1}{r} - \frac{(A+a)^2}{r^2}\frac{\cos\omega'}{E'} + \frac{\cos\omega}{E}\right)\Phi d\sigma ,$$

wo ω und ω' diejenigen Winkel vorstellen, unter denen E und E' gegen pp' respective gegen $p'p$ geneigt sind. Und diese letzte Formel (16.) ist offenbar auch so darstellbar:

$$(17.)\quad \Phi_p + \frac{(-1)}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega}{E}d\sigma + \frac{(A+a)^2}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1qQ}\Phi\frac{\cos\omega'}{E'}d\sigma =$$

$$= \int_{QBQ_1}\Omega f ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{Q_1qQ}\Phi d\sigma .$$

Erläuterung zu Formel (16.). — Ist F die vom Centrum C nach $d\sigma$ gelegte Linie, und φ der Winkel von F gegen Cpp', so gelten für die Abstände E, E' des Elementes $d\sigma$ von den Punkten p, p' die Gleichungen:

$$E^2 = r^2 + F^2 - 2rF\cos\varphi ,$$
$$E'^2 = r'^2 + F^2 - 2r'F\cos\varphi ,$$

wo $r = (Cp)$ und $r' = (Cp')$ ist. Vgl. die folgende Figur.

Hieraus folgt sofort:

$$(a.)\quad \begin{cases} \dfrac{dE}{dr} = \dfrac{r - F\cos\varphi}{E} = -\cos\omega , \\[2ex] \dfrac{dE'}{dr} = \dfrac{r' - F\cos\varphi}{E'}\dfrac{dr'}{dr} = \dfrac{dr'}{dr}\cos\omega' , \end{cases}$$

wo ω und ω' diejenigen Winkel vorstellen, unter denen E und E' gegen pp', respective gegen $p'p$ geneigt sind.

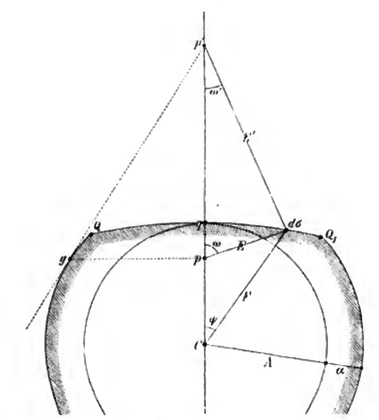
Nun findet aber, weil p und p' mit Bezug auf die Peripherie $(A+a)$ zu einander conjugirt sind, die Relation statt:

$$rr' = (A+a)^2 ,$$

woraus folgt:

$$\frac{dr'}{dr} = -\frac{(A+a)^2}{r^2} .$$





Somit ergiebt sich aus (α.):

$$(\beta.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dE}{dr} = -\cos\omega\,, \\[2ex] \dfrac{dE'}{dr} = -\dfrac{(A+\alpha)^2}{r'^2}\cos\omega'\,. \qquad Q.\ e.\ d. \end{cases}$$

NB. Um die gegenseitige Beziehung zwischen p und p' deutlich vor Augen zu haben, ist in vorstehender Figur in p ein Perpendikel pg auf der Linie Cp errichtet, und in dem so erhaltenen Punkte g eine Tangente an die Peripherie $(A+\alpha)$ gelegt. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der verlängerten Linie Cp ist alsdann der zu p conjugirte Punkt p'.

Durch Verkleinerung der Constante α^* kann man offenbar den der Bedingung (5.):

$$(18.)\qquad A < A + \alpha \leqq A + \alpha^*$$

unterworfenen Kreisradius $(A+\alpha)$ beliebig nahe an A herandrängen, und in solcher Weise dafür sorgen, dass das Curvenstück Q_1qQ beliebig klein wird. [Vgl. den letzten Theil des dritten Satzes pag. 101.] Hiervon Gebrauch machend, wollen wir zuvörderst durch Verkleinerung von α^* dafür sorgen, dass die Winkel

$$(18\text{a}.)\qquad qCQ \quad \text{und} \quad qCQ_1\,,$$

beide $< 90^0$ sind. Sodann aber wollen wir, *nachdem zuvor irgend*

ein beliebiger Kleinheitsgrad ε gegeben ist, durch weitere Verkleinerung von α^* und durch die damit Hand in Hand gehende Verkleinerung des Curvenstückes $Q_1 q Q$ auch dafür sorgen, dass die beiden ersten Integrale der Formel (17.) folgenden Relationen sich subordiniren:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} &\text{abs}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1 q Q} \Phi \frac{\cos\omega}{E}\, d\sigma\right) < \frac{\Phi_q + \varepsilon}{2}, \\ &\text{abs}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{Q_1 q Q} \Phi \frac{\cos\omega'}{E'}\, d\sigma\right) < \frac{\Phi_q + \varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

wo Φ_q den Werth von Φ im Punkte q vorstellt. Dass solches möglich ist, ergiebt sich aus den beiden Sätzen pag. 106, falls man nur beachtet, dass die Function Φ [vgl. (5β.) pag. 115 und (6.) pag. 116] längs der gegebenen Curve stetig und $\geqq 0$ ist. Aus dem letztern Umstande ergiebt sich zugleich die Formel:

$$(19a.)\qquad \int_{Q_1 q Q} \Phi\, d\sigma \geqq 0\ .$$

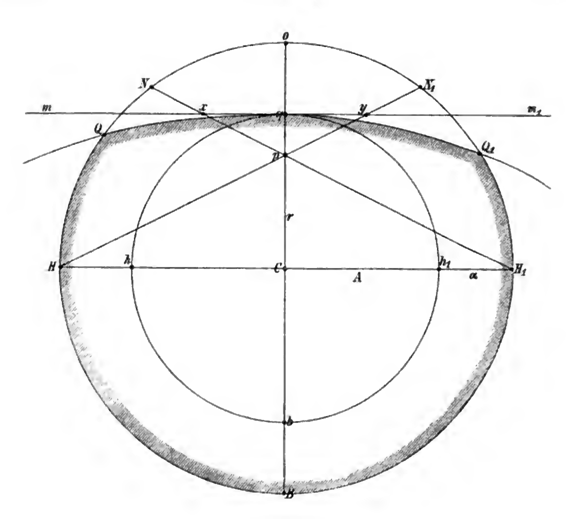
Mit Rücksicht auf diese Relationen (19.) und (19a.) folgt aus (17.) sofort:

$$(20.)\qquad \Phi_p + \left(1 + \frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\right)\frac{\Phi_q + \varepsilon}{2} > \int_{QBQ_1} \Omega f\, ds\ .$$

Hier repräsentirt f die in (13.) angegebene Function, also eine Function, die dem Hülfssatze pag. 120 sich subordinirt. Construirt man also [vgl. die folgende Figur] im Hülfskreise $(A+\alpha)$ den zu Cp senkrechten Durchmesser HCH_1, zieht man sodann die beiden Linien $H_1 p$ und Hp, und bezeichnet man diejenigen beiden Punkte, in denen die Verlängerungen dieser beiden Linien jenen Hülfskreis schneiden, mit N und N_1, so wird f

(21.) längs des Bogens NBN_1 überall *positiv*, und insbesondere längs des Halbkreises HBH_1 überall $\geqq \dfrac{r}{16\pi(A+\alpha)^3}$ sein.

Mittelst der Formel (20.) wird es nun leicht sein, unser eigentliches Ziel zu erreichen, nämlich Aufschluss zu gewinnen über den im Randpunkte q vorhandenen Werth Φ_q. Zu diesem Zwecke müssen wir den Punkt p näher und näher an den Punkt q heranschieben, also die Centraldistanz r des Punktes p gegen A hin sich *vergrössern* lassen;



wobei es uns frei steht, die auxiliare Constante α gegen 0 hin sich *verkleinern* zu lassen. Um diese beiden Operationen, die Vergrösserung von r und die Verkleinerung von α, in eine einzige Operation zu verschmelzen, construiren wir in q die Tangente mqm_1 der Randcurve, tragen auf dieser Tangente von q aus zwei Strecken ab: (qx) und (qy), beide $= (qo)$, d. i. $= \alpha$, construiren hierauf die durch x und y gehenden Linien $H_1 x N$ und $H y N_1$, und nehmen endlich zum Punkte p denjenigen Punkt, in welchem diese beiden Linien einander schneiden. Hierdurch ist alsdann die augenblickliche Lage des Punktes p in bestimmte Abhängigkeit versetzt zum augenblicklichen Werthe der Constante α. Und diese Abhängigkeit ist der Art, dass eine Abnahme von α gegen 0 hin, *eo ipso* eine Zunahme der Centraldistanz r des Punktes p gegen A hin hervorbringt. Auch kann man diese Aneinanderkettung von r und α leicht durch eine Formel ausdrücken. Zufolge der angegebenen Construction sind nämlich die beiden rechtwinkligen Dreiecke pCH und pqx einander ähnlich. Folglich ist:

$$\frac{(pC)}{(CH)} = \frac{(pq)}{(qx)}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{r}{A+\alpha} = \frac{A-r}{\alpha},$$

d. i.
$$\alpha r = (A+\alpha)(A-r),$$

oder, falls man nach r auflöst:

$$r = \frac{A(A+\alpha)}{A+2\alpha}. \tag{22.}$$

Durch diese Formel tritt nicht nur die stricte Abhängigkeit zwischen r und α, sondern gleichzeitig auch der Umstand klar zu Tage, dass r gegen A convergirt, sobald man α gegen 0 hin abnehmen lässt.

Bevor wir weitergehen, ist noch eine Bemerkung beizufügen in Betreff der von uns construirten Punkte N und N_1. Die gegebene Randcurve des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist [zufolge der Voraussetzung $\theta' \geqq 0$] von solcher Beschaffenheit, dass, wenn an die Curve eine beliebige Tangente gelegt wird, sämmtliche Punkte der Curve auf *derselben* Seite der Tangente liegen. [Vgl. die Note pag. 113.] Betrachtet man also in der letzten Figur die Tangente mqm_1 als horizontal, und den Durchmesser Bo als vertical *nach Oben* gerichtet, so werden sämmtliche Punkte der gegebenen Randcurve, also z. B. auch Q und Q_1 *unterhalb* der Tangente mqm_1 liegen; während jene von uns construirten Punkte N und N_1 stets *oberhalb* dieser Tangente sich befinden. Folglich wird der Kreisbogen QBQ_1 stets ein *Theil* sein vom Kreisbogen NBN_1. Zufolge (21.) wird daher die Function f

(23.) längs des Kreisbogens QBQ_1 überall *positiv*, und insbesondere längs des Halbkreises HBH_1 durchweg $\geqq \frac{r}{16\pi(A+\alpha)^3}$ sein. Dass dieser Halbkreis HBH_1 stets ein *Theil* jenes Bogens QBQ_1 ist, unterliegt keinem Zweifel, [vgl. (18 *a*.)].

Beachtet man dies, und beachtet man ausserdem, dass die Function Ω im Gebiete $\mathfrak{J}$ durchweg *positiv* ist [vgl. das auf pag. 114 über Ω Gesagte], so ergiebt sich sofort, dass das in (20.) auftretende Integral

$$\int_{QBQ_1} \Omega f ds$$

eine Summe von lauter *positiven* Gliedern ist, dass mithin dieses Integral, durch Fortlassung eines Theils seiner Glieder, stets eine Verkleinerung erleiden wird, und dass daher z. B. die Formel stattfindet:

$$\int_{QBQ_1} \Omega f ds \geqq \int_{HBH_1} \Omega f ds \,.$$

Diese Formel aber gewinnt, mit Rücksicht auf das in (23.) über den Halbkreis HBH_1 Gesagte, folgende Gestalt:

$$(24.)\qquad \int_{QBQ_1} \Omega f ds \geqq \frac{r\Omega_0}{16\pi(A+\alpha)^3}\int_{HBH_1} ds = \frac{r\Omega_0\pi(A+\alpha)}{16\pi(A+\alpha)^3}\,,$$

wo Ω_0 *den kleinsten Werth von* Ω *längs des Halbkreises* HBH_1 repräsentirt.

Auf Grund dieser Relation (24.) können wir jetzt unsere Formel (20.) auch so schreiben:

$$(25.)\qquad \Phi_p + \left(1 + \frac{(A+\alpha)^2}{r^2}\right)\frac{\Phi_q + \varepsilon}{2} > \frac{r\Omega_0}{16(A+\alpha)^2}\,,$$

oder, indem wir für r seinen Werth (22.) substituiren, auch so:

$$(26.)\quad \Phi_p + \left(1 + \frac{(A+2\alpha)^2}{A^2}\right)\frac{\Phi_q+\varepsilon}{2} - \frac{A\Omega_0}{16(A+\alpha)(A+2\alpha)} > 0\,.$$

In dieser Formel sind Φ_q, A und ε *Constanten.* Und zwar repräsentirt ε irgend welchen Kleinheitsgrad, der in unsere Untersuchung bei (19.) hineintrat, der damals beliebig gegeben war, und den wir einstweilen ungeändert beibehalten, d. h. als eine *gegebene Constante* betrachten.

Andererseits sind in der vorstehenden Formel die *Variablen* α, Ω_0 und Φ_p enthalten. Und zwar repräsentirt α eine *independente Variable*, die wir gegen 0 hin beliebig abnehmen lassen dürfen; während Ω_0 und Φ_p *stetige Functionen* von α sind, und zwar Functionen, deren Stetigkeit bei abnehmendem α ausdauert bis *inclusive* $\alpha = 0$. Es repräsentirt nämlich Ω_0 den Minimalwerth von Ω längs des Halbkreises HBH_1. Und es wird daher dieses Ω_0, weil Ω (als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{K}_\alpha$) in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{K}_\alpha$ stetig ist, nothwendiger Weise *stetig* sich ändern, sobald man jenen Halbkreis durch Verkleinerung seines Radius, d. i. durch Abnehmen von α mehr und mehr zusammenschrumpfen lässt; wie solches aus dem Satze pag. 113 sofort sich ergiebt. Was andererseits Φ_p betrifft, so ist Φ_p [vgl. (5α.) pag. 115] eine *stetige* Function von r, und r [vgl. (22.)] eine *stetige* Function von α, folglich auch Φ_p geradezu eine *stetige* Function von α.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass die Formel (26.) die Gestalt hat:

$$(\lambda.)\qquad F(\alpha) > 0,$$

wo $F(\alpha)$ eine Function von α vorstellt, die bei abnehmendem α *stetig* bleibt *bis inclusive* $\alpha = 0$. Da nun diese Formel (λ.) gültig ist, wie klein man α auch nehmen mag, so folgt hieraus sofort, dass

$$(\mu.)\qquad F(0) \geqq 0$$

ist. Denn wollte man annehmen, $F(0)$ sei < 0, so müssten, in Anbetracht der Stetigkeit von $F(\alpha)$, in unmittelbarer Nähe von $\alpha = 0$ positive Werthe des Argumentes α angebbar sein, für welche $F(\alpha)$ ebenfalls < 0 wäre; was mit dem Umstande in Widerspruch steht, dass die Formel (λ.) Gültigkeit besitzt für jedwedes auch noch so kleine α.

Die in solcher Weise constatirte Formel (μ.) gewinnt nun, falls man für $F(\alpha)$, resp. $F(0)$ seine eigentliche aus (26.) ersichtliche Bedeutung substituirt, folgende Gestalt:

$$(27.)\qquad \Phi_q + (\Phi_q + \varepsilon) - \frac{\Omega_0}{16A} \geqq 0\;;$$

denn für $\alpha = 0$ wird $r = A$, mithin $\Phi_p = \Phi_q$. Dabei ist zu beachten, dass das hier in (27.) stehende Ω_0 nicht mehr den Minimalwerth für den Halbkreis HBH_1, sondern vielmehr den Minimalwerth für denjenigen kleineren Halbkreis hbh_1 vorstellt, in welchen jener durch das Herabsinken von α zu 0 übergeht [vgl. die letzte Figur]. Da nun diese für die Constanten A, Φ_q, Ω_0 erhaltene Formel (27.):

$$(28.)\qquad \Phi_q + \frac{\varepsilon}{2} \geqq \frac{\Omega_0}{32A}$$

Gültigkeit besitzt, völlig unabhängig von dem zu Anfang gewählten Kleinheitsgrade ε, so folgt hieraus, dass auch

$$(29.)\qquad \Phi_q \text{ selber } \geqq \frac{\Omega_0}{32A}$$

ist. Verwandeln wir hier die Zahl 32 in 33, so werden wir statt $\geqq$ schlechtweg $>$ zu schreiben haben; sodass wir also die Formel erhalten:

$$(30.)\qquad \Phi_q > \frac{\Omega_0}{33A}\;.$$

Durch diese für jedweden Randpunkt q geltende Formel ist nun endlich die auf pag. 116 erhobene Frage beantwortet, *nämlich dargethan, dass in der dortigen Formel* (6.) *in der That das Zeichen* $\geqq$ *durch* $>$ *ersetzt werden darf.*

§ 21.

Zusammenstellung und Vervollständigung der über die Green'sche Function erhaltenen Resultate.

Die Resultate der drei letzten Paragraphe lassen sich zusammenfassen in folgenden drei Sätzen, denen ein leicht zu beweisender vierter Satz noch hinzugefügt werden soll.

Erster Satz. — *Die das Gebiet $\mathfrak{J}$ begrenzende geschlossene Curve sei von solcher Beschaffenheit, dass*

(1.) *θ, θ', θ'' stetige Functionen der Bogenlänge sind, und dass überdies θ' überall $\geqq 0$ ist.*

Ferner sei innerhalb $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt c gegeben. Alsdann werden stets drei Fundamentalfunctionen U, U_1, U_2 des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren von solcher Beschaffenheit, dass erstens für jedweden Randpunkt $U = \log\frac{1}{r}$ ist, wo r den Abstand des Randpunktes vom festen Punkte c vorstellt, und dass zweitens für jedweden Punkt (x, y) innerhalb $\mathfrak{J}$ die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2\,. \quad (!) \tag{2.}$$

Die Function U heisst die dem Punkte c entsprechende Green'sche Function, und c der Centralpunkt dieser Function. [Vgl. pag. 113.]

Zweiter Satz. — *Setzt man*

$$\Omega = \left(\log\frac{1}{r}\right) - U = -(U + \log r)\,, \tag{3.}$$

und versteht man dabei unter U den Werth von U in einem beliebigen Punkte (x, y), ferner unter r den Abstand dieses Punktes (x, y) vom festen Punkte c, so wird Ω eine Function von (x, y) sein, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ überall verschwindet, welche ferner in jedwedem Punkte innerhalb $\mathfrak{J}$ grösser als 0, und speciell im Punkte c positiv unendlich ist. [Vgl. pag. 114.]

Es sei nun ferner $\mathfrak{R}$ das zwischen dem Rande und einer innern Parallelcurve liegende ringförmige Gebiet. Alsdann wird der Differentialquotient

$$\frac{d\Omega}{d\nu}\,, \tag{4.}$$

falls man $\mathfrak{R}$ hinreichend s c h m a l *sich vorstellt, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{R}$* s t e t i g *sein.* [Vgl. (5γ.) pag. 115.]

Dritter Satz. — *Insbesondere ist hervorzuheben, dass in* j e d w e d e m R a n d p u n k t e *des Gebietes $\mathfrak{J}$ die Formel stattfindet:*

$$\frac{d\Omega}{d\nu} > k \,, \tag{5.}$$

wo k eine positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt. Dabei ist unter ν die i n n e r e *Normale des Randes zu verstehen.*

Um diese Constante k wirklich angeben zu können, bezeichne man den k l e i n s t e n *Krümmungsradius der gegebenen Randcurve mit R_0, ferner den* k ü r z e s t e n *Abstand des Punktes c von dieser Curve mit $2P_0$, und verstehe sodann unter A irgend eine bestimmte positive und von 0 verschiedene Constante, die $< R_0$, und zugleich auch $< P_0$ ist. Sodann lasse man auf der innern Seite der Randcurve einen Kreis vom Radius A fortrollen, und denke sich diesen Kreis in jedem Augenblicke der genannten Bewegung in zwei Halbkreise zerlegt mittelst eines Durchmessers, der senkrecht steht zu dem nach dem augenblicklichen Berührungspunkte hinlaufenden Radius. Der dem Berührungspunkte* a b g e w e n d e t e *Halbkreis wird alsdann während jener rollenden Bewegung eine gewisse* r i n g f ö r m i g e F l ä c h e *überstreichen, die vom Rande des Gebietes $\mathfrak{J}$ überall durch einen gewissen Zwischenraum getrennt ist.* [Vgl. den zweiten Satz pag. 101.] *Bezeichnet nun Ω_0 den kleinsten Werth der Function Ω in Erstreckung dieser ringförmigen Fläche, so hat jene Constante k den Werth:*

$$k = \frac{\Omega_0}{33\,A} \cdot \text{[Vgl. (30.) pag. 139.]} \tag{6.}$$

Vierter Satz. — *Man markire innerhalb $\mathfrak{J}$ einen festen Punkt (x_0, y_0), und definire V durch folgendes Integral:*

$$V = \int_{x_0 y_0}^{xy} (U_1 dy - U_2 dx) \,, \tag{7.}$$

die Integrationscurve in ihrer Bewegung auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt gedacht. Sodann setze man:

$$z = x + iy \,, \quad c = a + ib \,, \quad \textit{und} \quad W = U + iV \,, \quad (i = \sqrt{-1}) \,, \tag{8.}$$

wo a, b die rechtwinkligen Coordinaten des festen Centralpunktes c vorstellen sollen. Endlich setze man:

$$(9.)\qquad w = (z - c)\, e^{W}\,.$$

Alsdann werden w und W Functionen von z sein, die folgende drei Eigenschaften besitzen:

Alpha. — *Die Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ und $\frac{dW}{dz}$ existiren in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{J}$, einerlei ob derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ liegt. Auch ist die Entstehungsweise des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$, ebenso wie die von $\frac{dW}{dz}$, in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{J}$ eine von allen Seiten her äquiconvergente. Ueberdies sind w und $\frac{dw}{dz}$, ebenso wie W und $\frac{dW}{dz}$ Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$.*

Beta. — *Der Modul der Function w ist in jedem Randpunkte $= 1$, hingegen in jedem Punkte, der innerhalb $\mathfrak{J}$ liegt, < 1.*

Gamma. — *Der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ ist längs des Randes überall verschieden von 0.*

Der Beweis für Alpha ergiebt sich, so weit W und $\frac{dW}{dz}$ in Betracht kommen, unmittelbar aus den früheren Sätzen pag. 94—96. Sodann aber ergiebt sich der Beweis für w und $\frac{dw}{dz}$ sofort auf Grund des durch (9.) zwischen w und W festgesetzten Zusammenhanges.

Beweis für Beta. — Setzt man

$$(A.)\qquad z - c = r e^{i\varphi}\,,$$

so ist nach (9.) und (8.):

$$(B.)\qquad w = r e^{i\varphi}\, e^{U+iV}\,,$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$(C.)\qquad \text{mod}\, w = r e^{U} = e^{-\Omega}\,.$$

Diese Formel aber ergiebt, unter Anwendung des zweiten Satzes, sofort die Richtigkeit der Behauptung *Beta*.

Beweis für Gamma. — Aus (9.) folgt: $\log w = W + \log(z - c)$, mithin:

$$(D.)\qquad \frac{dw}{dz} = w\,\frac{d[W + \log(z - c)]}{dz}\,.$$

Und zwar wird diese Formel ($D.$), zufolge des schon bewiesenen Satzes Alpha, nicht nur auf jeden Punkt innerhalb $\mathfrak{J}$, sondern auch auf jeden *Randpunkt* anwendbar sein. Denkt man sich aber in irgend einem Randpunkte z die innere Normale ν construirt, so ist:

$$(p.) \qquad \frac{d[W + \log(z-c)]}{d\nu} = \frac{d[W + \log(z-c)]}{dz}\,\frac{dz}{d\nu}\,,$$

und $\frac{dz}{d\nu} = \frac{dx}{d\nu} + i\frac{dy}{d\nu} = \cos\,\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$, wo ϑ das Azimuth der Normale ν gegen die x-Axe vorstellt; sodass also die Formel ($p.$) die Gestalt erhält:

$$(q.) \qquad \frac{d[W + \log(z-c)]}{dz} = \frac{d[W + \log(z-c)]}{d\nu}\,e^{-i\vartheta}\,.$$

Substituirt man jetzt diesen Werth ($q.$) in ($D.$), so ergiebt sich:

$$(E.) \qquad \frac{dw}{dz} = w e^{-i\vartheta}\,\frac{d[W + \log(z-c)]}{d\nu}\,,$$

oder, weil $W = U + i\,V$, und, nach ($A.$), $\log(z-c) = (\log r) + i\varphi$ ist:

$$(F.) \qquad \frac{dw}{dz} = w e^{-i\vartheta}\left(\frac{d(U + \log r)}{d\nu} + i\,\frac{d(V+\varphi)}{d\nu}\right),$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$(G.) \qquad \frac{dw}{dz} = w e^{-i\vartheta}\left(-\frac{d\Omega}{d\nu} + i\,\frac{d(V+\varphi)}{d\nu}\right).$$

Diese Formel ($G.$) ist bezogen zu denken auf einen beliebigen *Randpunkt* z. Von den drei Factoren, welche die rechte Seite der Formel bilden, kann der *erste* niemals verschwinden, wie sich solches direct aus (9.) ergiebt, falls man nur beachtet, dass W, zufolge des schon constatirten Satzes Alpha, eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{J}$, mithin in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *endlich* ist*). Der *zweite* Factor kann ebenfalls nicht verschwinden, weil ϑ (seiner Definition nach) *reell* ist. Und der *dritte* Factor kann ebenfalls nicht verschwinden, weil $\frac{d\Omega}{d\nu}$, zufolge des dritten Satzes, stets > 0 ist. Somit ergiebt sich aus ($G.$), dass $\frac{dw}{dz}$ am Rande des Gebietes $\mathfrak{J}$ *nirgends* $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

---

*) Ueberdies ist zu beachten, dass der Punkt c *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt, vom Rande also durch irgend welchen Zwischenraum getrennt ist.

§ 22.

Zur Theorie der conformen Abbildung.

Sind die Punkte der w-Ebene und die der z-Ebene einander zugeordnet mittelst der Gleichung

$$(\alpha.) \qquad w = F(z) \, ,$$

so wird zwischen dem System der w-Punkte und dem System der z-Punkte *vollkommene Aehnlichkeit* stattfinden, sobald für je zwei beliebige Punkte z und z' die Bedingung erfüllt ist:

$$(\beta.) \qquad \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} = K \, ,$$

wo K eine *von Null verschiedene*, reelle oder complexe Constante vorstellen soll. Diese Bedingung aber wird, wie man sofort erkennt, nur dann erfüllt sein, wenn $F(z) = Kz + \text{Const.}$ ist, also nur dann, wenn $F(z)$ eine *lineare* Function von z ist.

Der soeben ausgesprochene Satz $(\alpha.)$, $(\beta.)$ scheint einer gewissen Verallgemeinerung fähig zu sein. Denn es wird offenbar *vollkommene* Aehnlichkeit auch dann noch stattfinden, wenn man in $(\beta.)$ die nicht verschwindende Constante K durch irgend eine nicht verschwindende Function $\Phi(z)$ ersetzt, also verlangt, dass jedweder Punkt z in Verbindung mit all' seinen Nachbarpunkten z' der Formel entsprechen soll:

$$\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} = \Phi(z) \, .$$

Indessen wird diese Formel, weil, wenn z' Nachbarpunkt von z ist, auch umgekehrt z einen Nachbarpunkt von z' repräsentirt, die weitere Formel nach sich ziehen:

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \Phi(z') \, .$$

Und aus beiden Formeln zusammengenommen folgt sofort: $\Phi(z) = \Phi(z')$, d. i.: $\Phi(z) = \text{Const.}$; sodass man also auf diese Weise zur früheren Bedingung $(\beta.)$ zurückgeführt wird.

Vollkommene Aehnlichkeit wird daher nur dadurch zu erreichen sein, dass wir an der Bedingung $(\beta.)$ festhalten, oder (was auf dasselbe hinauskommt) nur dadurch zu erreichen sein, dass wir $F(z)$ als eine lineare Function von z uns denken.

Hingegen werden wir über jene Bedingung (β.) hinausgreifen, nämlich statt derselben diejenige allgemeinere Bedingung nehmen dürfen, in welcher die nichtverschwindende Constante K durch eine nichtverschwindende Function $\Phi(z)$ ersetzt ist, — sobald wir mit einer nur *unvollkommenen* oder *approximativen* Aehnlichkeit oder (wie man zu sagen pflegt) mit einer Aehnlichkeit *in den kleinsten Theilen* uns begnügen wollen. In der That wird zu diesem Zweck nur erforderlich sein, dass der Quotient

$$\frac{F(z') - F(z)}{z' - z}$$

für jeden Punkt z und all' seine Nachbarpunkte z' einen von diesen Nachbarpunkten z' *nahezu* unabhängigen Werth besitzt, und dass ausserdem dieser Werth ein *nichtverschwindender* sei. Mit andern Worten: Es wird zu dem genannten Zweck nur erforderlich sein, dass dieser Quotient für jeden Punkt z und all' seine Nachbarpunkte z' *nahezu* $= \Phi(z)$ sei, wo $\Phi(z)$ irgend eine beliebige, *von z' unabhängige* und *nichtverschwindende* Function von z vorstellt.

Oder genauer ausgedrückt: Die durch die Formel

$$(\gamma.) \qquad w = F(z)$$

bewirkte Abbildung wird eine *in den kleinsten Theilen ähnliche* zu nennen sein, sobald — unter ε ein beliebig gegebener Kleinheitsgrad verstanden — um jedweden Punkt z (als Centrum) ein Kreis von solcher Kleinheit construirbar ist, dass für alle innerhalb dieses Kreises befindlichen Punkte z' die Formel stattfindet:

$$(\delta.) \qquad \mathrm{mod}\left(\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - \Phi(z)\right) < \varepsilon \ ,$$

wo $\Phi(z)$ eine beliebig gegebene, *von z' unabhängige* und *nichtverschwindende* Function von z vorstellen soll.

Nachträglich erkennen wir nun, dass diese neue Function $\Phi(z)$ zur ursprünglichen Function $F(z)$ in einfacher Beziehung steht. In der That ergiebt sich aus der Bedingung (δ.), dass $\Phi(z)$ der *Differentialquotient* von $F(z)$ sein muss. Oder genauer ausgedrückt: Soll jene der Function $F(z)$ auferlegte Bedingung (δ.) erfüllbar sein, so ist dazu erstens erforderlich, dass die Function $F(z)$ *einen Differentialquotienten besitzt*, und zweitens erforderlich, dass die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten für jedweden Punkt z eine *von*

allen Seiten her äquiconvergente ist. Zugleich wird alsdann jene neue Function $\Phi(z)$ nichts Anderes sein, als der Werth dieses Differentialquotienten. Demgemäss können wir die von uns angestellten Betrachtungen (γ.), (δ.) schliesslich folgendermassen formuliren:

Definition. — *Die durch die Formel*

$$w = F(z) \qquad (\varepsilon.)$$

bewirkte Abbildung wird eine in den kleinsten Theilen ähnliche zu nennen sein, sobald die Function $F(z)$ einen Differentialquotienten besitzt, dessen Entstehungsweise für jedweden Punkt z eine von allen Seiten her äquiconvergente ist, und dessen Werth nirgends $= 0$ ist.

Dabei kann noch hinzugefügt werden, dass die durch jene Formel (ε.) bewirkte Abbildung eine eindeutige zu nennen ist, sobald die Function $F(z)$ eindeutig ist, mithin jedem Punkte z immer nur ein Punkt w zugehört.

Ist in der z-Ebene irgend ein *bestimmtes Gebiet* gegeben, und soll die Eindeutigkeit der Abbildung und ihre Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen nicht schlechtweg, sondern *nur in Erstreckung dieses Gebietes* stattfinden, so werden selbstverständlich auch die soeben ausgesprochenen Anforderungen nur insoweit zu erfüllen sein, als sie dieses specielle Gebiet betreffen.

Ich werde nun zeigen, dass durch die im vorhergehenden Paragraph [in (9.) pag. 142] *angegebene Function*

$$w = (z - c)e^{W} = F(z) \qquad (1.)$$

eine eindeutige und in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung des in der z-Ebene gegebenen Gebietes $\mathfrak{J}$ auf einer in der w-Ebene um den Punkt $w = 0$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{K}$ bewirkt wird. Um dieses nachzuweisen werde ich, in Anbetracht der soeben gegebenen Definition, Zweierlei zu zeigen haben, nämlich

A., *dass die Formel (1.) für jedweden Punkt z des Gebietes $\mathfrak{J}$ einen, und stets nur einen Punkt w der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ liefert, und dass dabei für jeden Punkt z innerhalb $\mathfrak{J}$ ein Punkt w innerhalb $\mathfrak{K}$, andererseits aber für jedweden Punkt z am Rande von $\mathfrak{J}$ ein Punkt w am Rande von $\mathfrak{K}$ sich ergiebt;*

B., *dass in jedwedem Punkte z des Gebietes $\mathfrak{J}$, mag nun derselbe innerhalb $\mathfrak{J}$ oder am Rande von $\mathfrak{J}$ gelegen sein, ein Differentialquotient*

$\frac{dw}{dz}$ *existirt, dass ferner die Entstehungsweise dieses Differentialquotienten für jeden solchen Punkt z eine von allen Seiten her äquiconvergente ist, und dass endlich der Werth dieses Differentialquotienten in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ verschieden von 0 ist.*

Beweis für A. — Die Formel (1.) liefert, weil w [Satz Alpha pag. 142] eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, also in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ eindeutig ist, für jedweden Punkt z des Gebietes $\mathfrak{J}$ einen, und nur *einen* Werth w. Und zwar wird dieser Werth w [nach Beta, pag. 142], jenachdem z *innerhalb* $\mathfrak{J}$ oder *am Rande* von $\mathfrak{J}$ liegt, der Formel mod $w < 1$ oder der Formel mod $w = 1$ entsprechen, also einen Punkt w repräsentiren, der im ersteren Fall *innerhalb* $\mathfrak{K}$, im letzteren *am Rande* von $\mathfrak{K}$ liegt. — *Q. e. d.*

Beweis für B. — Dass der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ in jedwedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{J}$ *existirt*, und dass seine Entstehungsweise in jedem solchen Punkte eine von allen Seiten her *äquiconvergente* ist, ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Satze Alpha pag. 142. Es bleibt also nur noch nachzuweisen übrig, dass sein Werth in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ *nirgends verschwindet.*

Bezeichnet man den Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (1.) mit $F(z)$, die Formel selber also mit $w = F(z)$, so wird [nach Beta, pag. 142] mod $F(z) = 1$ bleiben, sobald man z den *Rand* von $\mathfrak{J}$ durchlaufen lässt. Ist also w_1 irgend ein vorläufig fester Punkt *innerhalb* $\mathfrak{K}$, mithin mod $w_1 < 1$, so wird in dem über jenen Rand von $\mathfrak{J}$ erstrecktem Integral

$$(2.) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{J}} \frac{F'(z)dz}{F(z) - w_1}$$

der Nenner $F(z) - w_1$ niemals verschwinden können. Hieraus folgt sofort, dass der Werth dieses Integrals bei einer *innerhalb* $\mathfrak{K}$ bleibenden Bewegung des Punktes w_1 nur in *stetiger* Weise sich ändern kann, und dass derselbe also, weil er stetiger Aenderungen unfähig ist, bei jener Bewegung *constant* bleiben muss. Dass nämlich der Werth dieses Integrals stetiger Aenderungen unfähig ist, ergiebt sich aus einem bekannten *Cauchy'schen Theorem*, dem zufolge der Werth des Integrals die Anzahl der elementaren Nullpunkte der Function $F(z) - w_1$ *innerhalb* $\mathfrak{J}$, oder (was auf dasselbe hinauskommt) die

Anzahl der elementaren Nullpunkte dieser Function *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{J}$ vorstellt*); so dass also der Werth des Integrals immer nur eine *ganze Zahl* sein kann.

Zugleich ergiebt sich aus diesem Cauchy'schen Theorem, dass man den soeben über die Constanz des Integrales (2.) ausgesprochenen Satz auch so ausdrücken kann:

So lange w_1 *innerhalb* $\mathfrak{K}$ bleibt, ist die Anzahl der in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ vorhandenen elementaren Nullpunkte der Function $F(z) - w_1$ stets *ein und dieselbe*, mithin z. B. ebenso gross wie für $w_1 = 0$, und folglich $= 1$. Denn für $w_1 = 0$ reducirt sich die genannte Function auf $F(z)$ selber, d. i. [vgl. (1.)] auf die Function $(z - c)\, e^W$; und diese letztere besitzt in der That, weil W [als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$; vgl. Alpha pag. 142] überall *endlich* ist, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ nur *einen einzigen* elementaren Nullpunkt, nämlich nur den Nullpunkt $z = c$.

Giebt man also dem Punkte w_1 innerhalb $\mathfrak{K}$ eine beliebige Bewegung, so wird hierbei die Anzahl der in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ befindlichen elementaren Nullpunkte der Function

$$F(z) - w_1 \tag{3.}$$

fortdauernd $= 1$ bleiben.

Wir markiren jetzt irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{J}$ einen Punkt z_1, und beschreiben um z_1 (als Centrum) eine völlig *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegende Kreisfläche. Alsdann sind $F(z)$ und $F'(z)$ [als Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$; vgl. Alpha pag. 142] in ganzer Erstreckung dieser Kreisfläche stetig. Folglich wird $F(z)$ für alle Punkte z innerhalb dieser Kreisfläche darstellbar sein durch die Taylor'sche Reihe:

$$F(z) = F(z_1) + \frac{z - z_1}{1} F'(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} F''(z_1) + \cdots, \tag{4.}$$

eine Formel, die auch so geschrieben werden kann:

$$F(z) - w_1 = \frac{z - z_1}{1} F'(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} F''(z_1) + \cdots. \tag{5.}$$

---

*) In der That kommt es auf ein und dasselbe hinaus, ob man so oder so sich ausdrückt. Denn die Function $F(z) - w_1$ kann, wie schon betont wurde, so lange w_1 *innerhalb* $\mathfrak{K}$ gedacht wird, am *Rande* von $\mathfrak{J}$ niemals verschwinden. Und es wird daher diese Function *innerhalb* $\mathfrak{J}$ genau dieselben Nullpunkte besitzen, wie *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{J}$, — immer vorausgesetzt, dass w_1 *innerhalb* $\mathfrak{K}$ sich befindet.

Hier ist $w_1 = F(z_1)$. Es bezeichnet also w_1 den mit z_1 correspondirenden Punkt; und es wird daher, weil z_1 *innerhalb* $\mathfrak{J}$ angenommen war, auch w_1 *innerhalb* $\mathfrak{K}$ liegen, [wie solches aus dem schon bewiesenen Satze **A.** pag. 146 hervorgeht].

Aus der Formel (5.) ergiebt sich nun sofort, dass $F'(z_1)$ *verschieden von* 0 ist. Denn wäre $F'(z_1) = 0$, so würde die Function $F(z) - w_1$, zufolge der Formel (5.), an der Stelle z_1 einen Nullpunkt *zweiter Ordnung*, d. i. zwei mit einander coincidirende elementare Nullpunkte besitzen; was dem Satze (3.) widerspricht.

Somit ist bewiesen, dass der Differentialquotient $F'(z)$ oder $\frac{dw}{dz}$ in einem Punkte z_1 *innerhalb* $\mathfrak{J}$ niemals Null sein kann. Andererseits aber ist, zufolge des Satzes Gamma, pag. 142, ein Nullwerden desselben am *Rande* von $\mathfrak{J}$ ebenfalls unmöglich. Demgemäss kann dieser Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ in *ganzer Erstreckung* des Gebietes $\mathfrak{J}$ niemals verschwinden. — *Q. e. d.*

Anhang zum letzten Capitel.

Wenn hier eine Begründung desjenigen geometrischen Satzes gegeben werden soll, der früher *ohne Beweis* hingestellt worden ist (vergl. die Note pag. 102), so werden andererseits die folgenden Darlegungen zugleich auch ein Beispiel dafür bieten, wie schwer es zuweilen ist, Sätze, die aus der geometrischen Anschauung fast von selber sich ergeben, mit wirklicher Strenge zu constatiren.

Es sei irgend eine geschlossene Curve gegeben. Ueber die Beschaffenheit dieser Curve mögen, unter Anwendung der auf pag. 3 *eingeführten Bezeichnungen:* σ, θ, $\theta' = \frac{d\theta}{d\sigma}$, *folgende Voraussetzungen gemacht sein*:

(1.) θ *und* θ' *sollen stetige Functionen von* σ *sein*, (so dass also die Curve nicht nur von stetiger Biegung, sondern auch von stetiger Krümmung ist).

(2.) θ' *soll durchweg* $\geqq 0$ *sein*, (so dass also die Curve überall convex sein wird, jedoch in dem Sinne, dass auch geradlinige Strecken mit unterlaufen können).

(3.) *Das Azimuth θ der Curventangente soll, sobald man ihren Berührungspunkt die ganze Curve einmal durchlaufen lässt, um 360^0 wachsen*, (wodurch das Vorkommen von Doppelpunkten bei der Curve ausgeschlossen sein wird).

Bezeichnet man alsdann den Krümmungsradius mit R:

$$R = \frac{1}{\theta'}, \quad \text{[vgl. die Note pag. 113]}, \tag{4.}$$

und den kleinsten Krümmungsradius der ganzen gegebenen Curve mit R_0, so gelten folgende Sätze:

Erster Satz. — *Sind p_1 und p_2 irgend zwei Curvenpunkte, deren Azimuthunterschied*) > 0 und $\leq 90^0$ ist, und schneiden die diesen Punkten zugehörigen Normalen einander im Punkte q, so werden die Richtungen der in p_1 und p_2 errichteten inneren Normalen von p_1 nach q, respective von p_2 nach q laufen. Ueberdies wird alsdann jedes der beiden Liniensegmente p_1q und p_2q, seiner Länge nach, $\geq R_0$ sein.*

Zweiter Satz. — *Denkt man sich auf der gegebenen Curve irgend zwei innere Normalen errichtet, jede $< R_0$, so können diese beiden Normalen keinen Punkt mit einander gemein haben.*

Dritter Satz. — *Ein irgendwo an die Curve gelegter innerer Berührungskreis, dessen Radius $< R_0$ ist, kann mit der Curve stets nur einen einzigen Punkt, nämlich nur den Berührungspunkt gemein haben.*

Mit andern Worten: Denkt man sich einen solchen Kreis construirt, so werden sämmtliche Punkte der Curve, mit alleiniger Ausnahme des Berührungspunktes, ausserhalb dieses Kreises liegen.

Vierter Satz. — *Werden zur gegebenen Curve zwei innere Parallelcurven construirt, so können diese beiden letzteren, falls ihre Abstände von der gegebenen Curve beide $< R_0$ sind, keinen Punkt mit einander gemein haben.*

Fünfter Satz. — *Eine innere Parallelcurve, deren Abstand von der gegebenen Curve $< R_0$ ist, kann keinen Doppelpunkt haben.*

---

*) Unter dem Azimuth irgend eines Curvenpunktes soll hier dasjenige Azimuth verstanden sein, unter welchem die in diesem Punkte an die Curve gelegte Tangente gegen die x-Axe geneigt ist. Solches festgesetzt, ist nun unter dem Azimuthunterschied der beiden Punkte p_1 und p_2 die Differenz derjenigen Azimuthe zu verstehen, welche diese beiden Punkte besitzen.

Für unsere Zwecke handelt es sich eigentlich nur allein um den *dritten Satz*, (vgl. die Note pag. 102). Die beiden ersten Sätze bilden aber das Gerüst, auf welchem wir zu diesem dritten Satze gelangen werden. Andererseits sind die beiden letzten Sätze nur beiläufig hinzugefügt.

Beweis des ersten Satzes. — Lässt man einen Curvenpunkt

$$p(\sigma, \theta, \xi, \eta)$$

— d. h. einen Curvenpunkt p mit der Bogenlänge σ, dem Azimuth*) θ und den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η — längs der gegebenen Curve in *positiver* Richtung fortschreiten, so wird σ *wachsen*, und daher θ [zufolge (2.)] ebenfalls *wachsen*, respective *sich gleich bleiben*. Man bezeichne diesen in positiver Richtung fortschreitenden Punkt in irgend einem bestimmten Augenblicke mit

$$p_1(\sigma_1, \theta_1, \xi_1, \eta_1) ,$$

und in irgend einem *späteren* Augenblicke mit

$$p_2(\sigma_2, \theta_2, \xi_2, \eta_2) ;$$

so dass also $\sigma_1 < \sigma_2$ und $\theta_1 \leq \theta_2$ ist. Diese beiden Augenblicke aber denke man sich der Art gewählt, dass

$$(5). \qquad \theta_1 < \theta_2 \quad (\text{nicht} \leqq \theta_2) , \quad \text{und} \quad \theta_2 - \theta_1 \leqq 90^\circ$$

ist. Trägt man nun auf den in p_1 und p_2 errichteten *inneren* Normalen ν_1 und ν_2, respective von p_1 und p_2 aus, irgend zwei Längen auf: L_1 und L_2, so ergeben sich zwischen den *Anfangspunkten* $p_1(\xi_1, \eta_1)$, $p_2(\xi_2, \eta_2)$ dieser Linien L_1, L_2 und zwischen ihren *Endpunkten* (Ξ_1, H_1), (Ξ_2, H_2) folgende Relationen:

$$\Xi_1 = \xi_1 + L_1 \cos(\theta_1 + 90^\circ) , \qquad \Xi_2 = \xi_2 + L_2 \cos(\theta_2 + 90^\circ) ,$$

$$\mathsf{H}_1 = \eta_1 + L_1 \sin(\theta_1 + 90^\circ) , \qquad \mathsf{H}_2 = \eta_2 + L_2 \sin(\theta_2 + 90^\circ) ;$$

denn $\theta_1 + 90^\circ$ und $\theta_2 + 90^\circ$ sind die Azimuthe der beiden Normalen ν_1 und ν_2 gegen die x-Axe.

Sollen jene beiden Endpunkte (Ξ_1, H_1) und (Ξ_2, H_2) unter einander identisch sein, also zusammenfallen mit dem *Schnittpunkte* der in p_1 und p_2 errichteten Normalen, so müssen die Gleichungen stattfinden: $\Xi_1 = \Xi_2$ und $\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_2$, d. i. die Gleichungen:

*) Vgl. die vorhergehende Note.

$$(6.)\quad \begin{aligned} L_1 \cos(\theta_1 + 90^\circ) - L_2 \cos(\theta_2 + 90^\circ) &= \xi_2 - \xi_1 , \\ L_1 \sin(\theta_1 + 90^\circ) - L_2 \sin(\theta_2 + 90^\circ) &= \eta_2 - \eta_1 . \end{aligned}$$

Die Richtigkeit unseres ersten Satzes wird nun offenbar dargethan sein, sobald es uns gelingt zu zeigen, dass die aus diesen Gleichungen (6.) *für* L_1 *und* L_2 *sich ergebenden Werthe beide* ***positiv***, *und beide* $\geqq R_1$ *sind.*

Aus den bekannten Formeln $\frac{d\xi}{d\sigma} = \cos\theta$ und $\frac{d\eta}{d\sigma} = \sin\theta$ [vgl. (C.) pag. 3] ergiebt sich zuvörderst:

$$\xi_2 - \xi_1 = \int_{p_1}^{p_2} \cos\theta \cdot d\sigma ,$$

$$\eta_2 - \eta_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sin\theta \cdot d\sigma ,$$

die Integrationen längs der gegebenen Curve in positiver Richtung von p_1 nach p_2 hinerstreckt gedacht. Demgemäss gehen die Gleichungen (6.) über in:

$$(7.)\quad \begin{aligned} -L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2 &= \int_{p_1}^{p_2} \cos\theta \cdot d\sigma , \\ +L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2 &= \int_{p_1}^{p_2} \sin\theta \cdot d\sigma . \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln einmal mit $\cos\theta_2$, $\sin\theta_2$, das andere Mal mit $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$, und addirt man jedesmal, so erhält man:

$$(8.)\quad \begin{aligned} L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{p_1}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\sigma , \\ L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{p_1}^{p_2} \cos(\theta - \theta_1) \cdot d\sigma . \end{aligned}$$

Hier repräsentirt das θ (ohne Index) das Azimuth eines in positiver Richtung von p_1 nach p_2 laufenden Curvenpunktes. Demgemäss wird die Differenz $\theta - \theta_1$, wie sich aus (2.) und (5.) sofort ergiebt, stets $\geqq 0$, und stets $\leqq 90^\circ$ sein. Folglich wird $\cos(\theta - \theta_1)$ stets *positiv* sein. In solcher und ähnlicher Weise gelangt man zu der Einsicht, dass die in (8.) auftretenden Grössen

$$(9.)\quad \cos(\theta_2 - \theta) , \quad \cos(\theta - \theta_1) \quad \text{und} \quad \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

durchweg *positiv* sind. Demgemäss ergiebt sich aus jenen Formeln (8.) sofort, dass

$$(10.) \qquad L_1 \quad \text{und} \quad L_2$$

ebenfalls stets *positiv* sind.

Um nun ferner zu zeigen, dass L_1 und L_2 stets $\geqq R_0$ sind, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

Erster Fall: θ' ist längs der betrachteten Curvenstrecke $p_1 p_2$ durchweg > 0. Alsdann ist jedes Bogenelement $d\sigma$ dieser Curvenstrecke durch die Formel ausdrückbar:

$$(\alpha.) \qquad d\sigma = \frac{d\theta}{\theta'} = R\, d\theta\,, \quad [\text{vgl. } (4.)];$$

sodass also die Gleichungen (8.) die Gestalt erhalten:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta\,, \\ L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos(\theta - \theta_1) \cdot d\theta\,. \end{aligned}$$

Diese Integrale aber, in denen die Cosinus [vgl. (9.)] durchweg *positiv* sind, werden verkleinert werden, sobald man das in ihnen enthaltene R durch seinen *kleinsten* Werth, d. i. durch R_0 ersetzt. Somit ergiebt sich z. B.:

$$L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq R_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot d\theta\,,$$

oder, falls man die Integration wirklich ausführt:

$$L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq R_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)\,,$$

also, weil $\sin(\theta_2 - \theta_1)$, zufolge (5.), stets > 0 ist:

$$(\gamma.) \qquad L_1 \geqq R_0\,.$$

Und in analoger Art wird sich auf Grund der *zweiten* Formel (β.) ergeben:

$$(\delta.) \qquad L_2 \geqq R_0\,. \quad \text{— Q. e. d.}$$

Zweiter Fall: Die Curvenstrecke $p_1 p_2$ besteht aus zwei Theilen $p_1 g$ und $g p_2$, von solcher Beschaffenheit, dass θ' längs des ersten Theiles durchweg $= 0$, längs des zweiten Theiles aber, mit alleiniger Ausnahme des Punktes g, überall > 0 ist. Alsdann kann man für die Strecke $p_1 g$ von der Formel (α.) *keinen* Gebrauch machen, weil der in dieser Formel enthaltene Nenner θ' längs $p_1 g$ verschwindet. Wir sind somit jene im ersten Fall benutzte Methode hier bei Behandlung des zweiten Falles zu *modificiren* gezwungen.



Wir markiren zuvörderst auf der Curvenstrecke gp_2 einen auxiliaren Punkt h, beliebig nahe an g gelegen:

$$p_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot g \cdot\cdot h \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot p_2$$

so dass also θ' längs hp_2 *ausnahmslos* > 0 ist. Sodann schreiben wir die erste der Gleichungen (8.) folgendermassen:

$$(\varepsilon.)\qquad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{p_1}^{h} \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\sigma + \int_{h}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\sigma\,.$$

Die rechte Seite dieser Formel wird aber, weil die Cosinus [vgl. (9.)] durchweg positiv sind, verkleinert werden, sobald man das erste Integral ganz fortlässt. Somit folgt:

$$(\zeta.)\qquad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{h}^{p_2} \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\sigma\,.$$

Hier nun können wir, weil θ' längs hp_2 ausnahmslos > 0 ist, von der Substitution (α.) Gebrauch machen, und erhalten also:

$$(\eta.)\qquad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{h}^{p_2} R\cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\theta\,.$$

Längs $p_1 g$ ist nach unserer Annahme $\theta' = 0$, mithin θ *constant*, $= \theta_1$. Demgemäss wird θ im Punkte h nur wenig grösser sein als θ_1, etwa $= \theta_1 + \beta$, wo alsdann β eine positive Grösse vorstellt, deren Werth durch ein näheres Heranschieben des Punktes h gegen g *beliebig klein* gemacht werden kann. Da nun überdies θ im Punkte p_2 den Werth θ_2 hat, so geht die Formel (η.) über in:

$$(\vartheta.)\qquad L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \geqq \int_{\theta_1+\beta}^{\theta_2} R\cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\theta\,.$$

Die rechte Seite dieser Formel wird aber, weil der dortige Cosinus [vgl. (9.)] durchweg positiv ist, verkleinert werden, sobald wir R durch R_0 ersetzen. Thun wir dies, und führen wir sodann die Integration wirklich aus, so erhalten wir:

$$(\iota.)\qquad L_1 \geqq R_0 \frac{\sin(\Delta - \beta)}{\sin\Delta}\,,\quad \text{wo}\quad \Delta = \theta_2 - \theta_1\,,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(\varkappa.)\qquad L_1 \geqq R_0 - \gamma\,,\quad \text{wo}\quad \gamma = R_0\frac{\sin\Delta - \sin(\Delta - \beta)}{\sin\Delta}$$

ist, und wo also γ (ebenso wie β) eine positive Grösse repräsentirt, deren Werth durch ein näheres Heranschieben von h gegen g *beliebig klein* gemacht werden kann.

Die Formel ($\varkappa$.) ist, ihrer Ableitung zufolge, stets gültig, wie nahe wir uns den Punkt h an g auch denken mögen. Demgemäss wird also

diese zwischen den beiden *festen* Werthen L_1 und R_0 stattfindende Relation (x.) stets in Kraft bleiben, bis zu welcher Kleinheit wir die positive Grösse γ auch herunterdrücken mögen. Hieraus aber folgt nach bekannter Schlussweise, dass

$$(\lambda.)\qquad L_1 \geqq R_0$$

sein muss. Und in analoger Art wird sich zeigen lassen, dass auch $L_2 \geqq R_0$ ist. — *Q. e. d.*

Alle übrigen Fälle werden, wenn auch etwas weitläufiger, so doch in ähnlicher Art behandelbar sein. Ausgenommen bleibt dabei aber ein Fall, der besondere Schwierigkeiten machen dürfte, nämlich *der*, dass θ' längs der gegebenen Curvenstrecke in *unendlich vielen discreten* Punkten zu 0 wird. — All' diesen Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten jedoch können wir entgehen durch Anwendung folgender sehr einfachen, wenn auch etwas künstlichen Methode:

Es ist identisch:

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta)\, d\theta \; .$$

Demgemäss können wir die *erste* der Formeln (8.) auch so schreiben:

$$(11.)\qquad L_1 = \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\sigma}{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\theta}\,,$$

oder auch so:

$$(12.)\qquad L_1 = \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\sigma}{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot \theta' d\sigma}\,,$$

beide Integrationen hinerstreckt gedacht über die gegebene Curvenstrecke $p_1 p_2$. Die rechte Seite dieser Formel (12.) wird, weil die daselbst auftretenden Cosinus [vgl. (9.)] stets positiv sind, und θ' [vgl. (2.)] ebenfalls stets positiv ist, *verkleinert* werden, sobald wir daselbst dieses θ' durch seinen *grössten* Werth ersetzen. Somit erhalten wir:

$$(13.)\qquad L_1 \geqq \frac{1}{\operatorname{Max}(\theta')} \frac{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\theta}{\int \cos(\theta_2 - \theta)\cdot d\theta}\;,$$

d. i.

$$L_1 \geqq \frac{1}{\operatorname{Max}(\theta')} = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\theta'}\right) = \operatorname{Min}(R)\;,$$

also, weil der Minimalwerth von R mit R_0 bezeichnet worden ist:

(15.) $$L_1 \geqq R_0 \; .$$

In analoger Art wird sich offenbar, auf Grund der *zweiten* Formel (8.), darthun lassen, dass auch $L_2 \geqq R_0$ ist. — *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Wir betrachten irgend drei auf der gegebenen Curve in positiver Richtung aufeinander folgende Punkte p_1, p_0, p_2 mit den inneren Normalen ν_1, ν_0, ν_2, und mit den Azimuthen*) $\theta_1, \theta_0, \theta_2$, indem wir zugleich setzen:

(A.) $$\theta_1 = \theta_0 - \alpha \quad \text{und} \quad \theta_2 = \theta_0 + \beta \; .$$

Alsdann sind α und β positive Grössen, die aber auch 0 sein können. So z. B. wird $\alpha = 0$ sein, falls die Curvenstrecke $p_1 p_0$ geradlinig ist. U. s. w.

Denken wir uns die Punkte p_1, p_0, p_2 vorläufig sehr nahe aneinander, mithin α und β sehr klein, und bezeichnen wir die beiden Punkte, in denen die Normale ν_0 von ν_1 und ν_2 geschnitten wird, mit q_1 und q_2, so ist zufolge des schon bewiesenen ersten Satzes:

(B.) $$(p_1 q_1) \geqq R_0 \quad \text{und} \quad (p_2 q_2) \geqq R_0 \; .$$

Dabei macht z. B. der Fall, dass die Curvenstrecke $p_1 q_1$ *geradlinig* ist, *keine* Ausnahme. Allerdings würde alsdann $\alpha = 0$, d. h. $\theta_1 = \theta_0$, mithin der soeben citirte Satz nicht mehr anwendbar sein. Es würden aber in diesem Falle die beiden Normalen ν_1 und ν_0 einander parallel sein. Mithin darf man in diesem Falle $(p_1 q_1) = +\infty$ sich vorstellen; so dass also $(p_1 q_1) > R_0$ ist. U. s. w.

Tragen wir nun auf den Normalen ν_1 und ν_2, respective von p_1 und p_2 aus, irgend zwei Längen A_1 und A_2 auf, deren jede $< R_0$ ist, *so werden diese beiden Liniensegmente* A_1 *und* A_2 *keinen Punkt mit einander gemein haben.* Denn zufolge (*B.*) liegt A_1 auf der *einen*, und A_2 auf der *andern* Seite von ν_0, und zwar der Art, dass sowohl A_1 wie auch A_2 von der Normale ν_0 durch irgend welchen Zwischenraum getrennt sein wird.

Diese einfachen, auf den ersten Satz sich stützenden Betrachtungen bleiben Schritt für Schritt in Kraft, sobald wir die Grössen α und β, die bis jetzt sehr klein gedacht wurden, mehr und mehr anwachsen lassen, falls wir nur dieselben dabei $\leqq 90^0$ erhalten. Also folgendes Resultat:

---

*) Vgl. die Note pag. 150.

Errichtet man in irgend zwei Curvenpunkten p_1 und p_2, deren Azimuth-Unterschied $\theta_2 - \theta_1 \leqq 180^0$ ist, die inneren Normalen, und macht man dabei die Länge der einen, und ebenso auch die Länge der andern Normale

$$(C.) \qquad\qquad < R_0 ,$$

so werden diese beiden Normalen keinen Punkt mit einander gemein haben.

Hieraus ergiebt sich leicht die Richtigkeit des eigentlich zu beweisenden Satzes. Lässt man nämlich einen Punkt die gegebene Curve in positiver Richtung einmal durchwandern, so wird hierbei sein Azimuth monoton wachsen, und im Ganzen um 360^0 zunehmen, [vgl. (2.) und (3.) pag. 149]. Sind also irgend zwei *feste* Curvenpunkte g und h in ganz beliebiger Weise gegeben, und wächst das Azimuth bei einer positiven Wanderung von g nach h um Δ, so wird dasselbe bei einer Fortsetzung dieser Bewegung, nämlich bei der positiven Wanderung von h nach g, um $\mathsf{E} = 360^0 - \Delta$ wachsen.

Ist nun $\Delta \leqq 180^0$, so ist der Satz ($C.$) auf die beiden Punkte g, h ohne Weiteres anwendbar, indem man g mit p_1 und h mit p_2 bezeichnet.

Und ist andererseits $\Delta > 180^0$, so ist jener Satz ($C.$) *ebenfalls* anwendbar. Denn in diesem Falle ist $\mathsf{E} < 180^0$. Und die beiden Punkte subordiniren sich also jenem Satze, sobald man h mit p_1 und g mit p_2 bezeichnet.

Jener Satz ($C.$) ist mithin auf diese beiden *ganz beliebig* gegebenen Curvenpunkte g, h unter allen Umständen anwendbar. — *Q. e. d.*

Beweis des dritten Satzes. — An die gegebene Curve sei irgendwo ein innerer Berührungskreis gelegt, dessen Radius $A < R_0$ sein soll. Bezeichnet also C das Centrum, und p den Berührungspunkt dieses Kreises, so ist:

$$(\mathfrak{A}.) \qquad (Cp) = A < R_0 ,$$

mithin:

$$(\mathfrak{B}.) \qquad (Cp) = A = R_0\,(1 - 2\delta) ,$$

wo alsdann δ eine *positive* und *von Null verschiedene* Grösse vorstellt.

Versteht man nun unter ϱ den von C aus nach irgend einem Curvenpunkte (ξ, η) gezogenen Radiusvector, und bezeichnet man die

Bogenlänge dieses Curvenpunktes mit σ, so sind ξ, η, ξ', η', ξ'', η'', mithin auch ϱ, ϱ', ϱ'', und folglich auch

$$\varrho^2\,,\quad \frac{d(\varrho^2)}{d\sigma}\,,\quad \frac{d^2(\varrho^2)}{d\sigma^2}$$

stetige Functionen von σ; wie sich solches aus den Voraussetzungen (1.) pag. 149 leicht ergiebt; [vgl. etwa die Note pag. 31]. Nach bekanntem Satze gilt daher, falls man die Bogenlänge σ des Punktes (ξ, η) in positiver Richtung von p aus rechnet, folgende Formel:

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \varrho^2 = (\varrho^2)_p + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{d(\varrho^2)}{d\sigma}\right)_p + \frac{\sigma^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2(\varrho^2)}{d\sigma^2}\right)_m\,,$$

wo $m = (\xi_m, \eta_m)$ einen unbekannten *intermediären* Curvenpunkt zwischen $p = (\xi_p, \eta_p)$ und (ξ, η) bezeichnet. Nimmt man das Kreiscentrum C zum Anfangspunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird z. B. $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$, ferner $\varrho_p^2 = \xi_p^2 + \eta_p^2$, u. s. f. Kurz, die Formel ($\mathfrak{C}$.) gewinnt alsdann folgendes Aussehen:

$$(\mathfrak{D}.)\qquad \varrho^2 = \varrho_p{}^2 + 2\sigma(\xi\xi' + \eta\eta')_p + \sigma^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \xi\xi'' + \eta\eta'')_m\,.$$

Nach ($\mathfrak{A}$.) ist aber $\varrho_p = A$. Ueberdies steht dieser von C nach dem Berührungspunkte p laufende Radiusvector ϱ_p gegen die Curve senkrecht; so dass also $(\xi\xi' + \eta\eta')_p = 0$ ist. Demgemäss reducirt sich die Formel ($\mathfrak{D}$.) auf:

$$(\mathfrak{E}.)\qquad \varrho^2 = A^2 + \sigma^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \xi\xi'' + \eta\eta'')_m\,.$$

Nun ist allgemein [vgl. (C.) pag. 3]:

$$\xi' = \cos\theta\,,\qquad \xi'' = -\,\theta'\sin\theta\,,$$
$$\eta' = \sin\theta\,,\qquad \eta'' = +\,\theta'\cos\theta\,,$$

mithin einerseits:

$$(\alpha.)\qquad \xi'^2 + \eta'^2 = 1\,,$$

und andererseits:

$$\xi\xi'' + \eta\eta'' = \theta'(-\,\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,,$$

also mit Rücksicht auf (2.), (4.) pag. 149, 150:

$$\text{abs}\,(\xi\xi'' + \eta\eta'') \leqq \theta'\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\varrho}{R} \leqq \frac{\varrho}{R_0}\,,$$

und folglich:

$$(\beta.)\qquad \xi\xi'' + \eta\eta'' = \Theta\,\frac{\varrho}{R_0}\,,$$

wo Θ einen unbekannten echten Bruch bezeichnet. Substituirt man in ($\mathfrak{E}$.) die Werthe (α.), (β.), so erhält man:

$$(\mathfrak{F}.) \qquad \varrho^2 = A^2 + \sigma^2 \left(1 + \Theta \frac{\varrho_m}{R_0}\right),$$

wo σ die (von p aus gerechnete) Bogenlänge des Endpunktes von ϱ vorstellt, während ϱ_m einen unbekannten intermediären Radiusvector zwischen ϱ und ϱ_p bezeichnet.

Denkt man sich nun irgend ein den Punkt p einschliessendes Curvenintervall $p_1 p p_2$ construirt, so ergiebt sich aus ($\mathfrak{F}$.) *für alle diesem Intervall $p_1 p p_2$ zugehörigen Radiivectores ϱ* folgende Formel:

$$(\mathfrak{G}.) \qquad \varrho^2 \geqq A^2 + \sigma^2 \left(1 - \frac{\text{Max}(\varrho)}{R_0}\right),$$

wobei unter Max (ϱ) der *grösste* unter all' jenen dem Curvenintervall $p_1 p p_2$ zugehörigen Radiivectores ϱ zu verstehen ist.

Dieses Intervall $p_1 p p_2$ wird man aber so klein machen können, dass alle demselben angehörigen Radiivectores ϱ von dem speciellen Radiusvector

$$\varrho_p = R_0 (1 - 2\delta), \quad [\text{vgl. } (\mathfrak{B}.)],$$

um weniger als $R_0 \delta$ verschieden sind. Alsdann wird der *grösste* jener Radiivectores $< R_0 (1 - \delta)$ sein, wodurch die Formel ($\mathfrak{G}$.) übergeht in:

$$(\mathfrak{H}.) \qquad \varrho^2 \geqq A^2 + \sigma^2 \delta .$$

Hieraus folgt sofort, dass sämmtliche zum Intervall $p_1 p p_2$ gehörige Radiivectores $\varrho > A$ sind, mit alleiniger Ausnahme des Radiusvectors ϱ_p. Für diesen letzteren ist nämlich $\sigma = 0$, also nach ($\mathfrak{H}$.): $\varrho_p \geqq A$, was in Einklang steht mit der Formel ($\mathfrak{A}$.), der zufolge $\varrho_p = A$ ist.

Also der Satz: *Es existirt stets ein den gegebenen Punkt p einschliessendes Curvenintervall*

$$(\mathfrak{J}.) \qquad p_1 p p_2$$

von solcher Kleinheit, dass sämmtliche Punkte dieses Intervalls, mit alleiniger Ausnahme von p, ausserhalb des um C mit dem Radius A beschriebenen Kreises liegen. Demgemäss ist z. B.:

$$(\mathfrak{K}.) \qquad (Cp_1) > A\,, \quad \textit{und ebenso auch:} \quad (Cp_2) > A\,;$$

wobei die schon in ($\mathfrak{A}$.) notirten Formeln:

$$(\mathfrak{L}.) \qquad (Cp) = A \quad \textit{und} \quad A < R_0$$

zuzufügen gut erscheint.

Die zu $p_1 p p_2$ *complementare* Curvenstrecke mag mit $p_2 \pi p_1$ bezeichnet sein, der Art, dass beide Strecken $p_1 p p_2$ und $p_2 \pi p_1$ zusammengenommen die ganze gegebene Curve ausmachen. Dabei mag unter π ein längs dieser complementaren Curvenstrecke frei beweglicher Punkt verstanden sein, dessen *extreme* Lagen also durch die beiden *Endpunkte* dieser Strecke d. i. durch p_1 und p_2 dargestellt sein werden.

Wir wollen nun einstweilen *annehmen*, auf dieser Curvenstrecke $p_2 \pi p_1$ existire irgend ein Punkt π_0, für welchen der Radiusvector

(𝔐.) $$(C\pi_0) \leqq A$$

ist, und die aus einer solchen Annahme sich ergebenden Consequenzen näher zu entwickeln suchen. Offenbar sind nur zwei Fälle möglich.

Entweder nämlich wird der Radiusvector $(C\pi_0)$ in π_0 *senkrecht* auf die Curve fallen. Dann würden $(C\pi_0) \leqq A$ und $(Cp) = A$ zwei in π_0 und p auf der Curve errichtete innere Normalen sein, die [vgl. (𝔏.)] beide $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt C mit einander gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht.

Oder aber: $(C\pi_0)$ fällt in π_0 *schief* auf die Curve. Alsdann muss die Länge des Radiusvectors $(C\pi)$ nothwendig *sich ändern*, sobald man seinen Endpunkt π, von π_0 aus, längs der Curve ein wenig verschiebt, und zwar *wachsen* oder *abnehmen*, jenachdem man diese Verschiebung im einen oder andern Sinne ausführt. Diejenige Bewegungsrichtung des Punktes π, mit welcher eine *Abnahme* der Radiusvectorlänge verbunden ist, mag mit $\pi_0 p_k$ bezeichnet sein; der Art, dass p_k einen bestimmten der beiden Punkte p_1, p_2 repräsentirt. Lassen wir also den Punkt π die Curvenstrecke $\pi_0 p_k$ von π_0 bis p_k durchwandern, so wird der Radiusvector $(C\pi)$ zu *Anfang* den Werth $(C\pi_0) \leqq A$ besitzen, und sodann in den nächstfolgenden Augenblicken *noch kleinere* Werthe annehmen. Dieses Sichverkleinern oder Abnehmen des Radiusvectors $(C\pi)$ kann aber nur *eine Zeit lang*, nämlich nur bis zum Eintreffen des Punktes π in einem noch *vor* p_k liegenden Punkte π_1 fortdauern:

(𝔑.) $$\pi_0 \cdots\cdots \pi_1 \cdots\cdots\cdots p_k \, ;$$

denn zu *Ende* der in Rede stehenden Bewegung, d. i. beim Eintreffen des Punktes π in p_h hat der Radiusvector die Länge (Cp_h), also eine Länge, die $> A$ ist [vgl. (𝔎.)]. Demgemäss wird die Verkleinerung des Radiusvectors $(C\pi)$ ununterbrochen fortdauern von π_0 bis π_1, um sodann von π_1 aus zunächst einem Wachsen oder auch einem Sichgleichbleiben Platz zu machen. Folglich steht der Radiusvector $(C\pi_1)$ im Punkte π_1 zur Curve *senkrecht*. Ueberdies ist seine Länge $< (C\pi_0)$, mithin auch $< A$; [vgl. (𝔐.)]. Demgemäss repräsentiren die beiden Linien $(C\pi_1) < A$ und $(Cp) = A$ zwei in π_1 und p auf der Curve errichtete innere Normalen, die [vgl. (𝔏.)] beide $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt C miteinander gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht.

Jene von uns gemachte Annahme (𝔐.) führt also unter allen Umständen zu absurden Folgerungen, und ist daher unhaltbar. Folglich kann auf der Curvenstrecke $p_2\pi p_1$ niemals ein Punkt π_0 existiren, für welchen $(C\pi_0) \leq A$ ist. Oder mit anderen Worten: *Sämmtliche Punkte der Curvenstrecke* $p_2\pi p_1$ *liegen ausserhalb des um* C *mit dem Radius* A *beschriebenen Kreises.*

Die Combination dieses Resultates mit dem früheren Resultate (𝔍.) führt aber sofort zu der Einsicht, dass der von uns aufgestellte dritte Satz wirklich correct ist. — *Q. e. d.*

Dass die im Vorhergehenden über die Existenz und Eigenschaften des Punktes π_1 angestellten Betrachtungen auf Grund unserer über die Curve gemachten Voraussetzungen und unter Anwendung der schönen Bolzano-Weierstrass'schen Methoden als *vollkommen strenge* sich herausstellen, — bedarf wohl keiner näheren Darlegung. Genauer genommen ergiebt sich nämlich, dass innerhalb des Intervalls (𝔑.) irgend welche Punkte existiren müssen, in denen der nach der Bogenlänge genommene Differentialquotient des Radiusvectors $(C\pi)$ *verschwindet*. Und unter π_1 ist alsdann derjenige dieser Punkte zu verstehen, welcher auf π_0 *zunächst* folgt.

Beweis des vierten Satzes. — Denkt man sich zur gegebenen Curve zwei innere Parallelcurven s und s' construirt, deren Abstände A und A' von der gegebenen Curve der Formel entsprechen

$$(U.) \qquad A < A' < R_0 \,,$$

so ist nachzuweisen, dass diese beiden Curven s und s' keinen Punkt mit einander gemein haben können.

Wir wollen *annehmen*, es existirte ein solcher den Curven s und s' gemeinsamer Punkt q, und die hieraus sich ergebenden Consequenzen entwickeln.

Der Definition von q zufolge muss die gegebene Curve eine durch q gehende innere Normale besitzen, deren Länge, bis q gerechnet, $= A$ ist, gleichzeitig aber auch eine innere, ebenfalls durch q gehende Normale besitzen, deren Länge, bis q gerechnet, $= A'$ ist. Bezeichnet man also die Fusspunkte dieser beiden Normalen mit p und p', so ist:

$$(V.) \qquad (pq) = A \quad \text{und} \quad (p'q) = A' ,$$

also mit Rücksicht auf ($U.$):

$$(W.) \qquad (pq) < R_0 \quad \text{und} \quad (p'q) < R_0 .$$

Nun sind offenbar, was die Grösse des Winkels pqp' betrifft, nur zwei Fälle möglich.

Entweder nämlich wird dieser Winkel $= 0$ sein. Dann würden die beiden Punkte p und p' unter einander identisch, also, nach ($V.$), $A = A'$ sein; — was mit ($U.$) in Widerspruch steht.

Oder aber: der Winkel pqp' ist von 0 verschieden. Alsdann sind (pq) und $(p'q)$ zwei auf der gegebenen Curve errichtete innere Normalen, die beide [vgl. ($W.$)] $< R_0$ sind, und die überdies den Punkt q mit einander gemein haben; — was in Widerspruch steht mit dem schon bewiesenen zweiten Satze.

Jene von uns gemachte Annahme, dass s und s' einen Punkt gemein haben, führt also unter allen Umständen zu absurden Resultaten, und ist daher unhaltbar. — *Q. e. d.*

Beweis des fünften Satzes. — Es sei auf der gegebenen Curve eine innere Normale

$$(pq) = A < R_0$$

errichtet; dabei bezeichne p den Fusspunkt und q den Endpunkt derselben. Denken wir uns den Fusspunkt p dieser Normale längs der gegebenen Curve fortwandernd, während ihre Länge A constant bleibt, so wird ihr Endpunkt q eine innere Parallelcurve von constantem Abstande A beschreiben.

Besässe nun diese Curve in q einen Doppelpunkt, so müsste die Normale (pq), nachdem sie eine Zeit lang fortgewandert ist, in

eine Lage $(p'q')$ gelangen, bei welcher q' mit q zusammenfällt. Dann aber würden diese beiden Normalen (pq) und $(p'q')$, die beide $< R_0$ sind, den Punkt q gemein haben; — was dem schon bewiesenen zweiten Satze widerspricht. Folglich ist die Annahme, dass jene Parallelcurve einen Doppelpunkt besitzt, unhaltbar. — *Q. e. d.*

Nachträgliche Bemerkung zum Theorem pag. 82.

Es sei irgend ein Gebiet $\mathfrak{T}$ gegeben, einerlei ob die Randcurve dieses Gebietes den auf pag. 4 angegebenen Determinationen entspricht oder nicht. Ferner sei $\Psi = \Psi(x, y)$ irgend eine *Fundamentalfunction* des Gebietes $\mathfrak{T}$; und die Randwerthe von Ψ mögen mit f bezeichnet sein. Betrachtet man nun diese Randwerthe f, ebenso wie die Werthe θ [vgl. pag. 3], als Functionen der Bogenlänge σ, und bezeichnet man die Differentialquotienten dieser Functionen nach σ durch Accente, so erhält man, und zwar unmittelbar auf Grund des Theorems pag. 82, folgenden Satz:

Satz. — *Ist s ein Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{T}$, und setzt man voraus, dass innerhalb eines beliebig kleinen den Punkt s einschliessenden Randintervalls θ, θ', θ'', f, f' stetig, und f'' abtheilungsweise stetig sind, und dass ausserdem θ' innerhalb dieses Intervalls durchweg $\geqq 0$ ist, so werden die Ableitungen*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

bei einer Annäherung an den Punkt s gegen bestimmte endliche Werthe convergiren. Ueberhaupt werden alsdann diese Ableitungen stetig sein in ganzer Erstreckung desjenigen Gebietes, welches von $\mathfrak{T}$ abgetrennt wird durch eine um s mit hinreichend kleinem Radius beschriebene Kreisperipherie.

Dieser Satz, dessen Zusammengehörigkeit mit den Sätzen pag. 43. 44 von selber ins Auge fällt, dürfte wohl noch einer gewissen Vereinfachung fähig sein. In der That dürfte eine genauere Untersuchung zu dem Ergebniss führen, dass die in diesem Satz genannte Voraussetzung: $\theta' \geqq 0$ überflüssig ist, und also ganz fortgelassen werden kann.

Inhaltsübersicht.

Seite

Ueber die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, und über die geschlossene Curve, durch welche diese beiden Gebiete sich bestimmen 3
Determinationen 4
Plan der Untersuchung 5
Methoden und Resultate 14

Erstes Capitel: Ueber die Potentiale V und W, namentlich über die Ableitungen derselben.

§ 1. Ueber das Potential V. Theorem $V\alpha$. 16
§ 2. Ueber das Potential W. Theorem $W\alpha$. 22
(Nachträge zur *ersten* Abhandlung findet man auf pag. 28—31.)
§ 3. Die ersten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\beta$. 31
§ 4. Die ersten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\beta$. 37
§ 5. Allgemeine Betrachtungen über die höheren Ableitungen der Potentiale V und W. 44
§ 6. *Recapitulation und Vereinfachung der Theoreme $V\alpha$., $W\alpha$. und $V\beta$., $W\beta$.* 46
§ 7. Die zweiten Ableitungen des Potentials V. Theorem $V\gamma$. 49
§ 8. Die zweiten Ableitungen des Potentials W. Theorem $W\gamma$. 54
§ 9. *Tabellarische Uebersicht der sechs Theoreme $V\alpha$., $V\beta$., $V\gamma$. und $W\alpha$., $W\beta$., $W\gamma$.* 57
§ 10. Ueber eine aus zwei Potentialen V und W zusammengesetzte monogene Function 58

Zweites Capitel: Ueber Fundamentalfunctionen mit vorgeschriebenen Randwerthen, namentlich über die Ableitungen dieser Functionen.

§ 11. Vorläufige Betrachtungen über die Azimuthe θ und γ 63
§ 12. Einige Hülfssätze 73
§ 13. *Ein wichtiges Theorem, welches durch die Methode des arithmetischen Mittels für die Ableitungen der Fundamentalfunctionen sich ergiebt.* (Man findet dieses Theorem auf pag. 82.) 77
§ 14. Weitere Sätze über die Ableitungen der Fundamentalfunctionen . . . 83
§ 15. Ueber monogene Fundamentalfunctionen 94

Drittes Capitel: Ueber die Green'sche Function und die Theorie der conformen Abbildung.

§ 16. Geometrische Sätze 100
§ 17. Aufstellung einiger Hülfssätze 106
§ 18. Untersuchung der *Green'schen Function* am Rande ihres Gebietes. Die sich dabei zunächst darbietende Methode 113
§ 19. Fortsetzung. Methode der berührenden Kreisfläche 120
§ 20. Fortsetzung. Methode der übergreifenden Kreisfläche 129
§ 21. Zusammenstellung und Vervollständigung der über die Green'sche Function erhaltenen Resultate 140
§ 22. Zur Theorie der *conformen Abbildung* 144
Anhang zum letzten Capitel (gehörig zu § 16) 149
Nachträgliche Bemerkung zum Theorem pag. 82 (in § 13) 163

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

image
not
available

